目　录

第 III 章 边值问题

第 IV 章 混合问题和发展方程

第 I 章

线性偏微分方程的基本实例和它们的基本解

1. 线性偏微分方程的基本实例

线性偏微分方程的理论起源于少数几个特殊的方程的深入研究，这些方程的重要性，在十八和十九世纪已经有所认识．在数学物理(重力，电磁学，声的传播，热传导和量子力学)中有这些基本的方程．在应用数学中引进这些方程之后，已经证明，它们在纯粹数学中也起着重要的作用：例如，Laplace 方程，作为 Newton 位势理论中和静电学中的基本方程而被首先研究；稍后，经过适当的重新解释，它被用于研究 Riemann 流形的几何和拓扑．类似地，Fourier 在热传导的课题中研究了热导方程．以后，证明了它与概率论有关．我们在下面要描述的一个基本实例——Cauchy-Riemann 算子，它被用于定义复变量的解析函数——似乎不来源于物理学中的应用．但是，据我所知，其它的方程在应用数学中都有它们的来源．总之，线性偏微分方程的一般理论是这些特殊算子的各自理论的发展与综合．在二十世纪中，人们已经认识到，许多似乎是 Laplace 方程或波动方程所特有的性质，事实上可以推广到更广泛的方程类上去．这些性质通常集中在只对这一个或那一个方程有意义的问题上：例如，集中在 Dirichlet 问题上，它对于 Laplace 方程有意义，但是它不会对波动方程有意义；或者，集中在 Cauchy 问题上，它对于后者有意义，而对于前者没有意义．这个介绍性的教程的目的是帮助读者熟悉一些这样的问题和它们的一些解法——但是我们总是紧密地联系着这些特殊的方程，这些问题

和解法最初是为它们而研究的. 因而, 清楚地记住这些基本实例的特性是必要的.

1.1 $n(>1)$ 个变量的 Laplace 方程

我们用 $x=(x^1, \cdots, x^n)$ 表示 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 中的变量. 通常, *Laplace* 算子是

$$\Delta=\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)^2.$$

有的人把 $-\Delta$ 称为 Laplace 算子. 他们有很好的理由这样做; 很遗憾, 历史的习惯并非如此, 但是, 他们正在获得市场. 事实上, $-\Delta$ 是一个正算子; 它的 Fourier 变换是 $\mathbf{R}_n$ 中的变量 ξ 的范数的平方 $|\xi|^2$. 这强调了在 Laplace 算子和 Euclid 范数, Euclid 空间中的球, 以及正交变换等等之间的密切联系. 事实上, Δ 在正交变换下是不变的; 即, 如果 T 是 $\mathbf{R}^n$ 中任何一个这样的变换, f 是 x 的任一无穷次可微函数, 则

$$(\Delta f)(Tx)=\Delta\{f(Tx)\}, \quad x\in\mathbf{R}^n. \tag{1.1}$$

自然, 这是 Laplace 算子的一种具有决定性的对称性性质, 并且, 也是它在各向同性介质中能够描述许多现象的部分原因.

事实上, $\mathbf{R}^n$ 中任一使得 (1.1) 对于所有 C^∞ 函数 f 都成立的线性变换 T 必定是正交的: 正交变换恰是那些使 Δ 保持不变的 (即, 与 Δ 可交换的) 线性变换.

满足齐次 Laplace 方程

$$\Delta h=0 \tag{1.2}$$

的函数称为调和函数.

1.2 波动方程

用纯虚变量 $\sqrt{-1}\,\xi_j(j=1, \cdots, n)$ 代替偏微商 $\partial/\partial x^j$ 将是方便的, 其理由在我们开始使用 Fourier 变换时将变得清楚. 这样, 算

子 $-\Delta$ 变为

$$|\xi|^2=\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2, \tag{1.3}$$

它是一个正定的二次型．它的符号差(signature)是$(n,0)$：它有 n 个正特征根，而没有非正的特征根．我们还可以考察有不同符号差的二次型．一个重要的情形是这样的二次型，它的特征根中除了一个是严格负的之外，其余都是严格正的．由于各种原因，在 $n+1$ 维空间 $\mathbf{R}_{n+1}$ 上考虑这样一种二次型是方便的，我们用$(\xi_1,\cdots,\xi_n,\tau)$表示 $\mathbf{R}_{n+1}$ 中的变量．事实上，它是二次型

$$|\xi|^2-\tau^2=\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2-\tau^2, \tag{1.4}$$

相应于 $\mathbf{R}^{n+1}$(其中的变量用 $x^1,\cdots,x^n,t$ 表示)中的偏微分算子

$$\square=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta_x=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^2-\cdots-\left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)^2.$$

它称为波动算子(有时称为 *d'Alembert* 算子)；$x=(x^1,\cdots,x^n)$称为空间变量，t 称为时间变量．这是一个用来描述振动现象和波的传播的算子．

如果我们对 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中那些与 $\square$ 可交换的线性变换感兴趣，那么，确定它们是些什么变换将是没有困难的．自然，它们和(对偶空间)$\mathbf{R}_{n+1}$ 中那些使二次型(1.4)不变的线性变换是一样的．它们形成了一个自从相对论出现以后在物理学中很有用的群：Lorentz 群．

波动方程

$$\square g=0 \tag{1.5}$$

的解有一些特殊的性质，这些性质完全不同于 Laplace 方程的解的性质；这一点，在我们仔细地考察它们的时候将变得清楚了．

1.3 热导方程

§1.1 和§1.2 中的例子都是齐次的二阶微分算子，即这样的微分算子，它包含二阶的偏微商，而不包含阶数 $\neq 2$ 的偏微商．

$\mathbf{R}^{n+1}$ 中的热导算子

$$(1.6)\qquad \frac{\partial}{\partial t}-\Delta_x$$

不是这种类型的. 它被用来描述各种传导现象, 例如, 在各向同性介质中热的传导. 初一看, 热导方程和波动方程有点象, 其实, 它们确实有一些共同的性质. 但是, 它们也有非常深刻的差别. 与热导方程的解相联系的不是波的传播现象, 而是扩散类型的现象. 事实上, 热导方程与 Laplace 方程有某些类似性. 这不必感到奇怪: 热导方程中的主项 (leading terms), 即二阶偏微商, 与空间变量的 Laplace 方程是一样的.

我们刚才已经看到的也许是线性偏微分方程的最重要的例子. Laplace 方程是一大类方程的原型, 这类方程称为椭圆型偏微分方程. 其理由是显然的: 如果考察二次型

$$a_1\xi_1^2+a_2\xi_2^2,\qquad a_1>0,\ a_2>0,$$

那么, 相差一个尺度的变换, 它等于两个变量的 Laplace 算子的算符 (symbol) (1.3). 它也是 $\mathbf{R}_2$ 中这样的函数, 其等值线是椭圆.

类似地, 波动方程是双曲型偏微分方程的原型: $\mathbf{R}_2$ 中函数 $\xi^2-\tau^2$ 的等值线是标准的双曲线. 热导方程是抛物型偏微分方程的原型: 它的算符可定义为 $\mathbf{R}_2$ 中的函数 $\xi^2-\tau$, 其等值线是标准的抛物线. 事实上, 由于我们要利用 Fourier 变换, 我们宁愿把它的算符定义为 $|\xi|^2+i\tau$, 即, 我们用 $i\tau$, 而不是用 $-\tau$ 代替 $\partial/\partial t$.

在数学家只研究一阶和二阶的方程的时候, 这是把偏微分方程分类的经典的方式. 但是这远不适应于偏微分方程组, 高阶方程或复系数方程的分类. 实际情形是, Laplace 方程的某些根本的性质是从其算符 (1.3) 只在原点等于零这一事实得来, 而不是从 (1.3) 是一个正定二次型这一事实得来. 换言之, Laplace 方程的这些性质, 也存在于具有上述前一特性而不具有后一特性的方程中. 这就是我们在下面要研究的方程的情形.

1.4 Cauchy-Riemann 方程

我们用 x, y 表示平面 $\mathbf{R}^2$ 中的变量. 齐次 Cauchy-Riemann 方程为

$$(1.7)\qquad \frac{\partial f}{\partial x}+\sqrt{-1}\frac{\partial f}{\partial y}=0.$$

这里, $f=u+iv$ 是一复值可微函数(u, v 是实的). 方程(1.7)等价于方程组

$$(1.8)\qquad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}.$$

我们令 $z=x+iy$, $\bar{z}=x-iy$, 或者, 等价地, $x=\frac{1}{2}(z+\bar{z})$, $y=(1/2i)(z-\bar{z})$. 这样, $\mathbf{R}^2$ 的一个子集中的任一函数 $f(x, y)$ 也都可看作$(z, \bar{z})$的函数. 此时, 方程(1.7)可改写为(由微商的链规则)

$$(1.9)\qquad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0.$$

这里, 我们用了

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

粗略地说, (1.9)告诉我们 f 是"与 $\bar{z}$ 无关的"; 更确切一些, (1.9)是说, f(假定它是充分光滑的)是 z 的解析函数, 即, 它有复导数[在(1.9)成立的各点处]. 再引进"反 Cauchy-Riemann"算子

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

是方便的. 注意,

$$(1.10)\qquad 4\frac{\partial^2}{\partial z\partial \bar{z}}=\Delta,$$

Δ 是两个变量的 Laplace 算子. 恒等式(1.10)揭示了 Laplace 方程和 Cauchy-Riemann 方程之间的紧密联系. 在我们研究它们的时候将证实这些联系. $\partial/\partial\bar{z}$ 的算符是

$$\frac{i}{2}(\xi+i\eta) \tag{1.11}$$

(我们已用 ξ, η 表示对偶平面 $\mathbf{R}_2$ 中的变量). 注意, 象 Laplace 算子的算符一样, (1.11) 只在原点处等于零. 这个性质将会有一系列重要的后果. 由于这个性质, 用现代的术语说, Cauchy-Riemann 算子称为椭圆的.

1.5 Schrödinger 方程

在偏微分方程的研究中, 人们很快就意识到从纯粹的形式差别出发, 会得到一些重要的和深刻的规律. 下面的每一件事都证实了这一点, 热导方程和 Schrödinger 方程的理论也是很好的例证. n 个空间变量的常系数 Schrödinger 方程是

$$\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}-\Delta_x. \tag{1.12}$$

它与热导算子的唯一差别是, 在 $\partial/\partial t$ 之前出现了因子 i^{-1}. 然而, 在以后将要看到, 这两个方程的解显示出非常不一样的性质. 最初, Schrödinger 方程是在描述电子和其它基本粒子的行为时引进的. 它有一缺陷, 即它不是 Lorentz 不变的, 因而, 它不适用于量子力学的相对论叙述. 作为一种近似, 它还在被使用着, 但是, 在比较精确的结构中, 它已经被 *Dirac* 方程所代替.

到目前为止, 我们只考察了单个的, 或者, 纯量的 (scalar) 线性偏微分方程的例子. 但是, 有着许多 (数学上的和物理学上的) 重要的方程组的例子. 所谓方程组, 即意味着对于给出的 N_1N_2 个线性偏微分算子 $P_{jk}(j=1, \cdots, N_1, k=1, \cdots, N_2)$, 考虑 N_2 个未知函数 u^k 的 N_1 个方程

$$\sum_{k=1}^{N_2} P_{jk}u^k=f_j, \quad j=1, \cdots, N_1. \tag{1.13}$$

方程组 (1.13) 称为确定的 (determined), 如果 $N_1=N_2$, 也就是, 如果方程的个数恰好与未知函数个数一样多; 称为超定的 (overdetermined), 如果 $N_1>N_2$, 也就是, 如果方程的个数严格多于未

知函数的个数；称为欠定的(underdetermined)，如果方程的个数严格少于未知函数的个数.方程组的理论，特别是超定方程组的理论，比单个方程的理论要困难得多. 在目前阶段，我们只限于举几个例子. 正如上面提到过的 Dirac 方程一样，Maxwell 方程——经典的电磁学以它为基础——是确定组的一个例子. 它们都是双曲组. 我们不探求双曲组这一术语的含义，只是提一下：双曲组有一些与波动方程的性质密切相关的形式的和非形式的性质.下面，我们给出一些不是确定的线性偏微分方程组的例子.

1.6 梯 度

令 $n>1$ 表示自变量 x^j 的个数. 梯度

$$\mathrm{grad}=\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right) \tag{1.14}$$

是一个超定的微分算子组. 上面提到的数 N_1 等于 n, $N_2=1$. 方程组(1.13)现在变为

$$\frac{\partial u}{\partial x^j}=f_j, \quad j=1, \cdots, n. \tag{1.15}$$

超定组的研究中充满着困难，这些困难在单个方程的研究中是没有的；它们在本质上是代数的，并且，它们甚至于出现在象(1.15)那样简单的情形中. 事实上，如果方程组(1.15)成立(假定函数 $u, f_1, \cdots, f_n$ 是充分光滑的)，那么，从(1.15)就得到

$$\frac{\partial f_j}{\partial x^k}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^j \partial x^k}=\frac{\partial f_k}{\partial x^j}.$$

换句话说，如果我们把$(f_1, \cdots, f_n)$看作一个向量值函数 $\mathbf{f}$，那么，(1.15)就蕴涵着

$$\mathrm{curl}\, \mathbf{f}=0. \tag{1.16}$$

方程(1.16)是 $n(n-1)/2$ 个方程的方程组，称为方程组(1.15)的相容性条件. 不难知道，如果(1.16)成立，人们事实上能够解出(1.15)——至少是局部地.

梯度是一个椭圆的(非纯量的)微分算子. 我们不深究其确切

含义，只是指点一下它与 Laplace 算子的某种类似性(看下文)。

1.7 散 度

散度算子作用在定义于 $\mathbf{R}^n$ 的一个子集中而取值于 $\mathbf{C}^n$ 的函数上(我们经常要处理复值纯量函数)。由散度算子定义的方程组 (1.13) 为

(1.17)
$$\frac{\partial u^1}{\partial x^1}+\frac{\partial u^2}{\partial x^2}+\cdots+\frac{\partial u^n}{\partial x^n}=f,$$

这里，$N_1=1$，$N_2=n$。如果令 $\mathbf{u}=(u^1, \cdots, u^n)$，那么(1.17)的左端通常用 $\operatorname{div}\mathbf{u}$ 表示。从极为形式的推理我们立即看到，(1.17)容许有很多解。任意固定 j，取 u^j 为 f 关于 x^j 的任一原函数，同时，对于 $k\neq j$，取 $u^k\equiv 0$；这就给出了一个解。这种手续对所有的欠定组都有效：令 N_2-N_1 个未知函数等于零，我们就把欠定组化为一确定组。这是一种众所周知的初等线性代数的方法；它指出了，欠定组比超定组(在大多数情形，也比确定组)容易研究得多；它们也是最少引起兴趣的。

令 $\mathbf{u}=(u^1, \cdots, u^n)$ 表示一个定义在 $\mathbf{R}^n$ 的开子集 Ω 中而取值于 $\mathbf{C}^n$ 的 C^∞ 函数，v 是一个在 Ω 中具有紧支集的复值 C^∞ 函数。通过分部积分，我们立即看到

(1.18)
$$\int(\operatorname{div}\mathbf{u})\,v\,dx=-\int\langle\mathbf{u},\ \operatorname{grad}v\rangle dx,$$

其中，$\langle\mathbf{u},\ \operatorname{grad}v\rangle=\sum_{k=1}^{n}u^k\partial v/\partial x^k$ 是向量间(更确切地说，是向量和余向量间)的标准纯量积。我们可以把公式(1.18)叙述为：算子 $-\operatorname{div}$ 和算子 grad 互为转置(transpose)。另一众所周知的公式是

(1.19)
$$\operatorname{div}\operatorname{grad}=\Delta,$$

它强调了梯度，散度和 Laplace 算子之间的联系。

还有一些超定微分算子组的别的例子，它们在数学及其应用中是重要的；我们在上面已遇到过其中之一，即旋度。另一例子是

复梯度 $\bar{\partial}$:

$$\bar{\partial}=(\partial/\partial\bar{z}^1,\ \cdots,\ \partial/\partial\bar{z}^n).$$

齐次方程组

$$\bar{\partial}u=0 \tag{1.20}$$

称为多变量的 *Cauchy-Riemann* 方程．(1.20)(其中假设 u 是一次连续可微的)的解是 n 个复变量 $z^1,\ \cdots,\ z^n$ 的全纯函数，多复变量全纯函数的理论近年来有了很大的发展.

除了上面这些例子之外，我们还经常把常微分方程看作偏微分方程的特殊情形；自然，这仅仅是自变量个数 $n=1$ 的情形．我们对于线性常微分方程的理论，比偏微分方程的理论知道得详细得多．常微分方程的某些性质可推广到偏微分方程上去；另外一些性质可用于构作某些偏微分方程的解．在以后的讨论中将会看到这些情况.

习 题

1.1 利用极坐标，写出两个变量的 Laplace 算子的表达式和 Cauchy-Riemann 算子的表达式.

1.2 在球面坐标和柱面坐标中写出三个变量的 Laplace 算子的表达式.

1.3 考虑 n 个变量的一阶线性偏微分算子

$$L=\alpha^1\frac{\partial}{\partial x^1}+\cdots+\alpha^n\frac{\partial}{\partial x^n},$$

它的系数是复常数．证明下述两个命题:

(1) 如果复向量 $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha^1,\ \cdots,\ \alpha^n)$ 具有 $z\mathbf{a}$ 这样的形式，其中 $\mathbf{a}$ 是一个实向量，而 z 是某个复数，那么，在 $\mathbf{R}^n$ 中我们可以施行变量的线性变换 $x\to y$，使得 L 在 y 坐标中的表达式变为 $z\partial/\partial y^1$.

(2) 假设向量 $\mathrm{Re}\,\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\mathrm{Im}\,\boldsymbol{\alpha}$ 是线性无关的(这要求 $n>1$)；证明，在 $\mathbf{R}^n$ 中我们可以施行变量的线性变换 $x\to y$，使得 L 在 y 坐标中的表达式变为

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y^1}+\sqrt{-1}\,\frac{\partial}{\partial y^2}\right).$$

1.4 在 $\mathbf{R}^n$ 的原点的一邻域中考虑一阶线性偏微分算子

$$L=\sum_{j=1}^{n}\alpha^j(x)\,\frac{\partial}{\partial x^j},$$

它的系数是实 C^∞ 的. 假设,至少有一个系数 α^j 在原点不等于零. 证明,在原点的一个邻域中存在 C^∞ 的变量变换 $x\to y$, 使得 L 在 y 坐标中的表达式为 $\omega(y)\partial/\partial y^1$, 这里 $\omega(0)\neq 0$. 选择坐标 y, 使得在 $y=0$ 附近 $\omega(y)\equiv 1$, 这总是可能的吗?

1.5　令 $\square=(\partial^2/\partial x^2)-(\partial^2/\partial y^2)$ 是平面中的波动算子. 证明, 在 $\mathbf{R}^2$ 中存在一个线性的变量变换,它把 $\square$ 变为 $4\partial^2/\partial x'\partial y'$. 利用这个事实,证明平面中的波动方程 $\square u(x, y)=0$ 的所有解都具有 $u(x, y)=f(x+y)+g(x-y)$这样的形式, 其中 f 和 g 是实直线上的函数(读者不妨假定 u 是二次连续可微的).

与平面中用公式(1.10)表示的Laplace算子的性质加以比较,问:每个两变量的调和函数是否都具有 $u(x, y)=f(x+iy)+g(x-iy)$这样的形式,其中 f 和 g 是一个复变量的全纯函数?

1.6　证明,如果 f 是定义在闭单位球 $\bar{B}_1=\{x\in\mathbf{R}^n; |x|\leqslant 1\}$ 中而取值于 $\mathbf{C}^n$ 中的 C^1 函数, 它满足(1.16), 则方程组(1.15)总有一个定义在 $\bar{B}_1$ 中(且取值于 $\mathbf{C}$ 中)的 C^1 解 u. 举例说明,如果 $n=2$, 并且如果用半闭环形 $0<x^2+y^2\leqslant 1$ 代替闭单位圆盘 $\bar{B}_1\subset\mathbf{R}^2$, 那么上述结果是不对的. 把这个事实与下述事实联系起来: 当 f 是全纯函数(譬如说, 在原点关于平面的余集中)时, 反 Cauchy-Riemann 方程 $\partial u/\partial z=f$ 不总有在上述半闭环形中是 z 的全纯函数的解 u.

1.7　考虑一个空间变量的热导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad(\text{在 }\mathbf{R}^2\text{ 中}). \tag{1.21}$$

描述它的形为 $u(x, t)=v(x)w(t)$ 的所有的解(读者不妨假设 v 和 w 是无穷次可微的). 对于波动方程和 Schrödinger 方程(也是一个空间变量的),应用同样的方法, 并把在这三种情形中的结果加以比较.

1.8　考虑平面中的波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1.22}$$

令 $u_0(x)$, $u_1(x)$ 是实直线上的两个 C^∞ 函数, 它们在区间 $|x|\leqslant 1$ 之外等于零. 利用习题1.5中所给出的(1.22)的解的描述, 证明, (1.22)有唯一的解 u, 使得

$$u(x, 0)=u_0(x),\quad u_t(x, 0)=u_1(x). \tag{1.23}$$

假设, $u_1\equiv 0$, 并且, 当 $|x|<1$ 时 $u_0(x)>0$. 此时, 解 u 的支集是什么? 平面中 $u(x, t)>0$ 的区域是什么?

1.9 令 $u_0(x)$ 是实直线上的一个 C^∞ 周期函数. 这时可以把 $u_0(x)$ 写为具有 Fourier 系数 $u_{0,p}$ 的级数

$$u_0(x) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} u_{0,p} e^{ip\omega x}, \tag{1.24}$$

其中 $\omega = 2\pi/T$, T 是 u_0 的周期; 当 $|p| \to +\infty$ 时 $u_{0,p}$ 的绝对值趋于零的速度快于 $1/|p|$ 的任何幂. 承认上面这些事实(如果读者不知道这些事实的话), 读者试利用在习题 1.7 中指出的变量分离方法去解(1.21)的初始值问题, 也就是, 找方程(1.21)的解 u, 它满足 $u(x, 0) = u_0(x)$.

1.10 对定义在开区间 $|x|<1$ 中的 C^∞ 函数 $u_0(x)$, 给出使得下述事实成立的必要和充分条件: 初始值问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i\frac{\partial u}{\partial x} \quad 在区域\ x^2+t^2<1\ 中, \tag{1.25}$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad 在区间\ |x|<1\ 中 \tag{1.26}$$

有解 $u(x, t)$.

1.11 令 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个开子集, $P(x, \partial/\partial x)$ 是一个复系数的线性偏微分算子, 其系数定义于 Ω 中, 并在 Ω 中是 C^∞ 的, Σ 是 Ω 中的广义函数空间 [即, $\mathscr{D}'(\Omega)$ 的一个线性子空间, 它被赋予一个局部凸拓扑, 细于由 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 诱导的拓扑]. 证明, 由属于 Σ 的、在 Ω 中满足齐次方程 $P(x, \partial/\partial x)h=0$ 的广义函数 h 组成的线性子空间 $\mathrm{Ker}_\Sigma P$ 在 Σ 中是闭的.

1.12 令 Ω 和 $P(x, \partial/\partial x)$ 如习题 1.11 中所述, 并写为

$$P(x, \partial/\partial x) = \sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha(x)(\partial/\partial x)^\alpha,$$

其中, $(\partial/\partial x)^\alpha = (\partial/\partial x^1)^{\alpha_1}\cdots(\partial/\partial x^n)^{\alpha_n}$, $|\alpha| = \alpha_1+\cdots+\alpha_n$. 令 x_0 是 Ω 中的一点. 证明下述引理:

引理 1.1 如果存在一个 n 数组 α, 其长度 $|\alpha| = m$, 使得 $c_\alpha(x_0) \ne 0$. 那么, Ω 中的齐次方程 $P(x, \partial/\partial x)h = 0$ 没有这样的非零广义函数解: 它的支集只由一个点 x_0 组成.

[提示: 利用这样的事实: 支集是 $\{x_0\}$ 的任一广义函数 u 是 x_0 处的 Dirac 测度的导数的一个有限线性组合:

$$u = \sum_{|\beta|\le m'} a_\beta \delta^{(\beta)}(x - x_0).\ ]$$

2. 不附加条件的解的存在性和光滑性

因为我们现在要较仔细地研究线性偏微分算子, 因此须采用

简便的记号和术语．我们采用现在通用的多重指标记号．n 个自变量 $x^1, \cdots, x^n$ 的一个线性偏微分算子，它的系数是定义在 $\mathbf{R}^n$ 的一个开子集 Ω 中的复值函数，是偏微商的一个多项式，具有下述形式：

(2.1) $$P(x, \partial/\partial x) = \sum_{|\alpha|\leq m} c_\alpha(x)(\partial/\partial x)^\alpha.$$

这里，α 是一多重指标，即，是整数 $\alpha_j \geqslant 0$ 的一个 n 数组；$|\alpha|$ 表示它的长度 $\alpha_1+\cdots+\alpha_n$；另外，$(\partial/\partial x)^\alpha = (\partial/\partial x^1)^{\alpha_1}\cdots(\partial/\partial x^n)^{\alpha_n}$．通常，整数 m 是这个算子的阶；这就假设了对于某个长度等于 m 的多重指标 α，系数 $c_\alpha(x)$ 不恒等于零．若所有的系数 c_α 在 Ω 中都是常数，我们就把算子写为 $P(\partial/\partial x)$，而不写成 $P(x, \partial/\partial x)$．由于 Fourier 变换的有用性，人们常常宁愿考虑基本的算子

$$D_j = -\sqrt{-1}\,\partial/\partial x^j,\ j=1, \cdots, n,$$

而不考虑 $\partial/\partial x^j$．这样，我们就考虑形为

(2.2) $$P(x, D) = \sum_{|\alpha|\leq m} c_\alpha(x) D^\alpha$$

的微分算子，而不考虑(2.1)型的算子．我们用 $P(D)$ 表示典型的常系数微分算子．

在从常微分方程的研究过渡到偏微分方程的研究的时候，人们所注意到的第一件新奇事情是，所遇到的偏微分方程的所有例子都有无穷多个线性无关的解．例如，考虑常系数齐次偏微分方程

(2.3) $$P(D)u=0.$$

对于适当的复向量 ζ，可取 $u=\exp(i\langle\zeta, x\rangle)$，其中

$$\langle\zeta, x\rangle = \zeta_1 x^1+\cdots+\zeta_n x^n.$$

事实上，
$$P(D)e^{i\langle\zeta, x\rangle} = P(\zeta)e^{i\langle\zeta, x\rangle},$$

因而，只需要求 ζ 是多项式 P 的零点即可，即，

(2.4) $$P(\zeta)=0.$$

但是，$\mathbf{C}^n$ 上的一个多项式总有无穷多个不同的零点，只要 $n>1$；并且，当 $\zeta\neq\zeta'$ 时，函数 $\exp(i\langle\zeta, x\rangle)$ 和 $\exp(i\langle\zeta', x\rangle)$ 是线性无关的．

我们来给出另一个例子，即平面中的（变系数）方程

$$x\frac{\partial u}{\partial y}-y\frac{\partial u}{\partial x}=0. \tag{2.5}$$

如果转换到极坐标 r, θ, (2.5)就可写为

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}=0. \tag{2.6}$$

把 u 取为任何一个（一次连续可微的）只与 r 有关的，即旋转不变的函数，我们就得到(2.6)的一个解．这里，再一次出现许多线性无关的解．

在一个偏微分方程的大量的解中间，数学家将选出有限数目的，通常仅只一个解，它（们）满足某些"附加的条件"．我们来简单地描述两个最重要的例子：

例 2.1 令 Ω 是 $\mathbf{R}^3$ 的一个开子集，它的边界是一个光滑曲面 S、Ω 中的 Laplace 方程 $\Delta h=0$ 有无穷多个线性无关的解．但是我们可以只考虑在 S 上取预先指定的值的那些解．给定一个在 S 上（而不必在另外什么地方）定义的函数 f，可以找到 Ω 中的一个调和函数 h，它在 S 上等于 f．在适当条件下，将有一个，且只有一个这样的解．

例 2.2 在平面 $\mathbf{R}^2$ 中考虑波动方程

$$(\partial/\partial x)^2u-(\partial/\partial y)^2u=0. \tag{2.7}$$

任何一个函数 $u(x, y)=f(x+y)+g(x-y)$ 都是(2.7)的解，但是我们可以只考虑这样的解 u：当 $y=0$ 时 u 和 $(\partial/\partial y)u$ 取预先指定的值，譬如说，分别取值 $u_0(x)$ 和 $u_1(x)$．在适当的光滑性假设下，我们可以有

$$f(x)+g(x)=u_0(x), \tag{2.8}$$

$$f'(x)-g'(x)=u_1(x). \tag{2.9}$$

如果用 $U_1(x)$ 表示 $u_1(x)$ 的任一原函数，则从(2.9)就推得

$$f(x)-g(x)=U_1(x), \tag{2.10}$$

因而，把它与(2.8)结合起来，就得到

$$f=\frac{1}{2}(u_0+U_1),\quad g=\frac{1}{2}(u_0-U_1).$$

立刻可以验证，这样得到的 $u(x, y)$ 的值与 u_1 的原函数 U_1 的选择无关. 因而，我们得到了(2.7)的一个解，它满足我们的附加条件. 可以证明(正象我们有时要做的那样)，这个解是唯一的.

带有附加条件的这一类问题，直接导致存在性和唯一性的问题：对于 Ω 中的方程 $\Delta h=0$，是否存在一个解，它在 S 上等于 f？其次，如果至少存在一个解，那末究竟有多少个解？我们只考察了齐次方程，也就是，右端等于零的方程，但是，同样的考虑也完全适用于非齐次方程，其右端是一给定的函数或广义函数. 然而，很自然，在卷入这些很困难的带有附加条件的问题之前，我们希望对没有附加条件的方程的解了解得多一点. 例如，有这样的变系数线性偏微分方程，它全然没有解(与常微分方程的另一个差别！). 在这样的情形，讨论带有附加条件的问题就没有意义了. 这样，回答下述问题就显得有点更迫切了：方程

$$Pu=f$$

是否有解？不幸，虽然在特殊情形或对于特殊类型的方程(一旦问题被提得比较明确)，回答这个问题也许是不太困难的，但是要一般地回答，却是非常困难的. 可以给出一个十分满意的回答的一个这样的方程类是常系数线性偏微分方程类.

在有界集中常系数线性偏微分方程的解的存在性

虽然我们也可以在无界集合中讨论这个问题，但是此时将需要某些不是太初等的工具. 相反地，用比较初等的工具(假定读者有广义函数论的一些基本知识)却能把在有界集中的讨论进行到底. 在有界集 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 中考虑微分方程

$$P(D)u=f. \tag{2.11}$$

如以前所述，$P(\xi)$ 是具有复系数的 n 个变量的多项式；在(2.11)中，我们用 $D_j=-\sqrt{-1}\,\partial/\partial x^j$ 代替了变量 ξ_j. 假定存在 $\mathbf{R}^n$ 中的一个广义函数 E，使得

(2.12) $P(D)E=\delta$, 在原点处的 Dirac 广义函数.

首先,有这么一个定理,它说,对于任何多项式 P(除了 P 的所有系数都等于零的情形之外),上述假定确实是对的. 其次,在我们讨论的所有情形中,我们实际上将构造,也就是将给出 E 的一个明显的表达式. 这个广义函数 E 称为 $P(D)$ 的一个基本解;一般地,一个线性偏微分算子有很多基本解. 因为,取任意一个基本解 E_0,并把它与齐次方程(2.3)的任一解 h 相加,则 E_0+h 仍是一个基本解(基本解形成 $\mathbf{R}^n$ 中所有广义函数的空间的一个不通过原点的线性流形).

现在回到(2.11). 作下述假设:如果延拓 f,使在 Ω 的外部取零值,我们就得到整个空间 $\mathbf{R}^n$ 中的一个广义函数,用 $\tilde{f}$ 表示. 我们不是总能这样做的. 例如,当 $n=1$, 且 Ω 是开区间 $]0, 1[$ 时,取

$$f=\exp(+1/x).$$

此时,由上述方法定义的 f 的延拓不是一个广义函数. 如果我们不作上述关于 f 的假设,那么要对任意有界开集讨论我们的问题是不可能的,虽然对于某些开集解决这里的问题仍是可能的(但是用不同的方法). 这个假设究竟有什么不方便的地方呢?实际上,并非有什么太不合适之处:任何一个属于空间 $L^p(\Omega)$ $(1\leqslant p\leqslant+\infty)$ 的 f,用上面所说的方法都是"可延拓的"——事实上,Ω 中的任何一个广义函数,只要它在 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 处的增长(所谓"增长"是在某种适合于广义函数的意义下的)不快于到边界 $\partial\Omega$ 的距离的倒数的某个幂,它就是可延拓的.

我们用两个假设——Ω 的有界性和 f 的可延拓性——得到了 $\tilde{f}$ 在 $\mathbf{R}^n$ 中有紧支集这一性质($\tilde{f}$ 的支集包含在 Ω 的闭包 $\overline{\Omega}$ 中). 现在我们可以对两个广义函数作卷积,这两个广义函数中至少有一个有紧支集——例如 E 和 $\tilde{f}$. 这就产生了 $\mathbf{R}^n$ 中的一个广义函数 $E*\tilde{f}$,一般来说,它不是紧支集的. 为了对 $E*\tilde{f}$ 这样的卷积求导,我们可以对其任一因子求导. 这样,

$$P(D)(E*\tilde{f})=[P(D)E]*\tilde{f}=\delta*\tilde{f}=\tilde{f}.$$

特别,如果把 $\mathbf{R}^n$ 中的广义函数 $E*\tilde{f}$ 在 Ω 上的限制记作 u,则我们

看到，u 满足(2.11)．

如果我们只需要在一个较 Ω 小的集合中，更确切地说，在 Ω 的一个相对紧的开子集 Ω' 中解(2.11)，那就可以不用关于右端 f 的可延拓性假设．任意选取一个具有紧支集在 Ω 中的 C^∞ 函数 g，它在 Ω' 中等于1，并取 $u=E*(gf)$．容易验证，这 u 在 Ω' 中满足(2.11)．

一旦基本解被引进(例如，在解(2.11)的过程中)，人们立刻发现它可有多种用途．其中之一与(2.11)的解的光滑性有关．我们再来考察一下常微分方程，不过这次是常系数的．事实上，假定(2.11)表示一个这样的方程，并假设其右端 f 是 Ω 中的 C^∞ 函数．那末，(2.11)的每个解 u 是一 C^∞ 函数．这是一个明显的性质，因此我们可以问，当 $P(D)$ 是一个线性偏微分算子的时候，这性质是否仍然成立．一般来说，回答是否定的．为了看到这一点，只需回到例 2.2:(2.7)的右端是零函数，当然是 C^∞ 的．但是当 f，或者 g，不是单变量的 C^∞ 函数时，$u(x, y)=f(x+y)+g(x-y)$ 显然不是 C^∞ 的．然而，对于某些特殊的方程，上述性质能否成立呢？这次的回答是肯定的．事实上，对于我们的三个基本的例子：Laplace 方程，Cauchy-Riemann 方程和热导方程，这是对的．我们用基本解来处理这个问题，首先引进一个定义：

定义 2.1　Ω 中的线性偏微分算子 P 称为是次椭圆的(*hypoelliptic*)，如果给定 Ω 的任意开子集 U 和 U 中任意的广义函数 u，当 Pu 是 U 中的 C^∞ 函数时，u 亦然．

假设 P 有常系数，并令 E 是 $P=P(D)$ 的任一基本解．由(2.12)我们知道，在原点在 $\mathbf{R}^n$ 的余集 $\mathbf{R}^n\backslash\{0\}$ 中 $P(D)E=0$．因而，如果 $P(D)$ 是次椭圆的，则 E 必定是 $\mathbf{R}^n\backslash\{0\}$ 中的 C^∞ 函数．事实上，L. Schwartz 的一个经典的定理指出了其逆亦真：

定理 2.1　如果存在 $P(D)$ 的一个基本解 E，它是 $\mathbf{R}^n\backslash\{0\}$ 中的 C^∞ 函数，则 $P(D)$ 是次椭圆的(在 $\mathbf{R}^n$ 中)．

定理 2.1 给我们提供了检验常系数偏微分方程是否是次椭圆的一个有效的判别准则．我们将在下面几节中利用它．

定理 2.1 的证明 令 U 是 $\mathbf{R}^n$ 的任一开子集，u 是 U 中的一个广义函数，使得 $f=P(D)u$ 是 U 中的一个 C^∞ 函数. 令 x_0 是 U 的一个任意的点. 只需证明，在我们的假设下，在 x_0 的某个开邻域中 u 是 C^∞ 函数. 令 U' 是 U 的一个相对紧的开子集，它包含 x_0，并令 g 是一个已经遇到过的那种类型的截断函数，即，$g\in C_c^\infty(U)$，在 U' 中 $g=1$. 我们有

$$P(D)(gu)=gP(D)u+v=gf+v.$$

利用关于乘积求导的标准 Leibniz 公式，我们就知道，v 是 g 的阶数 $\neq 0$ 的导数的一个线性组合，因而，在 g 的导数等于零的地方 $v=0$，特别，在 U' 中和在 g 的支集的外部 $v=0$. 利用定理 2.1 的叙述中的基本解 E，我们有

$$E*P(D)(gu)=[P(D)E]*(gu)=gu,$$

因而，

$$gu=E*(gf)+E*v.$$

但是，$gf\in C_c^\infty$，并且，任一广义函数与任一具有紧支集的 C^∞ 函数的卷积是一 C^∞ 函数，因而，事情就被归结为证明在 x_0 的一个开邻域中 $E*v$ 是一个 C^∞ 函数：因为此时这对于 gu 也成立，而在 $U'(\ni x_0)$ 中 gu 等于 u.

选取一个数 $\varepsilon>0$，使得集合

$$V_\varepsilon=\{x\in\mathbf{R}^n;\ d(x,\ \mathbf{R}^n\backslash U')>\varepsilon\}$$

是 x_0 的一个邻域. 令 $\zeta_\varepsilon(x)$ 是另一个截断函数，当 $|x|<\varepsilon/2$ 时它等于 1，当 $|x|>\varepsilon$ 时它等于零，并且 $\zeta_\varepsilon\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$. 我们有

$$E*v=(\zeta_\varepsilon E)*v+[(1-\zeta_\varepsilon)E]*v.$$

其中第二项 $[(1-\zeta_\varepsilon)E]*v$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的 C^∞ 函数，因为由我们的假设，$(1-\zeta_\varepsilon)E$ 是一C^∞ 函数，并且因为一个具有紧支集的广义函数，这里是 v，与任一C^∞ 函数的卷积是一C^∞ 函数. 另一方面，由卷积的标准性质，

$$\operatorname{supp}[(\zeta_\varepsilon E)*v]\subset\operatorname{supp}(\zeta_\varepsilon E)+\operatorname{supp}v.$$

由 ζ_ε 的选取我们知道，$(\zeta_\varepsilon E)*v$ 的支集包含在 $\operatorname{supp}v$ 的 ε 级邻域中. 我们已经知道在 U' 中 $v=0$. 因此得到结论：$(\zeta_\varepsilon E)*v$ 在 V_ε 等于零，因而得到，$E*v$ 是 V_ε 中的一个 C^∞ 函数. 证毕.

我们已经看到了基本解的两个重要的应用．在下一节中我们要研究它的第三个应用——它与基本解在定理2.1中的应用有密切关系．在下一节以后的几节中，我们将明确地算出§1的几个基本例子中的某些值得注意的基本解．

习 题

2.1 考虑平面中的下述方程：

$$x\frac{\partial u}{\partial y}-y\frac{\partial u}{\partial x}=f(x^2+y^2), \tag{2.13}$$

其中，$f(t)$ 是实变量 t 的一个 C^∞ 函数，使得

$$f(t)=0 \text{ 当 } t<1 \text{ 或 } t>2 \text{ 时}, \quad f\left(\frac{3}{2}\right)=1.$$

证明，方程(2.13)在 $\mathbf{R}^2\setminus\{0\}$ 中没有广义函数解．［提示：通过引进被假设为满足(2.13)的 u，重新改写 $\iint|f(x^2+y^2)|^2dxdy$.］

2.2 令 Ω 是 $\mathbf{R}^n(n>1)$的一个非空开子集，L 是 Ω 中的一个具有实 C^∞系数的一阶线性偏微分算子．利用习题1.4证明，L 在 Ω 中不会是次椭圆的．

2.3 考虑下述方程：

$$(\partial/\partial x)^2u-(\partial/\partial y)^2u+\lambda(x, y)u=0, \tag{2.14}$$

其中，λ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的一个 C^∞ 函数．证明，(2.14)在 $\mathbf{R}^2$ 中不是次椭圆的．

2.4 令 $P(D)$表示 $\mathbf{R}^n$ 中的一个常系数线性偏微分算子，E 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个广义函数，使得

$$h=P(D)E-\delta$$

是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个 C^∞ 函数．适当修改定理2.1的证明，证明，如果 E 在原点的余集中是一 C^∞ 函数，则 $P(D)$在 $\mathbf{R}^n$ 中是次椭圆的．

2.5 把定义2.1推广到方程组（确定的，超定的，欠定的），证明，梯度（§1.6）是次椭圆的（在 $\mathbf{R}^n$ 的任一开子集中），而散度（§1.7）不是次椭圆的，除非 $n=1$.

2.6 构造 $\mathbf{R}^1$ 中的算子 $d/dx, d/dx-\lambda, d^2/dx^2-\lambda(\lambda\in\mathbf{C})$的所有基本解．利用这些基本解，以及习题1.5中的变量变换，找出 $\partial^2/\partial x^2-\partial^2/\partial y^2$（在$\mathbf{R}^2$中）的一个基本解．

2.7 证明，对于齐次 Schrödinger 方程（§1.5）

$$\frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\text{在 } \mathbf{R}^2 \text{ 中}), \tag{2.15}$$

通过令

$$u(x, t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp[i(\tau^2x-\tau t)]w(\tau)d\tau, \tag{2.16}$$

我们可以得到它的一族解. 适当选取 w, 给出(2.15)的一个解, 它不是 $\mathbf{R}^n$ 中的 C^∞ 函数.

2.8 证明,对于 $\mathbf{R}^{n+1}(n>0$ 任意)中的波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\Delta_x u \tag{2.17}$$

的某些解,存在着一个类似于(2.16)的积分表示式. 证明,对于任何 $n>0$,方程(2.17)不会是次椭圆的.

2.9 令 $P(D)$, $Q(D)$是 $\mathbf{R}^n$ 中的两个常系数线性偏微分算子. 证明, 积 $P(D)Q(D)$是次椭圆的, 当且仅当 $P(D)$ 和 $Q(D)$ 都是次椭圆的. 如果 P 和 Q 有变系数,我们能叙述什么事实?

2.10 令 $P(D)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个常系数微分算子, 它有一个在原点的余集中是 C^∞ 的基本解 E. 令 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个开子集, 并用 $\mathcal{N}_\Omega$ 表示齐次方程 $P(D)h=0$ 的广义函数解的空间[由定理 2.1, $\mathcal{N}_\Omega\subset C^\infty(\Omega)$]. 证明,$\mathcal{N}_\Omega$ 上的下述一些拓扑是相同的: (i)C^∞ 拓扑(函数序列和它们的所有导数在 Ω 的每个紧子集上的一致收敛); (ii)C^0 拓扑(函数序列在 Ω 的每个紧子集上的一致收敛); (iii)由 $\mathscr{D}'(\Omega)$所诱导的拓扑(函数集合 $\{f_\alpha\}\subset\mathcal{N}_\Omega$ 收敛, 如果对于任何试验函数 $\phi\in C_c^\infty(\Omega)$, 积分 $\int f_\alpha\phi dx$ 在 $C_c^\infty(\Omega)$ 的有界子集上一致收敛; 只需考虑序列 f_α, 这样就要求对于每个 ϕ, 此积分序列收敛).

2.11 从习题2.10中所叙述的结果推导下述结果(我们用与习题2.10中相同的记号,并作同样的假设): 如果 $P(D)$是次椭圆的,并且如果$\{f_\alpha\}$是齐次方程 $P(D)f=0$ 在 Ω 中的一个解的集合, 它在 Ω 的每一紧子集上是(与 α 无关地)有界的,那么,它包含一个在 $C^\infty(\Omega)$ 中收敛的子序列.

如果我们不作$\{f_\alpha\}$在 Ω 的每一紧子集上有界的假设, 而假设: 对于每个试验函数 $\phi\in C_c^\infty(\Omega)$,存在一个常数 $C(\phi)>0$,使得对于所有的指标 α,有

$$\left|\int f_\alpha\phi dx\right|\leqslant C(\phi),$$

那么,上述结论还成立吗?

3. 解的解析性

再一次回到常系数线性常微分方程上来. 我们已经指出, 如

果右端 f 是光滑的，即，是一 C^∞ 函数，那么它的所有的解也是光滑的．事实上还不仅如此：如果 f 是一个解析函数，那么它的所有的解也将是解析的．我们回忆一下：开集 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 中的复值函数 u 是解析的，如果它在 Ω 的任一点处的 Taylor 展式是收敛的，即，Taylor 展式有正的收敛半径(参阅下面的定义 3.2)．等价的定义是，u 可延拓到 $\mathbf{C}^n$ 中 Ω 的一个开邻域上，而成为复变量 $z^1, \cdots, z^n$ 的一个解析函数，或者，如我们经常说的，成为一个全纯函数．

显然，一个任意的常系数线性偏微分方程不具有这个性质，即，当右端是一解析函数时，方程的所有解是解析的：波动方程不具有这个性质(参阅例 2.2)；热导方程也不具有这个性质，下面就要指出这一点(例 3.1)．但是，对于 Laplace 方程和 Cauchy-Riemann 方程，它是成立的．事实上，我们确切地知道哪一些常系数的线性偏微分方程是具有这个性质的．它们是椭圆方程．然而，也有一些有这个性质的变系数的非椭圆方程．并不涉及椭圆性的含义，上述性质导致一个新的定义：

定义 3.1　(参阅定义 2.1) Ω 中的一个线性偏微分算子 P 称为是解析次椭圆的，如果给定 Ω 的任一开子集 U 和 U 中任一广义函数 u，当 Pu 是 U 中的解析函数时，u 亦然．

例 3.1　热导方程不是解析次椭圆的．

只需考察只有一个空间变量的情形：

$$L=\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

在集合 $U=\{(x, t)\in\mathbf{R}^2; x\neq 0\}$ 中定义下述函数 $F(x, t)$：

$$F(x, t)=\begin{cases} t^{-1/2}\exp(-x^2/4t), & \text{当 } t>0 \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } t\leqslant 0 \text{ 时}. \end{cases}$$

立刻可以验证：(i) $F(x, t)$ 是整个集合 U 中的一个 C^∞ 函数，(ii) 在 U 中 $LF=0$，(iii) F 不是 U 中的一个解析函数．如果我们回想起下述事实，那么论断(iii)就是显然的；这个事实是：一个解析函数，如果它在它的定义域 U 的某个开子集 U_0 中等于零(这里，U_0 是 U 中 $t<0$ 的那一部分)，那么它在 U 的每一连通分支中也等

于零，这些分支与 U_0 的交集是非空的．在我们现在的情形，这些分支的并集是 U 本身．

现在假设，$P(D)$ 是一个常系数的解析次椭圆的线性偏微分算子，并令 E 是它的任一基本解；因为在 $\mathbf{R}^n\setminus\{0\}$ 中 $P(D)E=0$，所以在 $\mathbf{R}^n\setminus\{0\}$ 中 E 必定是一个解析函数(参阅定义 3.2)． 事实上，其逆亦真，它是定理 2.1 的类似：

定理 3.1 如果存在 $P(D)$ 的一个基本解 E，它是 $\mathbf{R}^n\setminus\{0\}$ 中的解析函数，那么 $P(D)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 中是解析次椭圆的．

证明 从定理 2.1 我们知道，$P(D)$ 是次椭圆的(这样，每个解析次椭圆的常系数线性偏微分算子是次椭圆的)．只需证明，如果 U 是 $\mathbf{R}^n$ 的任一开子集，u 是 U 中任一C^∞ 函数，使得 $P(D)u=f$ 在 U 中是解析的，那么 u 在 U 中也是解析的．我们在 U 的一个任意点 x_0 的邻域中讨论．虽然不是很必要，我们还是利用 Cauchy-Kovalevska 定理的一个推论来简化我们的推理 (参阅 § 17；不熟悉 Cauchy-Kovalevska 定理的读者，在下面要用到的时候不妨先承认它的这个推论)，这个推论是，如果 x_0 的开邻域 $W\subset U$ 充分小，那么在W中存在一个解析函数 h，它在W中满足方程 $P(D)h=f$．这样，在W中我们有 $P(D)(u-h)=0$，因此只需证明，在 x_0 的一邻域中 $u-h$ 是解析的．令 U' 是 x_0 的一个开邻域，它的闭包是紧的并包含在W中，并令 $g\in C_c^\infty(W)$，它在 U' 中等于 1．置

$$v=P(D)[g(u-h)],$$

由此得到

$$g(u-h)=E*v.$$

我们注意到，在 U' 中 $v=0$．我们必须证明，在 x_0 的某邻域中，$E*v$ 是解析的．我们利用定理 2.1 证明中的那个截断函数 ζ_ε，并写出

$$E*v=(\zeta_\varepsilon E)*v+[(1-\zeta_\varepsilon)E]*v.$$

其中第一项在 x_0 的邻域 $V_\varepsilon=\{x; d(x, \mathbf{R}^n\setminus U')>\varepsilon\}$ ($\varepsilon>0$ 充分小)中等于零；因此只需证明，第二项在 V_ε 中是解析的．我们利用解析函数的下述刻划：

定义 3.2 $\mathbf{R}^n$ 的开子集 O 中的 C^∞ 函数 φ 是解析的，如果对于 O

的每个紧子集 K，存在常数 $r_K>0$，使得

$$\sup \frac{1}{\alpha!} r_K^{|\alpha|} |D^\alpha \varphi(x)| < +\infty, \tag{3.1}$$

其中，上确界是对 K 的所有点 x 和非负整数的所有 n 数组 α 而计算的.

因为 v 是一个有紧支集的 C^∞ 函数，因此，$w=[(1-\zeta_\varepsilon)E]*v$ 是一个 C^∞ 函数. 我们有

$$D^\alpha w=\{D^\alpha[(1-\zeta_\varepsilon)E]\}*v=[(1-\zeta_\varepsilon)D^\alpha E]*v+T*v.$$

由 Leibniz 公式知道，T 的支集包含在 ζ_ε 的梯度的支集中，因而，在 V_ε 中 $T*v=0$. 另一方面，在整个空间 $\mathbf{R}^n$ 中 $(1-\zeta_\varepsilon)D^\alpha E$ 是一 C^∞ 函数. 因而，当 $x\in V_\varepsilon$ 时，

$$D^\alpha w(x)=\int[1-\zeta_\varepsilon(y)]D^\alpha E(y)v(x-y)dy.$$

这个积分可以限制在集合

$$K=\{y\in\mathbf{R}^n;\ |y|\geqslant\varepsilon/2,\ y\in\overline{V}_\varepsilon-\operatorname{supp} v\}$$

上. 这里，K 显然是 $\mathbf{R}^n\backslash\{0\}$ 的一个紧子集，而 E 在 $\mathbf{R}^n\backslash\{0\}$ 中是解析的；因而可以在(3.1)中以 E 代替 φ（并以 y 代替 x）. 这样就得到

$$\frac{1}{\alpha!} r_K^{|\alpha|} |D^\alpha w(x)| \leqslant C \sup_{y\in K}\left\{\frac{1}{\alpha!} r_K^{|\alpha|} |D^\alpha E(y)|\right\}\int |v(y)|dy,$$

其中，x 是 V_ε 中的任一点，$C=1+\sup_{\mathbf{R}^n}|\zeta_\varepsilon|$. 由此立刻得到：$w$ 在 V_ε 中是解析的. 　　证毕.

在下面几节中，我们将计算常系数常微分方程，Laplace 方程和 Cauchy-Riemann 方程的某些基本解. 将会看到，这些基本解在原点的余集中都是解析的. 这样，就得到结论：这些方程都是解析次椭圆的. 关于 Laplace 方程的这个结果，长期以来被称为 *Weyl* 引理.

习　题

3.1　利用 $\mathbf{R}^2$ 中的 Cauchy-Riemann 算子是解析次椭圆的这一事实，推导，$\mathbf{R}^2$ 中的算子

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}+c(x, y)$$

是解析次椭圆的，其中，$c(x, y)$ 是平面中的一个解析函数.

3.2 令 $P(D)$ 表示 $\mathbf{R}^n$ 中一个常系数线性偏微分算子，E 是 $\mathbf{R}^n$ 中一个广义函数，使得

$$h=P(D)E-\delta$$

是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个解析函数. 适当地修改定理 3.1 的证明，证明，如果在原点的余集中 E 是一解析函数，那么 $P(D)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 中是解析次椭圆的.

3.3 证明，任一满足平面中齐次波动方程 $u_{xx}-u_{yy}=0$ 的 C^∞ 函数 $u(x, y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 中关于 (x, y) 是解析的，当（且仅当）$u(0, y)$ 和 $u_x(0, y)$ 是 $\mathbf{R}^1$ 中 y 的解析函数时.

3.4 对于每个正数 d，引进下述定义（参阅定义 3.2）：

定义 3.3 $\mathbf{R}^n$ 的开子集 O 中的一个 C^∞ 函数 φ 称为属于 O 中的 d 次 Gevrey 类，记为 $\varphi\in G_d(O)$，如果对于 O 的每个紧子集 K，存在常数 $r_K>0$，使得

$$\sup_{x\in K,\alpha\in \mathbf{Z}_+^n}\left\{\left(\frac{1}{\alpha!}\right)^d r_K^{|\alpha|}\,|D^\alpha\varphi(x)|\right\}<+\infty. \tag{3.2}$$

修改定理 3.1 的证明，证明下述定理：

定理 3.2 假设 $P(D)$ 有一属于 $G_d(\mathbf{R}^n\setminus\{0\})$ 的基本解 E. 那么，给定 $\mathbf{R}^n$ 的任一开子集 U 和 U 中任一广义函数 u，它使得在 U 中 $P(D)u=0$，此时，必定有 $u\in G_d(U)$.

4. 常微分方程的基本解

这一节致力于回忆与常微分方程有关的某些事实以及对这些事实按照偏微分方程理论的解释，我们只限于考虑常系数的常微分方程. 以后我们将考虑变系数的常微分方程.

最简单的非平凡的常微分算子是具有形式

$$L=\frac{d}{dx}-a, \quad a\in \mathbf{C}$$

的一阶算子. 我们要找常微分方程

$$\frac{dF}{dx}-aF=\delta \tag{4.1}$$

的解 F. 当 $a=0$ 时，它的回答是众所周知的. 它是广义函数的导

数的最初几个例子中的一个，即，*Heaviside* 函数 $H(x)$ 的导数是 Dirac 广义函数；这里，当 $x>0$ 时 $H(x)=1$，当 $x<0$ 时 $H(x)=0$. 为了得到 $F'=\delta$ 的所有的解，只需对 H 加上任一常数函数. 然而，映射

$$F\mapsto e^{-ax}F$$

把(4.1)的解变为 $F'=\delta$ 的解. 因此，通过施行逆变换，我们就看到，(4.1)的所有解由

$$F=E+Ce^{ax} \tag{4.2}$$

(4.2)[†]

给出；其中，C 是一任意复常数，$E=H(x)e^{ax}$. 注意，当 $C=0$ 时，$F=E$ 是支集在非负半直线中的 L 的唯一基本解. 当 $C=-1$ 时，F 是支集在非正半直线中的 L 的唯一基本解. 当 $C=-\dfrac{1}{2}$ 时，我们得到"对称的"基本解

$$F=\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(x)e^{ax},$$

其中 $\operatorname{sgn}(x)$ 表示 x 的正负号(signum)函数，当 $x>0$ 时它等于 $+1$，当 $x<0$ 时它等于 -1 (作为一个广义函数，当 $x=0$ 时它不需要被定义).

我们还注意到，$U=e^{ax}$ 是初始值问题

$$U'-aU=0,\qquad U|_{x=0}=1 \tag{4.3}$$

的唯一解，因此，我们有

$$E=HU.$$

虽然这个例子可能显得过于简单，但是只需对它进行简单的加工，即可构作常微分方程的所有基本解，同样地，也可构作许多偏微分方程的重要的基本解.

首先，我们指出，上面的推理可以直接推广到确定的一阶常微分方程组. 假设我们考虑 p 个未知函数 p 个方程的方程组. 这意味着，代替 L，我们研究矩阵常微分算子

---

† 这些基本解在原点的余集中都是解析的；因而，由定理 3.1，微分算子 L 是解析次椭圆的. 特别，齐次方程 $Lh=0$ 的所有广义函数解都是"古典"解，因此，(4.2)给出了(4.1)的所有广义函数解.

$$\boldsymbol{L}=I\frac{d}{dx}-A,$$

其中 I 是 $p\times p$ 单位矩阵，A 是任一（具有复元素的）$p\times p$ 矩阵．这样，$\boldsymbol{L}$ 作用在取值于 $\mathbf{C}^p$（复的 p 向量空间）中的函数上，并把这些函数变为仍取值于 $\mathbf{C}^p$ 中的函数(或广义函数)．不过要记住，所有这些函数和广义函数都是定义在实直线(我们仍用 x 表示其中的变量)的区间中的．必须适当地推广问题(4.3)：现在，U 表示一个矩阵值函数，即问题

(4.4) $$\boldsymbol{L}U=0,\quad U|_{x=0}=I\quad(p\times p\text{ 单位矩阵})$$

的解．立刻知道(4.4)的唯一解是

$$U=e^{xA}.$$

现在令 K 表示一个取值在 $p\times p$ 矩阵空间中的任意的广义函数，或者等价地，表示一个 $p\times p$ 矩阵，它的元素是广义函数．由 Leibniz 公式，我们有

$$\boldsymbol{L}(UK)=(\boldsymbol{L}U)K+UK'=UK'.$$

这样，如果要解 $\boldsymbol{L}(UK)=\delta I$——这相应于求 $\boldsymbol{L}$ 的右基本解，我们就必须解

$$K'=\delta U^{-1}=\delta e^{-xA}=\delta I.$$

这样，就归结为求

(4.5) $$K'=\delta I$$

的解．在纯量的情形，即当 $p=1$ 时，我们已经指出，(4.5)的解是众所周知的：它们是形如 $H(x)+C$ 的广义函数，其中 H 是 Heaviside 函数，C 是一任意常数．它引导我们得到 L 的基本解 E 和表达式(4.2)．当 p 是任意的时候，相同的考虑也适用：(4.5)的所有解具有形式

$$K=H(x)I+C,$$

其中，C 现在是一个 $p\times p$ 常数矩阵．注意，$H(x)I$ 是 $p\times p$ 对角矩阵，它的对角线元素都等于 Heaviside 函数．这样，我们就得到了 $\boldsymbol{L}$ 的所有右基本解．它们是形为

(4.6) $$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{E}+e^{xA}C$$

的矩阵值广义函数，其中

(4.7) $$\boldsymbol{E}=H(x)e^{xA}$$

是 $\boldsymbol{L}$ 的支集在非负半直线中的唯一基本解.

我们已经用了基本解和右基本解的名称. 其理由是, 常系数常微分方程组兼有右基本解和左基本解. 例如, $\boldsymbol{L}$ 的一个左基本解是一个广义函数 $\boldsymbol{G}$, 它使得

(4.8) $$\boldsymbol{G}'-\boldsymbol{G}A=\delta,$$

而由(4.6)给出的广义函数 $\boldsymbol{F}$ 满足

(4.9) $$\boldsymbol{F}'-A\boldsymbol{F}=\delta.$$

如果 $\boldsymbol{F}$ 是一个右基本解, T 是任一具有紧支集的广义函数, 则

$$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{F}*T)=T,$$

而如果 $\boldsymbol{G}$ 是 $\boldsymbol{L}$ 的一个左基本解, 则我们有

$$\boldsymbol{G}*\boldsymbol{L}T=T.$$

$\boldsymbol{L}$ 的所有左基本解由

(4.10) $$\boldsymbol{G}=\boldsymbol{E}+Ce^{xA}$$

给出, 其中 $\boldsymbol{E}$ 由(4.7)给出, C 是任意的 $p\times p$ 常数矩阵. 存在着 $\boldsymbol{L}$ 的双侧的基本解, 例如, (4.7)中的 $\boldsymbol{E}$, 并且, 一般说来是有很多的(参阅习题4.1).

下一步是把上面的推理推广到高阶的常系数常微分方程上去. 因而, 我们考虑算子

$$L=\frac{d^m}{dx^m}+a_1\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}+\cdots+a_m.$$

首先, 用通常的方法, 也就是令

(4.11) $$u_1=u,\quad u_k=\frac{d^{k-1}u}{dx^{k-1}},\qquad k=2,\ \cdots,\ m,$$

把方程 $Lu=f$ 变为一个一阶组. 此时, 方程 $Lu=f$ 被改写为

(4.12) $$u'_m+a_1u_m+a_2u_{m-1}+\cdots+a_mu_1=f.$$

把这个方程与从(4.11)得来的方程

(4.13) $$u'_k=u_{k+1},\qquad k=1,\ \cdots,\ m-1$$

联立起来. 此时, 用 M 表示 $m\times m$ 矩阵

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_m & -a_{m-1} & -a_{m-2} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}.$$

最后，用 $\mathbf{u}$ 表示分量为 $u_1, \cdots, u_m$ 的向量(即一列的矩阵)，并用 $\mathbf{f}$ 表示分量为 $f_1=0, \cdots, f_{m-1}=0, f_m=f$ 的向量．那么可以把方程(4.12)和(4.13)一起写为方程组形式：

(4.14) $$\frac{d\mathbf{u}}{dx}=M\mathbf{u}+\mathbf{f}.$$

现在假设，对于给定的 $\mathbf{f}$，我们找到(4.14)的一个解 $\mathbf{u}$．这意味着(4.12)和(4.13)成立．此时，把(4.13)，或者把与它等价的形式(4.11)(其中 $u=u_1$ 确定出 u)代入(4.12)，立即导致 $Lu=f$.

如果要找 L 的一个基本解 E，那么试图在 $f_j=0$(当 $j<m$ 时)和 $f_m=\delta$(Dirac 广义函数)时解(4.14)是唯一自然的途径．我们或多或少象处理一个一般的方程组那样来进行．令

$$\mathbf{u}=e^{xM}\mathbf{v},$$

它把(4.14)变为

(4.15) $$\frac{d\mathbf{v}}{dx}=e^{-xM}\mathbf{f}.$$

为了确定(4.15)的右端的值，只需注意 $\mathbf{f}=\delta\mathbf{e}_m$，其中，$\mathbf{e}_m$ 是第 m 个分量等于 1，其余分量等于零的向量．因而

$$e^{-xM}\mathbf{f}=\delta(e^{-xM}\mathbf{e}_m)\big|_{x=0}=\delta\mathbf{e}_m.$$

这样，(4.15)就化为

(4.16) $$\frac{d\mathbf{v}}{dx}=\delta\mathbf{e}_m.$$

而(4.16)的所有解是容易找到的；它们是

(4.17) $$\mathbf{v}=H(x)\mathbf{e}_m+\mathbf{c},$$

其中 $\mathbf{c}$ 是一个 m 常数向量．因而

(4.18) $$\mathbf{u}=H(x)e^{xM}\mathbf{e}_m+e^{xM}\mathbf{c}.$$

$\mathbf{u}$ 的表达式中的第二项相应于齐次方程组

(4.19) $$\frac{d\mathbf{w}}{dx}=M\mathbf{w}$$

的解. 这样一个解 $\mathbf{w}$ 的特殊情形是 $e^{xM}\mathbf{e}_m$; 事实上, 它是使得

(4.20)　　$w_j=0$ 如果 $j<m$;　$w_m=1$ 当 $x=0$ 时

成立的唯一的解. 令 $U(x)=w_1(x)$. 如果回想到 $w_k=(w_1)^{(k-1)}$, $k=2, \cdots, m$, 我们就知道, $U(x)$ 是方程

(4.21)
$$LU=0$$

的满足

(4.22)　　$U^{(j)}=0$　如果 $j<m-1$;　$U^{(m-1)}=1$　当 $x=0$ 时

的唯一解. 取向量值函数(4.18)的第一个分量 u_1, 就得到 L 的所有的基本解. 换句话说, 它们都具有下述形式:

(4.23)
$$F=E+h,$$

其中 $Lh=0$, 并且

(4.24)
$$E=HU.$$

现在, 我们已回到了原来的地方, 并得到了 L 的支集在非负半直线中的唯一基本解, 它是 Heaviside 函数与齐次方程的一个值得注意的解, 即满足*初始条件*(4.22)的解的乘积——正象在单个一阶方程的情形中一样.

注意, 我们已经构造的所有的基本解在 $\mathbf{R}^n\setminus\{0\}$ 中都是解析的, 因而, 在这一节中所考虑的所有方程都是解析次椭圆的.

还注意, 在上面的讨论中, 我们不需要了解矩阵 A 或 M 的特征值的情况. 我们还应该强调我们已遇到过的在基本解结构和初始值问题(4.21)—(4.22)之间的联系. 这个联系支配着某些线性偏微分方程(例如波动方程)的理论.

习　　题

4.1　令 I 表示 $p\times p$ 单位矩阵, A 表示一个 $p\times p$ 复矩阵. 描述常微分算子组 $\mathbf{L}=Id/dx-A$ 的所有的双侧基本解.

4.2　令 $I, A_1, \cdots, A_m$ 表示 $m+1$ 个 $p\times p$ 矩阵, I 表示单位矩阵. 描述算子

$$\mathbf{L}=I\left(\frac{d}{dx}\right)^m+A_1\left(\frac{d}{dx}\right)^{m-1}+\cdots+A_m$$

的所有的基本解.

4.3 描述习题 4.2 中的微分算子 $\boldsymbol{L}$ 的所有双侧基本解。

4.4 通过把 $\boldsymbol{L}$ 变为一个确定的一阶常微分算子组，人们能否解习题 4.2 中的问题？如果你认为能解，请描述其过程. 否则，说明为什么这是不可能的.

4.5 令 $\boldsymbol{L}$ 表示习题 4.1 中的算子. 关于矩阵 A，给出一个使得下述事实成立的充要条件：$\boldsymbol{L}$的支集在非负半直线中的基本解是一个(1)有界函数；(2)在无穷远处速降的函数.

4.6 关于矩阵 A，给出一个使得下述事实成立的充要条件：习题 4.1 中的算子 $\boldsymbol{L}$ 有一个基本解，它在实直线的无穷远处是速降的.

4.7 给出算子

$$L=\frac{d^2}{dx^2}-k^2 \quad (k\in\mathbf{R})$$

的基本解的表达式，此基本解的支集是非负半直线. 当用 $\sqrt{-1}k$ 代替 k 后，做同一练习.

4.8 令 U 是问题(4.21)—(4.22)的解，H是 Heaviside 函数，L 是(4.21)中的常微分算子. 由直接计算，证明

$$L(HU)=\delta.$$

4.9 令 $\boldsymbol{L}$ 表示习题 4.1 中的算子，$\chi_A(z)=\det(z\boldsymbol{I}-A)$ 表示 A 的特征多项式. 证明，齐次方程 $\mathbf{Lu}=0$ 的解是分量 u_i 满足方程 $\chi_A(d/dx)u_i=0$ 的向量值函数 $\mathbf{u}$. 反之，令 $\mathbf{u}$ 是任一具有这个性质的向量值函数；证明，存在一个 $p-1$ 阶的 $p\times p$ 常系数常微分算子组 M，使得 $M\mathbf{u}$ 是 $\mathbf{Lv}=0$ 的一个解. 在一般情形中，确切地描述 M.

4.10 令 $\boldsymbol{L}$ 表示习题 4.1 中的算子. 令 $\boldsymbol{\Gamma}$ 是一个可逆的 $p\times p$ 矩阵. 那么，在 $\mathbf{Lh}=0$ 的解空间和 $\boldsymbol{L}_{\Gamma}\mathbf{h}=d\mathbf{h}/dx-\Gamma A\Gamma^{-1}\mathbf{h}=0$ 的解空间之间有一个自然的线性同构. 描述这个同构. 其次，把 A 写为 $A=S+N$，其中 S 是一个可对角化的 $p\times p$ 矩阵，N 是一个 $p\times p$ 幂零矩阵(即，使得 $N^p=0$)，使得 $SN=NS$. 分别在 $S=0$ 和 $N=0$ 这两种情形中研究方程 $\mathbf{Lh}=0$：(1)当 $N=0$ 时，证明，这个方程等价于(在某种明确的意义下)p 个纯量一阶常微分方程

$$\frac{dw}{dx}-\lambda_i w=0, \quad 1\leqslant i\leqslant p,$$

其中 λ_i 是 A 的特征值(按照它们的重数重复计算)；(2)当 $S=0$ 时，证明，刚才给出的方程 $\mathbf{Lh}=0$ 的所有解都具有 $\mathbf{g}(x)$ 的形式，这里 $\mathbf{g}$ 是一个次数 $<p$ 的向量值多项式. 明确地描述，$\mathbf{g}$ 如何被它在 $x=0$ 处的值 $\mathbf{g}(0)$ 所确定.

利用上面的讨论，确切地描述在一般情形中（当 S 和 N 都不一定为零时）$\mathbf{L}\mathbf{h}=0$ 的所有的解.

4.11　令 $\mathscr{D}'_+$ 表示实直线上这样的广义函数的空间，对于变量（用 t 表示）的严格负值，这些广义函数等于零. 证明，任意两个广义函数 $S, T\in\mathscr{D}'_+$ 的卷积总是有意义的[可以用公式

$$\langle S*T,\ \phi\rangle=\langle S_s,\ \langle T_t,\ \phi(s+t)\rangle\rangle,\quad \phi\in C_c^\infty(\mathbf{R}^1) \tag{4.25}$$

定义卷积 $S*T$]. 证明，$\mathscr{D}'_+$ 是一个具有单位元 Dirac 测度 δ 的交换卷积代数.

令 L 是一个常系数的 m 阶常微分算子（系数不全为零）. 证明，$L\delta$ 在卷积代数 $\mathscr{D}'_+$ 中有一逆元素. 计算这个逆元素. 由此推导，方程 $LU=F$ 对于每个 $F\in\mathscr{D}'_+$ 有一个唯一的解 $U\in\mathscr{D}'_+$，并用 F 表示 U.

4.12　令 $\mathbf{L}$ 是习题 4.1 中所述的算子. 用公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\langle \mathbf{L}\mathbf{u},\ \mathbf{v}\rangle dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\langle \mathbf{u},\ {}^t\mathbf{L}\mathbf{v}\rangle dx,\quad \mathbf{u},\ \mathbf{v}\in C_c^\infty(\mathbf{R}^1;\mathbf{C}^\nu) \tag{4.26}$$

定义 $\mathbf{L}$ 的转置算子 ${}^t\mathbf{L}$. 给出 ${}^t\mathbf{L}$ 的表达式，并叙述 ${}^t\mathbf{L}$ 的左、右基本解与 $\mathbf{L}$ 的左、右基本解的关系.

5. Cauchy-Riemann 算子的基本解

考虑 (x, y) 平面 $\mathbf{R}^2$ 中的方程：

$$\frac{\partial E}{\partial x}+i\frac{\partial E}{\partial y}=\delta. \tag{5.1}$$

我们将用关于变量 y 的 *Fourier* 变换把它变为一个常微分方程. 如果 f 是 x, y 的一个函数，令

$$\tilde{f}(x,\ \eta)=\int e^{-iy\eta}f(x,\ y)dy. \tag{5.2}$$

这只对于某些适当的 f 有意义. 这里，我们将用广义函数意义下的 Fourier 变换，即，作用在关于 y 为缓增的广义函数上的Fourier 变换. 我们回忆一下，它们就是这样的广义函数，它等于 y 的连续函数（关于 y）的导数的有限和，在无穷远处它的增长慢于某个幂 $|y|^k$. 在缓增广义函数空间 $\mathscr{S}'_y$ 上，Fourier 变换是一个线性同构. 它的逆变换拓广了由古典 *Fourier* 反演公式所定义的作用在函数

上的变换. 在我们这里考虑的这种类型的函数上, 它为

$$f(x, y)=\frac{1}{2\pi}\int e^{iy\eta}\tilde{f}(x, \eta)d\eta. \tag{5.3}$$

注意, (5.1) 的右端是在 $\mathbf{R}^2$ 中原点处的 Dirac 广义函数 $\delta(x, y)$. 它关于 y 的 Fourier 变换等于 $\delta(x)1(\eta)$, 其中 $1(\eta)$ 表示恒等于 1 的 η 的函数. 为了简单起见, 我们将用 $\delta(x)$ 代替 $\delta(x)1(\eta)$. 如果对 (5.1) 的两端施行 Fourier 变换, 就得到

$$\frac{\partial\tilde{E}}{\partial x}-\eta\tilde{E}=\delta(x). \tag{5.4}$$

这是一个 (4.1) 型的一阶微分方程. 我们知道它的所有基本解——它们由 (4.2) 给出. 然而, 在这里常数 C 不一定与 η 无关. 这样就得到

$$\tilde{E}=(H(x)+C(\eta))e^{\eta x}. \tag{5.5}$$

这里, 产生了一个要紧的问题: 我们是对 E, 而不是对它关于 y 的 Fourier 变换 $\tilde{E}$ 感兴趣. 因而要计算 $\tilde{E}$ 的 Fourier 逆变换. 但是这只在 $\tilde{E}$ 关于 η 是缓增的时候才是可能的. 对于 $x>0$, 当 $\eta\to+\infty$ 时 $e^{\eta x}$ 不是缓增的; 对于 $x<0$, 当 $\eta\to-\infty$ 时 $e^{\eta x}$ 不是缓增的. 幸好有"常数" $C(\eta)$, 可用它来校正 $H(x)e^{\eta x}$ 的增长. 做法如下: 选取

$$C(\eta)=\begin{cases}-1, & \text{当 } \eta>0 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } \eta<0 \text{ 时}.\end{cases} \tag{5.6}$$

这意味着

$$\tilde{E}=\begin{cases}-H(-x)e^{\eta x}, & \text{当 } \eta>0 \text{ 时},\\ H(x)e^{\eta x}, & \text{当 } \eta<0 \text{ 时}.\end{cases} \tag{5.7}$$

注意, 当 $x\neq 0$ 时, $\tilde{E}$ 是 η 的一个在无穷远处非常快速衰减的函数. 由公式 (5.3), 我们可以计算它的 Fourier 逆变换:

$$(2\pi)E(x, y)=H(x)\int_{-\infty}^{0}e^{(x-iy)\eta}d\eta-H(-x)\int_{0}^{+\infty}e^{(x+iy)\eta}d\eta$$

$$=\frac{1}{x+iy}.$$

当 $x\neq 0$ 时, 这是有效的. 但是我们注意, 在平面中函数 z^{-1} 是局部可积的 $(z=x+iy)$. 事实上, 与其可积性有关的唯一的问题是在原点的邻域中. 转换到极坐标 r, θ, 我们必须验证 $(1/r)e^{-i\theta}$ 关于

$rdrd\theta$ 的(局部)可积性；而这是显然的. 再者，z^{-1} 在无穷远处趋于零. 因而，它确实是一个缓增广义函数，它关于 y 的 Fourier 变换等于 $(2\pi)\widetilde{E}$. 我们已经得到了结论：$1/2\pi z$ 是(5.1)的一个解. 回忆起 Cauchy-Riemann 算子是

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

我们就可以叙述

定理 5.1 局部可积函数 $1/\pi z$ 是 Cauchy-Riemann 算子 $\partial/\partial \bar{z}$ 的一个基本解.

现在就很容易描述 $\partial/\partial \bar{z}$ 的所有的基本解了. 事实上，$(\pi z)^{-1}$ 在 $\mathbf{R}^2\backslash\{0\}$ 中是 (x, y) 的解析函数；因而，由定理 3.1，$\partial/\partial \bar{z}$ 是解析次椭圆的. 因此，齐次 Cauchy-Riemann 方程的所有广义函数解都是"古典"解，事实上是 C^∞ 函数，因而是全纯函数. 这样，我们有

推论 5.1 $\partial/\partial \bar{z}$ 的每个基本解具有形式 $1/\pi z+h$，其中 h 是一个整函数.

我们回忆一下，$z(\in \mathbf{C})$ 的一个整函数是一个在全平面中为全纯的函数.

现在来推导齐次的和非齐次的 *Cauchy* 公式. 令 Ω 是 $\mathbf{C}$ 的一个有界的开子集. 假设 Ω 的边界是有限多条不相交的 *Jordan* 曲线的并集；所谓 Jordan 曲线，就是自身不相交的、闭的可求长曲线. 还假设，局部地，Ω 位于其边界 $\partial\Omega$ 的一侧：$\partial\Omega$ 的每个点有一个开邻域 U，使得 $U\backslash\partial\Omega$ 由两个开的连通分支组成，它们中只有一个是包含在 Ω 中的. 这就排除了 Ω 是 $\{z;\ |z|<1,\ \operatorname{Im} z>0\}$ 和 $\{z;\ |z|<1,\ \operatorname{Im} z<0\}$ 这样两个半圆盘的并集的可能性. 然后假设在 $\bar{\Omega}$ 的一个开邻域中

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}=f, \tag{5.8}$$

这里，u 和 f 都定义在这个开邻域中，并且，不妨设它们都是一次连续可微的(甚至是 C^∞ 的：我们将要得到的公式显然将推广到较大的一个函数类). 令 $\chi=\chi_\Omega(x, y)$ 表示 Ω 的特征函数，它在 Ω 中等于 1，在其它各处等于零. 由 Leibniz 公式，从(5.8)我们推得

(5.9) $$(\partial/\partial\bar{z})(\chi_\Omega u)=\chi_\Omega f+u\{(\partial/\partial\bar{z})\chi_\Omega\}.$$

既然(5.9)的两端都有紧支集，我们就可以写

(5.10) $$\chi_\Omega u=\frac{1}{\pi z}*(\chi_\Omega f)+[u(\partial/\partial\bar{z})\chi_\Omega]*\frac{1}{\pi z}.$$

我们来计算 $(\partial/\partial\bar{z})\chi_\Omega$. 我们知道，它在 Ω 中和在 $\overline{\Omega}$ 外等于零，因而它是一个支集在边界 $\partial\Omega$ 中的广义函数．由于一个显然的理由，它是"均匀分布"的；这就是说，给定 $\partial\Omega$ 的任何两点，它在第一个点(在 $\partial\Omega$ 中）的一邻域中的性状必定与它在第二个点的一个相似邻域中的性状是一样的．然而，这并没有告诉我们它是什么．在某种显然的意义下，χ_Ω 是一个连续依赖于集合 Ω 的测度，而当 $\partial/\partial\bar{z}$ 作用在广义函数上时，它是一个连续线性算子．因而可以用这样的开集来逼近 Ω，它们是有限多个两两不相交的简单的开集（例如三角形或圆盘）的并集．因为 χ_Ω 是 Ω 的一个可加泛函，因此只需在 Ω 是一圆盘时证明我们的公式就可以了．不妨把圆盘的中心取为原点．这时，$\partial\Omega$ 的方程就是 $r=R$，R 是一个大于零的常数．对于任何 $\phi\in C_c^\infty(O)$[1]，利用 $\partial/\partial\bar{z}$ 在极坐标中的表达式，我们有

$$\begin{aligned}\langle(\partial/\partial\bar{z})\chi_\Omega,\ \phi\rangle&=-\langle\chi_\Omega,\ (\partial/\partial\bar{z})\phi\rangle\\&=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^R e^{i\theta}\left(\phi_r+\frac{i}{r}\phi_\theta\right)r\,dr\,d\theta.\end{aligned}$$

我们能够计算得[令 $\tilde{\phi}(r,\ \theta)=\phi(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$]

$$\int_0^R\phi_r r\,dr=\tilde{\phi}(R,\ \theta)R-\int_0^R\tilde{\phi}(r,\ \theta)dr,$$

$$\int_0^{2\pi}e^{i\theta}\phi_\theta d\theta=-i\int_0^{2\pi}\tilde{\phi}(r,\ \theta)e^{i\theta}d\theta,$$

因而，$$\langle(\partial/\partial\bar{z})\chi_\Omega,\ \phi\rangle=-\frac{1}{2}R\int_0^{2\pi}e^{i\theta}\tilde{\phi}(R,\ \theta)d\theta.$$

它可以改写为下述形式：

(5.11) $$\langle(\partial/\partial\bar{z})\chi_\Omega,\ \phi\rangle=-\frac{1}{2i}\oint_{\partial\Omega}\phi(x,\ y)dz.$$

对于在开始时我们所考虑的那种类型的 $\mathbf{R}^2$ 的任意开子集 Ω：$\partial\Omega$ 是有限多条不相交的 Jordan 曲线的并集，以及，局部地，Ω 位于 $\partial\Omega$

1) 译者注：这里，O 是 $\overline{\Omega}$ 的一个邻域，原文误为 $\phi\in C_c^\infty(\Omega)$.

的一侧，公式(5.11)显然有意义．但是我们必须确切地叙述记号 $\oint$ 表示什么：它不会意味着反时针方向，这从 $\Omega=\{z\in\mathbf{C};1<|z|<2\}$ 这一例子不难看出．由于我们的假设，Ω 的边界总是一条光滑曲线，因此我们可以考察它的内法线 N：它的单位向量 $\boldsymbol{\nu}$ 正交于 $\partial\Omega$ 的切线 T，并指向 Ω 的内部．此时，$\partial\Omega$ 的定向是这样的：角 $(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\nu})$ 是 $+\pi/2$（而不是 $-\pi/2$；$\boldsymbol{\tau}$ 是在我们考虑 $\boldsymbol{\nu}$ 的那个点处，有向曲线 $\partial\Omega$ 的单位切向量）．对于非光滑的（即，非 C^∞ 的）边界，我们就关于其光滑逼近取极限．粗略地说，$\oint$ 表示着，当我们从 Ω 的内部看的时候，$\partial\Omega$ 的定向是反时针的．

把(5.11)代入(5.10)就产生非齐次 *Cauchy* 公式

$$u(x,y)=\frac{1}{\pi}\iint_\Omega f(x',y')\frac{dx'dy'}{(x-x')+i(y-y')}-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial\Omega}u(x',y')\frac{dx'+idy'}{(x-x')+i(y-y')},\quad (x,y)\in\Omega. \tag{5.12}$$

通过有次序地利用两个复变量 z, $\bar z$，可以用一种比较"对称的"方式来写出(5.12)．如果把函数 $h(x,y)$ 在平面的一个（可测的）子集上的积分解释为二次形式(two-form) $h(x,y)dx\wedge dy$ 的积分，并把 $h(x,y)$ 关于 $dx+idy$ 在一曲线上的积分解释为一次形式 $h(x,y)dz$ 在同一条曲线上的积分，同时注意到

$$dz\wedge d\bar z=-2i\,dx\wedge dy,$$

那么我们就看到，(5.12)可以改写为

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi i}\iint_\Omega\frac{\partial u}{\partial\bar z}(x',y')\frac{dz'\wedge d\bar z'}{z'-z}+\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial\Omega}u(x',y')\frac{dz'}{z'-z}\quad(\text{在}\,\Omega\,\text{中}). \tag{5.12'}$$

当在 Ω 中 $f=0$ 时，(5.8)蕴涵着 u 是 Ω 中的一个全纯函数；此时，用 $u(z)$ 表示它．在这情形中，公式(5.12′)［或(5.12)］简化为标准的 *Cauchy* 公式：

$$u(z)=\frac{1}{2i\pi}\oint_{\partial\Omega}u(z')\frac{dz'}{z'-z},\quad z\in\Omega. \tag{5.13}$$

注 5.1 可以把公式 (5.10) 看作为非齐次 Cauchy 公式 [(5.12) 或 (5.12′)]对于任意的有界开集 Ω (不附加下述条件：边界是有限多条不相交的 Jordan 曲线的并集)的推广。

习　题

5.1　通过直接计算，证明对于任何 $\varphi\in C_c^\infty(\mathbf{R}^2)$，有

$$\varphi(0)=-\frac{1}{\pi}\iint\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}\frac{dxdy}{x+iy}.$$

[提示：转换到极坐标.]

5.2　假设 $f(x, y)\in C^\infty(\mathbf{R}^2)$ 当 $|x|>1$ 时等于零，关于 y 是周期的，周期为 2π. 利用 f 关于 y 的 Fourier 展开式，证明 Cauchy-Riemann 方程

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial u}{\partial y}\right)=f \quad \text{在 } \mathbf{R}^2 \text{ 中} \tag{5.14}$$

有一个解，关于 y 它是周期的(周期为 2π)．还证明，存在 $\mathbf{R}^2$ 中的一个广义函数 $E(x, y)$，关于 y 它是周期的，使得下述表达式是(5.14)的一个解：

$$u(x, y)=\int_{x'=-\infty}^{x'=+\infty}\int_0^{2\pi}E(x', y')f(x-x', y-y')dx'dy'. \tag{5.15}$$

5.3　令 D_r 表示平面中的圆盘 $|z|<r(r>0)$. 令 L 是一条通过原点的直线，f 是闭包 $\bar{D}_r$ 中的一个(复值)连续函数，在 $D_r\cap L$ 在 D_r 的余集中它是全纯的. $g(t)$是单个实变量的函数：当 $t>0$ 和 $t<0$ 时它是光滑的，在 $t=0$ 处它有一个有限的跳跃. 利用关于 $g(t)$的广义函数导数的公式，证明 f 在整个 D_r 中是全纯的.

5.4　令 D_r 如习题 5.3 中所述．利用那里所作的论断来证明 Schwarz **反射原理**，即，如果 h 是 $\bar{D}_r^+=\{z=x+iy\in\bar{D}_r; y\geqslant 0\}$ 中的任何连续函数，当 $y>0$ 时它是全纯的，当 $y=0$ 时它是实的，那么，它对于整个 D_r 有一个唯一的全纯延拓.

5.5　令 μ 是平面 $\mathbf{R}^2$ 中的一个具有紧支集的广义函数，u 是 $\mathbf{R}^2$ 中任一广义函数，它满足

$$\frac{\partial u}{\partial\bar{z}}=\mu \quad \text{在 } \mathbf{R}^2 \text{ 中.} \tag{5.16}$$

证明，如果 h 是 $\mathbf{C}$ 中的任一整函数，γ 是任一简单的可求长闭曲线，它把 μ 的支集包含在它的内部，那么

$$\oint_\gamma u(z)h(z)\,dz=2\sqrt{-1}\,\langle\mu, h\rangle. \tag{5.17}$$

5.6 令 $f_1, \cdots, f_n$ 是 n 个属于 $C_c^\infty(\mathbf{R}^{2n})$ 的函数,并假设 $n>1$. 假设下述相容性条件[参阅(1.16)]被满足:

(5.18) $$\frac{\partial f_j}{\partial \bar{z}_k}=\frac{\partial f_k}{\partial \bar{z}_j}, \quad j, k=1, \cdots, n.$$

利用 $1/\pi z_1$ 是 $\partial/\partial \bar{z}_1$ 的基本解这一事实,证明,存在 $\mathbf{R}^{2n}$ 中的一个 C^∞ 函数 u, 它在整个 $\mathbf{R}^{2n}$ 中满足(超定的)方程组

(5.19) $$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}_j}=f_j, \quad j=1, \cdots, n,$$

并且,它有紧支集. [提示: 在关于 z_1 的非齐次 Cauchy 公式中取 $|z_2|+\cdots+|z_n|\to+\infty$.]

5.7 令 K 是 $\mathbf{R}^{2n}$ 的一个紧子集, 它的余集是连通的($n>1$), 并令 h 在 $\mathbf{C}^n\backslash K$ 中是 $z=(z_1, \cdots, z_n)$ 的一个全纯函数[这意味着 h 是(譬如说)C^1 的,并在 $\mathbf{C}^n\backslash K$ 中满足Cauchy Riemann 方程组$(\partial/\partial \bar{z}_j)h=0$, $j=1, \cdots, n$]. 从习题 5.6 中的结果推导,存在 $\mathbf{C}^n$ 中的一个整函数 $\tilde{h}$, 它在 $\mathbf{C}^n\backslash K$ 中等于 h. [提示: 利用一个在 K 的一邻域中等于 1 的截断函数 $g\in C_c^\infty(\mathbf{R}^{2n})$, 并解(5.19), 其中 $f_j=(\partial/\partial \bar{z}_j)\{(1-g)h\}$, $j=1, \cdots, n$.]证明,当 $n=1$ 时, 同样的结果不成立. (上述在维数 $n>1$ 时的延拓结论是 Hartogs 的一个经典定理.)

5.8 令 Ω 是 $\mathbf{R}^2$ 的一个任意开子集.如通常一样,令 $C^\infty(\Omega)$ 表示 Ω 中的复 C^∞ 函数的空间, 赋予函数集合及其各个导数在 Ω 的紧子集上的一致收敛的拓扑 $\mathscr{T}$. 令 $\mathscr{T}'$ 表示 $C^\infty(\Omega)$ 上的一个拓扑, 在其中, 函数集合的收敛意味着只是函数集合在 Ω 的紧子集上的一致收敛,以及它们的第一个 $\bar{z}$ 导数在自然拓扑 $\mathscr{T}$ 的意义下的收敛. 利用非齐次 Cauchy 公式(5.12),证明拓扑 $\mathscr{T}$ 和 $\mathscr{T}'$ 是一样的.

5.9 证明, 存在 $\mathbf{C}\backslash\{0\}$ 中的函数 u, 它是实解析的, 但不是复解析的(即不是全纯的),使得

(5.20) $$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{z} \quad 在\ \mathbf{C}\backslash\{0\}\ 中.$$

令 $f(z)$ 是 $\mathbf{C}\backslash\{0\}$ 中的一个全纯函数. 利用 $f(z)$ 的 Laurent 展开式, 证明方程

(5.21) $$\frac{\partial v}{\partial z}=f \quad 在\ \mathbf{C}\backslash\{0\}\ 中$$

总是有解的,并证明,它的所有的(广义函数)解在 $\mathbf{C}\backslash\{0\}$ 中都是实解析的.

5.10 令 $P(z)$ 是单个变量的多项式,具有复系数. 描述偏微分方程

(5.22) $$P\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)h=0$$

在 $\mathbf{R}^2$ 中的所有的解,并构作 $P(\partial/\partial \bar{z})$ 的一个基本解.

6. 热导方程和 Schrödinger 方程的基本解

回到§1中的基本例子，我们看到，热导方程和Schrödinger方程关于时间变量 t 都是一阶的. 根据公式

$$\tilde{u}(\xi,\ t)=\int_{\mathbf{R}^n} e^{-i\langle x,\xi\rangle}u(x,\ t)\,dx \tag{6.1}$$

(其中$\langle x,\xi\rangle=x^1\xi_1+\cdots+x^n\xi_n$)，关于空间变量 x 施行 Fourier 变换是自然的. 另一方面，波动方程关于所有变量都是二阶的，这个性质对 Laplace 方程也成立. 因而，它们的处理是比较困难的. 为热导方程和 Schrödinger 方程构造基本解，与为 Cauchy-Riemann 方程构造基本解(参看第 30, 31 和 32 页)是类似的.

6.1 热导方程

我们必须找方程

$$\frac{\partial E}{\partial t}-\Delta_x E=\delta \quad 在\ \mathbf{R}^{n+1}\ 中 \tag{6.2}$$

的解. 如上面所说，关于 x 施行 Fourier 变换；这样，(6.2)变为

$$\frac{\partial \widetilde{E}}{\partial t}+|\xi|^2\widetilde{E}=\delta(t). \tag{6.3}$$

(6.3)的一个值得注意的基本解由

$$\widetilde{E}(\xi,\ t)=H(t)\exp(-t|\xi|^2)$$

给出. 显然，它关于 ξ 是缓增的，事实上，如果 $t\neq 0$，它在 $\mathbf{R}_n$ 中的无穷远处是速降的. 根据公式

$$u(x,\ t)=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}_n} e^{i\langle x,\xi\rangle}\tilde{u}(\xi,\ t)\,d\xi, \tag{6.4}$$

我们可以对它施行 Fourier 逆变换. 假设 $t>0$，并取 $\tilde{u}(\xi,\ t)=\widetilde{E}(\xi,\ t)=\exp(-t|\xi|^2)$. 我们得到

$$u(x,\ t)=E(x,\ t)=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}_n}\exp(i\langle x,\ \xi\rangle-t|\xi|^2)\,d\xi$$

$$=\left\{\prod_{j=1}^{n}(2\pi)^{-1}\int_{\mathbf{R}_1}\exp\left[-t\left(\xi_j-i\,\frac{x^j}{2t}\right)^2\right]d\xi_j\right\}\exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right).$$

令 z 是复平面 $\mathbf{C}^1$ 中的复变量，并考虑积分

$$I=\int_{\gamma}\exp(-tz^2)\,dz,$$

其中 γ 是任一水平直线 $\operatorname{Im} z=$ 常数 $=c$. 我们断言 I 与 c 无关. 为了看到这点，只需应用 Cauchy 积分定理，同时把积分围道取成图 6.1 所示的矩形边界. 当 $R\to+\infty$ 时，$\operatorname{Re} z=\pm R$ 上两条垂直线段对于 $\exp(-tz^2)$ 的这个围道积分的贡献很快地趋于零. 因此，在极限情形，在方向如图 6.1 所示的两条水平直线上的积分的和等于零. 这就证明了

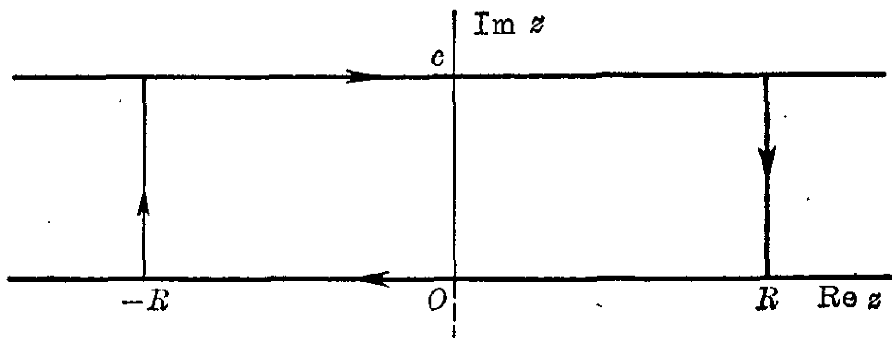


图　6.1

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp[-t(\operatorname{Re} z)^2]\,d(\operatorname{Re} z)=\sqrt{\frac{\pi}{t}},$$

这样，最后就得到

$$E(x,\ t)=(2\sqrt{\pi t})^{-n}\exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right).$$

因而，对于 $t\neq 0$, $\widetilde{E}(\xi,\ t)$ 的 Fourier 逆变换(关于 ξ 的)由

$$(6.5)\qquad E(x,\ t)=(2\sqrt{\pi t})^{-n}H(t)\exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right)$$

给出. 如果我们用正确的方法看问题，我们容易看到，对于所有的 t, $E(x,\ t)$ 都是 $\widetilde{E}(\xi,\ t)$ 的 Fourier 逆变换. 事实上，$\widetilde{E}(\xi,\ t)$ 是 $\xi\in\mathbf{R}_n$ 的一个缓增广义函数，实际上是一有界函数，取值于 t 的有界可测函数空间中[这些函数形成一个 Banach 空间 $L^\infty(\mathbf{R}_t^1)$]. 因此，它有 Fourier 逆变换，即为(6.5). 在由(6.5)给出的 E 上，加

上一个齐次热导方程的解，就得到热导方程的所有基本解. 我们来指出(6.5)中的基本解 E 的两个重要的性质:

(1) $E(x, t)$在空间旋转下是不变的，即，就空间变量而言，它只依赖于平方范数 $|x|^2$;

(2) 在原点的余集 $\mathbf{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ 中，$E(x, t)$是(x, t)的一个 C^∞ 函数. 为了看到这一点，只需在点 $x=x_0$, $t=0$ 的邻域中进行推理即可. 我们必须证明，当 $t>0$ 趋于零时，

$$t^{-n/2}\exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right)$$

的所有偏导数趋于零. 这是不困难的. 注意，在半空间 $t>0$ 中 $E(x, t)$无处为零，而在半空间 $t<0$ 中 $E(x, t)$ 处处为零. 因此，E 不会是 $\mathbf{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ 中的解析函数(虽然它在 $t\neq 0$ 这一区域中是一解析函数)，所以，正如已经指出的，热导算子是次椭圆的，但不是解析次椭圆的(定义 2.1 和 3.1).

6.2 Schrödinger 方程

在现在的情形，我们来写出与(6.2)及(6.3)类似的方程:

$$\frac{1}{i}\frac{\partial E}{\partial t}-\Delta_x E=\delta \quad \text{在 } \mathbf{R}^{n+1} \text{ 中}, \tag{6.6}$$

$$\frac{1}{i}\frac{\partial \widetilde{E}}{\partial t}+|\xi|^2\widetilde{E}=\delta(t). \tag{6.7}$$

取
$$\widetilde{E}=iH(t)\exp(-it|\xi|^2),$$
我们立刻得到了(6.7)的一个解. 这里，仍可以把 $\widetilde{E}$ 看作一个取值于空间 $L^\infty(\mathbf{R}^1_t)$ 中的、$\xi\in\mathbf{R}_n$ 的一个缓增广义函数，或一个有界函数. 我们必须计算它关于 ξ 的 Fourier 逆变换. 注意当 $\varepsilon>0$ 趋于零时，

$$\widetilde{E}_\varepsilon=iH(t)\exp(-(\varepsilon+it)|\xi|^2)$$

在广义函数的意义下收敛于 $\widetilde{E}$. 因此，$\widetilde{E}_\varepsilon$ 的 Fourier 逆变换收敛于 $\widetilde{E}$ 的 Fourier 逆变换. 适用于由(6.4)给出的函数 $u(x, t)$的同样推理指出，

$$v(x, t) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}_n} \exp(i\langle x, \xi\rangle - (\varepsilon + it)|\xi|^2)d\xi$$

等于

(6.8) $$(2\pi)^{-n}\left\{\int_{\mathbf{R}_n} \exp(-(\varepsilon+it)|\xi|^2)d\xi\right\}\exp\left(-\frac{|x|^2}{4(\varepsilon+it)}\right).$$

在此我们注意，当 $t>0$ 和 $\varepsilon\to 0(\varepsilon>0)$ 时，函数(6.8)有极限，它的极限是

(6.9) $$(2\pi)^{-n}t^{-n/2}C\exp\left(-\frac{|x|^2}{4it}\right),$$

其中 C 等于 *Fresnel* 积分

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-i\lambda^2)d\lambda$$

的 n 次幂. 我们有

$$J = J_0 - iJ_1, \quad J_0 = \int_{-\infty}^{+\infty}\cos\lambda^2 d\lambda, \quad J_1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\sin\lambda^2 d\lambda.$$

有各种计算 J_0, J_1 的方法(关于参数的微商，用残数方法的积分，等等)；可以得到

$$J_0 = J_1 = \sqrt{\pi/2}.$$

因为 $(1-i)/\sqrt{2} = \exp(-i\pi/4)$，我们就看到(6.9)等于

$$(4\pi t)^{-n/2}\exp\left(-in\frac{\pi}{4}\right)\exp\left(-\frac{|x|^2}{4it}\right),$$

因而，

(6.10) $$E = H(t)\exp\left[-i(n-2)\frac{\pi}{4}\right](4\pi t)^{-n/2}\exp\left(-\frac{|x|^2}{4it}\right).$$

有关广义函数 E 的一些注记如下：

(1) E 关于空间变量是旋转不变的；

(2) 当 $t\neq 0$ 时，E 是一个 C^∞ 函数，还是一个解析函数；在点 $x=x_0$, $t=0$ 的任一邻域中，它不是一个 C^∞ 函数. 事实上，在这样一个邻域中它甚至不是一个可积函数，除非 $n=1$. 例如，当 $n=2$ 时，E 是一个形如

$$\mathrm{Pf}\, H(t)t^{-1}$$

的 t 的拟函数(pseudofunction). 当 n 增加时，E 在超平面 $t=0$ 上的奇异性质更坏. 总之，Schrödinger 算子不是次椭圆的.

习 题

6.1 假设 $n=2$. 直接证明由(6.5)给出的 E 是热导算子的一个基本解, 即证明: 给定任一试验函数 $\varphi\in C_c^\infty(\mathbf{R}^3)$, 有

$$\varphi(0)=-\int_{\mathbf{R}^3}E(x,\ t)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\Delta_x\varphi\right)dxdt.$$

[提示: 在空间变量 x 的平面中利用极坐标 $r,\ \theta$.]

6.2 用公式(6.10)代替公式(6.5), 用 Schrödinger 算子代替热导算子; 问题如习题 6.1 中所述.

6.3 令 E 是由(6.5)定义的广义函数. 证明它是一个局部可积函数. 实际上, 证明它在带形域

$$\{(x,\ t)\in\mathbf{R}^{n+1};\ x\in\mathbf{R}^n,\ 0<t<t_1\}\quad(t_1<+\infty)$$

中的积分是有界的.

6.4 令 E 由 (6.5) 给出. 对于 $t>0$, 我们把 E 看作空间变量的广义函数, 它依赖于参数 t. 证明, 当 $t\to+0$ 时, $E(x,\ t)\to\delta(x)$ (Dirac 广义函数).

6.5 令 E 由(6.5)给出. 假设 $n\geqslant3$. 计算

$$F(x)=\int_0^{+\infty}E(x,\ t)dt,$$

并用习题 6.4 中的结果, 证明

$$-\Delta F=\delta\quad(\text{在 } \mathbf{R}^n \text{ 中}). \tag{6.11}$$

6.6 证明, 由(6.5)给出的热导方程的基本解 E 属于 $G_2(\mathbf{R}^{n+1}\backslash\{0\})$(定义 3.3, 习题 3.4), 并推导, 对于热导方程的任意的基本解, 同样的事实也成立.

6.7 令 $\mathbf{T}^n$ 表示 n 维环面, $\theta=(\theta_1,\ \cdots,\ \theta_n)$ 表示 $\mathbf{T}^n$ 中的变量(每个 θ_j 是一个角度, 从 0 变动到 2π). 对于"周期的热导方程"

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\Delta_\theta u\ \left[\text{在 } \mathbf{R}^1\times\mathbf{T}^n \text{ 中};\quad \Delta_\theta=\sum_{j=1}^n\left(\frac{\partial}{\partial\theta_j}\right)^2\right], \tag{6.12}$$

构作由 (6.5) 给出的基本解 $E(x,\ t)$ 的类似物 $E^\#(\theta,\ t)$; 写出 $E^\#(\theta,\ t)$ 的 Fourier 级数展开式.

当 t 也被解释为一角度, 并在一维环上变动时, 将是什么情形?

7. 波动方程的基本解

在波动方程

(7.1)
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\Delta_x u=f$$

中，明显地[†]提示我们怎样选取时间变量. 在 Laplace 方程的情形中(参阅§9)不是这样的. 如在研究热导方程和 Schrödinger 方程的时候一样，用 n 表示空间变量的数目：$x=(x^1,\ \cdots,\ x^n)$. 现在来构造(7.1)的值得注意的基本解. $n=1$ 的情形是完全初等的，我们就从这里开始.

单个空间变量的情形

用 x 表示空间变量. 我们要解方程

(7.2)
$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}=\delta(t)\delta(x).$$

作如下的变量变换

(7.3)
$$s=t-x,\quad y=t+x$$

是方便的.

我们将要看到，可以找到(7.2)的一个解 E，它是局部可积函数，仍用 $E(t,\ x)$ 表示. 令 φ 是 $C_c^\infty(\mathbf{R}^2)$ 的任一元素，并令 $\varphi(t,\ x)$ [相应地，$\varphi^\natural(s,\ y)$]是它在 $t,\ x$ (相应地，$s,\ y$)坐标中的表达式. 自然，我们有

$$\varphi^\natural(s,\ y)=\varphi\left(\frac{s+y}{2},\ \frac{y-s}{2}\right).$$

此外，

$$4\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi^\natural(s,\ y)=\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\varphi-\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\varphi\right]\left(\frac{s+y}{2},\ \frac{y-s}{2}\right).$$

另一方面，

$$\begin{aligned}\langle E,\ \varphi\rangle&=\iint E(t,\ x)\varphi(t,\ x)\,dtdx\\&=\frac{1}{2}\iint E\left(\frac{s+y}{2},\ \frac{y-s}{2}\right)\varphi^\natural(s,\ y)\,dsdy.\end{aligned}$$

† 可以相差一个 Lorentz 变换.

这样，函数 $$E^\natural(s, y)=\frac{1}{2}E\left(\frac{s+y}{2}, \frac{y-s}{2}\right)$$
就在 s, y 坐标中定义了广义函数 E. 取 $\varphi=\{(\partial/\partial t)^2-(\partial/\partial x)^2\}\psi$ (在 t, x 坐标中). 根据(7.2)，我们必须有

$$\psi(0, 0)=\langle E, \varphi\rangle=\iint E^\natural(s, y)(\psi_{tt}-\psi_{xx})^\natural(s, y)dsdy$$
$$=4\iint E^\natural(s, y)\psi^\natural_{sy}(s, y)dsdy.$$

因而必须找一局部可积函数 $E^\natural$，它是

$$4\frac{\partial^2 E^\natural}{\partial s\partial y}=\delta(s)\delta(y) \tag{7.4}$$

的解，并且，当这样的 $E^\natural$ 被找到以后，令

$$E(t, x)=2E^\natural(t-x, t+x). \tag{7.5}$$

我们立刻就找到(7.4)的许多解，它们是

$$E_1^\natural=\frac{1}{4}H(s)H(y),\quad E_2^\natural=-\frac{1}{4}H(s)H(-y), \tag{7.6}$$
$$E_3^\natural=-\frac{1}{4}H(-s)H(y),\quad E_4^\natural=\frac{1}{4}H(-s)H(-y)$$

的适当的线性组合. 由于(7.5)，(7.6)中的第一个函数导致 $\mathbf{R}^2$ 中波动算子的一个基本解 E_1，它在 t, x 坐标中由局部可积函数

$$E_1(t, x)=\frac{1}{2}H(t-x)H(t+x) \tag{7.7}$$

所定义. 注意，

$$E_1(t, x)=\frac{1}{2}H(t)H(t^2-x^2).$$

E_1 的支集为下述扇形(称为平面中的前向光锥)：

$$t+x\geqslant 0,\ t-x\geqslant 0. \tag{7.8}$$

并且，在集合(7.8)的内部，函数 $E_1(t, x)$ 是常数$\left(\text{等于}\frac{1}{2}\right)$. 因而，它的奇异支集 (singular support, 即所有具下述性质的闭集的最小者：在此闭集之外，它是一个 C^∞ 函数) 恰好等于集合(7.8)的边界，即，等于两条射线

$$x+t=0,\ t\geqslant 0;\quad x-t=0,\ t\geqslant 0 \tag{7.9}$$

的并集．我们最后将证明，E_1是波动方程的具有支集在(7.8)中的唯一的基本解．

类似的考虑也适用于$E_2^\sim$，$E_3^\sim$，$E_4^\sim$各自的变换E_2，E_3，E_4．此时，必须用不同的扇形来代替扇形(7.8)．例如，对于E_4，(7.8)关于原点的对称像

$$x+t\leqslant 0, \quad t-x\leqslant 0 \tag{7.10}$$

起着(7.8)的作用．

在空间变量数目$n>1$的情形，也有着类似的现象，但与$n=1$的情形有着重要的差别．

一 般 情 形

关于空间变量x施行 Fourier 变换之后，我们要解的方程就变为

$$\frac{\partial^2 \widetilde{E}}{\partial t^2}+|\xi|^2\widetilde{E}=\delta(t). \tag{7.11}$$

利用公式(4.24)，容易得到(7.11)的具有支集在半直线$t\geqslant 0$中的解．事实上，在这里我们不难发现U是什么：

$$U(t,\ \xi)=\frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|},$$

因而，

$$\widetilde{E}_+(t,\ \xi)=H(t)\ \frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}. \tag{7.12}$$

类似地，(7.11)的具有支集在半直线$t\leqslant 0$中的解为

$$\widetilde{E}_-(t,\ \xi)=-H(-t)\frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}. \tag{7.13}$$

取形为

$$\alpha(\xi)\widetilde{E}_+ +\beta(\xi)\widetilde{E}_-, \quad \alpha+\beta\equiv 1 \tag{7.14}$$

的表达式，就得到(7.11)更多的解；这里，α，β(譬如说)是$\xi\in\mathbf{R}_n$的有界可测函数，或者，是$\mathbf{R}_n$中的缓增广义函数．应该注意的第一个事实是，此时，所有的广义函数(7.14)关于ξ都是缓增的，它们

关于 ξ 的 Fourier 逆变换是波动方程的基本解. 此后，我们将只研究 $\widetilde{E}_+(t, \xi)$ 以及它关于 ξ 的 Fourier 逆变换 $E_+(t, x)$.

令 $\varphi=\varphi(x)$ 表示 $\mathbf{R}^n$ 中一个任意的试验函数. 我们注意，$\widetilde{E}_+(t, \xi)$ 是 t 的函数，取值于 ξ 的有界可测函数空间中. 由缓增广义函数的 Fourier 变换的定义，我们有

$$\begin{aligned}\langle E_+(t, x), \varphi(x)\rangle &= \langle E_+(t, x), (\mathscr{F}\mathscr{F}^{-1}\varphi)(x)\rangle \\ &= \langle \widetilde{E}_+(t, \xi), (\mathscr{F}^{-1}\varphi)(\xi)\rangle,\end{aligned}$$

其中，前两个括号是 x 的广义函数与 x 的试验函数之间的对偶性括号，而第三个括号是用于变量 ξ 的. 我们已用 $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{F}^{-1}$ 分别表示 Fourier 变换和它的逆变换；第一个变换把 ξ 的广义函数变为 x 的广义函数，$\mathscr{F}^{-1}$ 把 x 的广义函数变为 ξ 的广义函数. 总之，利用公式(6.4)，我们有

$$\begin{aligned}\langle E_+(t, x), \varphi(x)\rangle &= \int \widetilde{E}_+(t, \xi)(\mathscr{F}^{-1}\varphi)(\xi)d\xi \\ &= (2\pi)^{-n}\int \widetilde{E}_+(t, \xi)\left\{\int e^{i\langle x, \xi\rangle}\varphi(x)dx\right\}d\xi.\end{aligned}$$

我们不能交换其中的积分次序，也不能写

$$E_+(t, x) = (2\pi)^{-n}\int e^{i\langle x, \xi\rangle}\widetilde{E}_+(t, \xi)d\xi, \tag{7.15}$$

因为 $\widetilde{E}_+$ 关于 ξ 不是可积的(因而，我们不能应用 Fubini 定理). 但是可以引进一个收敛因子 $\exp(-\varepsilon|\xi|)$，并把(7.15)的含义解释为：

$$E_+(t, x) = (2\pi)^{-n}\lim_{\varepsilon\to+0}\int \exp(i\langle x, \xi\rangle - \varepsilon|\xi|)\widetilde{E}_+(t, \xi)d\xi. \tag{7.16}$$

我们可以把(7.15)改写为下述形式：

$$E_+(t, x) = H(t)\mathscr{U}(t, x),$$

其中，

$$\begin{aligned}\mathscr{U}(t, x) &= (2\pi)^{-n}\int e^{i\langle x, \xi\rangle}\frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}d\xi \\ &= (2\pi)^{-n}\int\left\{\exp\left(i\left\langle \xi, x+\frac{\xi}{|\xi|}t\right\rangle\right)\right. \\ &\qquad \left.-\exp\left(i\left\langle \xi, x-\frac{\xi}{|\xi|}t\right\rangle\right)\right\}\frac{d\xi}{2i|\xi|},\end{aligned} \tag{7.17}$$

这里，积分应按具有一个隐含的收敛因子的(7.15)中积分的相同意义来理解. 在波动方程的 Cauchy 问题的理论中，广义函数 $\mathscr{U}(t, x)$ 将起着重要的作用.

对于 $E_+(t, x)$ 取关于变量 x 的 Fourier 变换有一个最大的缺陷：它破坏了 Lorentz 不变性，而这不变性是波动方程的最重要的特性之一. 为了挽回这个不变性，我们还必须关于 t 施行 Fourier 变换. 自然，$E_+(t, x)$ 关于 (t, x) 的 Fourier 变换等于 $\tilde{E}_+(t, \xi)$ 关于 t 的 Fourier 变换 $\hat{E}_+(\tau, \xi)$：

$$\hat{E}_+(\tau, \xi)=\int_0^{+\infty} e^{-i\tau t}\frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}dt.$$

这是一个发散积分. 我们必须引进一个收敛因子：

$$\hat{E}_+(\tau, \xi)=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{+\infty} e^{-it(\tau-i\varepsilon)}\sin(|\xi|t)\frac{dt}{|\xi|}.$$

在极限符号后面的积分等于

$$\begin{aligned}\frac{1}{2|\xi|i}\int_0^{+\infty}&\{\exp[-it(\tau-i\varepsilon-|\xi|)]-\exp[-it(\tau-i\varepsilon+|\xi|)]\}dt\\&=-\frac{1}{2|\xi|}\{(\tau-i\varepsilon-|\xi|)^{-1}-(\tau-i\varepsilon+|\xi|)^{-1}\}\\&=-((\tau-i\varepsilon)^2-|\xi|^2)^{-1}.\end{aligned}$$

这样，我们要求的 Fourier 变换由下式给出：

$$\hat{E}_+(\tau, \xi)=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{-1}{(\tau-i\varepsilon)^2-|\xi|^2}. \tag{7.18}$$

令 $\varphi(t, x)$ 是 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的一个任意的试验函数，并令 $\check{\varphi}(t, x)=\varphi(-t, -x)$. 由缓增广义函数的 Fourier 变换的定义，我们有

$$\langle E_+, \check{\varphi}\rangle=-(2\pi)^{-n-1}\lim_{\varepsilon\to+0}\iint\frac{\hat{\varphi}(\tau, \xi)d\tau d\xi}{(\tau-i\varepsilon)^2-|\xi|^2}. \tag{7.19}$$

我们先来考察一下 (7.19) 的右端关于 τ 的那个积分. 我们注意，把 τ 看作复变量时，对于 $\operatorname{Im}\tau<\varepsilon$，被积函数是 τ 的全纯函数. 在每条水平直线 $\operatorname{Im}\tau=$常数$<\varepsilon$ 上，当 $|\operatorname{Re}\tau|^{-1}$ 趋于零时，被积函数的衰减快于 $|\operatorname{Re}\tau|^{-1}$ 的任何幂. 因而，象我们在§6.1中已经做过的那样，可以应用 Cauchy 积分定理. 这样，所考虑的那个积分等于

$$(7.20) \qquad \iint \frac{\hat{\varphi}(\tau-ia,\ \xi)\,d\tau d\xi}{(\tau-ia-i\varepsilon)^2-|\xi|^2},$$

其中 a 是任一大于零的数.但是,当 $\varepsilon>0$ 趋于零时,在积分(7.20)中我们可以放心地取极限. 因而得到

$$(7.21) \qquad \langle E_+,\ \check{\varphi}\rangle=-(2\pi)^{-n-1}\iint\frac{\hat{\varphi}(\tau-ia,\ \xi)}{(\tau-ia)^2-|\xi|^2}\,d\tau d\xi.$$

(7.21)右端的积分可以看作 $\mathbf{C}^n=\mathbf{R}^{2n}$ 的一个 n 维实子流形上的积分. 但是要注意,我们仅在 τ 方向上进入到非实的空间中;这仍然给予时间变量 t 一个特殊的地位,正如我们已经选择的那样:这不是 Lorentz 不变的. 为了重新确定这个不变性, 我们来对关于变量 $\xi_1,\ \cdots,\ \xi_n$ 的积分围道(每次都应用 Cauchy 积分定理)进行变形.

我们先考虑积分

$$(7.22) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\hat{\varphi}(\tau-ia,\ \xi)\,d\xi_1}{(\tau-ia)^2-|\xi|^2}.$$

如果被积函数的分母在一带形域 $-b_1-c<\operatorname{Im}\zeta_1<+c\,(c>0,b_1$ 是实的)中不为零, 我们就可以把积分移到水平线 $\{\zeta_1\in\mathbf{C}^1;\zeta_1=\xi_1-ib_1,\ \xi_1\in\mathbf{R}^1\}$ 上. 我们有

$$\begin{aligned}(\tau-ia)^2-(\xi_1+i\eta_1)^2-|\xi'|^2\\ =\tau^2-|\xi|^2-a^2+\eta_1^2-2i(a\tau+\eta_1\xi_1).\end{aligned}$$

这里, 我们用了记号 $\xi'=(\xi_2,\ \cdots,\ \xi_n)$. 如果要刚才给出的这个量等于零,就应有

$$\tau^2-|\xi|^2=a^2-\eta_1^2,\quad a\tau+\eta_1\xi_1=0.$$

换句话说, 向量$(\tau,\ \xi)$和$(a,\ \eta_1,\ 0,\ \cdots,\ 0)$应该是正交的, 同时, 它们位于 Lorentz 二次型的同一个等值面上. 如果要求 $a^2-\eta_1^2>0$, 那么这是不可能的: 在前向光锥内部, 不存在两个相互正交的向量. 再者,如果我们要求

$$a^2-b_1^2>0,$$

则对于对某个(依赖于 a 的) $c>0$ 使 $-b_1-c<\eta_1<c$ 成立的所有 η_1, 我们还将有 $a^2-\eta_1^2>0$. 这样就推得: 积分(7.22)等于

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\hat{\varphi}(\tau-ia,\ \xi_1-ib_1,\ \xi')d\xi_1}{(\tau-ia)^2-(\xi_1-ib_1)^2-|\xi'|^2}.$$

其次，利用完全一样的推理，把关于 $\xi_2, \cdots, \xi_n$ 的积分围道依次变到复平面中．把这些围道移到水平直线

$$\{\zeta_j\in\mathbf{C}^1;\ \zeta_j=\xi_j-ib_j,\ \xi_j\in\mathbf{R}^1\},\quad b_j \text{ 是实的},\quad 2\leqslant j\leqslant n$$

上．当 $b=(b_1, \cdots, b_n)$ 满足条件 $a^2-|b|^2>0$ 时，通过 Cauchy 积分定理，我们能够做到这一点．因为在这个情形中，不存在实的 n 维向量 η，使得

$$-b_j-c<\eta_j<c,\quad j=1, \cdots, n,\quad \text{对某个 } c>0$$

以及 $\tau^2-|\xi|^2=a^2-|\eta|^2$，$\langle(\tau, \xi), (a, \eta)\rangle=0$．最后，就证明了

命题 7.1　令 $(a, b)\in\mathbf{R}^{n+1}$ 满足 $|b|^2<a^2$，$a>0$．那么，给定任一 $\varphi\in C_c^\infty(\mathbf{R}^{n+1})$，我们有

$$\langle E_+, \check{\varphi}\rangle=-(2\pi)^{-n-1}\iint\frac{\hat{\varphi}(\tau-ia, \xi-ib)}{(\tau-ia)^2-(\xi-ib)^2}d\tau d\xi. \tag{7.23}$$

这里，我们已经用了下述记号：如果 $\zeta=(\zeta_1, \cdots, \zeta_n)$ 是一个复的 n 维向量，则

$$(\zeta)^2=(\zeta_1)^2+\cdots+(\zeta_n)^2.$$

我们将从命题 7.1 推导：在 Lorentz 群的一个值得注意的子群下 E_+ 是不变的．但是必须首先说明，所谓一个广义函数在 Euclid 空间的某个线性变换下是不变的，这句话意味着什么．令 Euclid 空间是 $\mathbf{R}^N$，y 是其中的变量．如果所研究的广义函数 u 是一函数（仍用 u 表示），并且如果 T 是 $\mathbf{R}^N$ 的任一线性变换，那么 u 在 T 下的变换是函数

$$u^T(y)=u(T^{-1}y).$$

把 u 和 u^T 看作广义函数时，这意味着对于每个 $\varphi\in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$，

$$\langle u^T, \varphi\rangle=\int u(T^{-1}y)\varphi(y)dy=\int u(y)\varphi(Ty)|\det T|dy$$
$$=|\det T|\langle u, \varphi^{T^{-1}}\rangle.$$

因而，当 u 是一个任意的广义函数时，上式就提出了 u^T 的定义：

$$\langle u^T, \varphi\rangle=|\det T|\langle u, \varphi^{T^{-1}}\rangle,\quad \varphi\in C_c^\infty(\mathbf{R}^N). \tag{7.24}$$

现在我们要问：u^T 的 Fourier 变换是什么？这里我们仍限制

在 u 是一个函数的情形，事实上是一个在无穷远处速降的 C^∞ 函数的情形. 利用 $\mathscr{S}$ 在 $\mathscr{S}'$ 中的稠性，或者由缓增广义函数的 Fourier 变换的定义，立即可将我们所得到的公式推广到缓增广义函数上去. 我们有

$$(\widehat{u^T})(\eta)=\int e^{-i\langle y,\eta\rangle}u(T^{-1}y)\,dy=|\det T|\int e^{-i\langle Ty,\eta\rangle}u(y)\,dy$$

$$=|\det T|\int \exp(-i\langle y,{}^tT\eta\rangle)u(y)\,dy=|\det T|\hat{u}({}^tT\eta),$$

其中 ${}^tT$ 是 T 的转置. 换句话说，有

(7.25) $$\widehat{u^T}=|\det T|\hat{u}^{{}^tT^{-1}}.$$

$\mathbf{R}^{n+1}$ 中的 Lorentz 群是 $\mathbf{R}^{n+1}$ 的一个线性变换群，它保持二次型 $t^2-|x|^2$ 不变. 在 Lorentz 变换中，我们分离出一些使前向光锥

$$\Gamma_+=\{(x,t)\in\mathbf{R}^{n+1};\ |x|^2\leqslant t^2,\ t\geqslant 0\}$$

保持不变的变换. 它们形成 Lorentz 群的一个子群 $\mathscr{L}_+$. 一个 Lorentz 变换属于 $\mathscr{L}_+$，如果给定一个任意的点 (x,t)，它满足 $|x|^2<t^2$ 和 $t>0$，它的变换 (x',t') 满足 $t'>0$. (子群 $\mathscr{L}_+$ 是恒等变换在 Lorentz 群中的连通分支.) 所有 Lorentz 变换有等于 ±1 的行列式；$\mathscr{L}_+$ 中的变换的行列式等于 $+1$. 还注意，$T\mapsto {}^tT^{-1}$ 是从 $\mathscr{L}_+$ 到 $\mathscr{L}_+$ 上的一个同构(对于拓扑群结构)(习题 7.10). 我们说，u 在 $\mathscr{L}_+$ 下是不变的，即是说对于所有 $T\in\mathscr{L}_+$，$u^T=u$.

命题 7.2 广义函数 E_+ 在 $\mathscr{L}_+$ 下是不变的.

证明 必须证明，对于任何 $T\in\mathscr{L}_+$，有 $\langle E_+,\varphi\rangle=\langle E_+,\varphi^{T^{-1}}\rangle$. 事实上，我们可以用 $\check{\varphi}(x)=\varphi(-x)$ 来代替 $\varphi(x)$，并注意 $(\check{\varphi})^{T^{-1}}=(\varphi^{T^{-1}})^\vee$. 我们利用(7.23)和(7.25)，但是在(7.25)中用 φ 代替 u. 我们看到

$$\langle E_+,(\varphi^{T^{-1}})^\vee\rangle=-(2\pi)^{-n-1}\iint\frac{\hat{\varphi}({}^tT^{-1}[(\tau,\xi)-i(a,b)])}{(\tau-ia)^2-(\xi-ib)^2}\,d\tau d\xi.$$

在此积分中作变量变换，即，令 $(\tau',\xi')={}^tT^{-1}(\tau,\xi)$. 记 $(a',b')={}^tT^{-1}(a,b)$. 那么，对于任何保持二次型 $\tau^2-|\xi|^2$ 不变的线性变

换，有

$$(\tau-ia)^2-(\xi-ib)^2=(\tau^2-|\xi|^2)-(a^2-|b|^2)-2i(a\tau-\langle b,\ \xi\rangle)$$
$$=(\tau'^2-|\xi'|^2)-(a'^2-|b'|^2)$$
$$-2i(a'\tau'-\langle b',\xi'\rangle);$$

这样的线性变换必定也保持连带的双线性形式 $a\tau-\langle b,\ \xi\rangle$ 不变．因而

$$\langle E_+,\ (\varphi^{T^{-1}})^\vee\rangle=-(2\pi)^{-n-1}\iint\frac{\hat{\varphi}(\tau'-ia',\ \xi'-ib')d\tau'd\xi'}{(\tau'-ia')^2-(\xi'-ib')^2}.$$

但是 $(a',\ b')$ 属于 Γ_+ 的内部，因为 ${}^tT^{-1}\in\mathscr{L}_+$．因而从命题7.1即得命题 7.2．　证毕．

我们以推导命题 7.2 的一个重要的后果来结束这一节：

命题 7.3　在前向光锥

$$\Gamma_+=\{(t,\ x)\in\mathbf{R}^{n+1};\ \ |x|^2\leqslant t^2,\ t\geqslant 0\}$$

的余集中 $E_+(t,\ x)$ 恒等于零．

证明　我们知道，当 $t<0$ 时 $E_+(t,\ x)$ 等于零．令 T 是一个属于 $\mathscr{L}_+$ 的变换；既然 E_+^T 等于 E_+，所以当 $t<0$ 时 E_+^T 等于零，因而，在半空间 $t<0$ 在 T^{-1} 下的像中，E_+ 必定等于零．现在令 $\mathscr{P}$ 是 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中一个 n 维平面，它与 Γ_+ 的交集为 Γ_+ 的顶点，即原点．只需证明，存在一个属于 $\mathscr{L}_+$ 的变换，它把 $\mathscr{P}$ 变为超平面 $t=0$．垂直于 $\mathscr{P}$ 的(在 $\mathbf{R}^{n+1}$ 上 Euclid 范数的意义下)直线 L 是这样一条直线，它的一半在 Γ_+ 的内部．因此只需证明，在 $\mathscr{L}_+$ 中存在一个变换，它把这条半直线映射为正 t 轴．为了证明这个事实，我们施行一个空间旋转，也就是，一个只改变变量 x 的旋转，它把直线 L 变为二维平面 $(t,\ x^1)$ 中的一条直线．这显然是可能的．这样，我们就归结为一个二维的问题：必须找到一个只包含两个变量 $t,\ x^1$ 的、把方程为

(7.26)
$$x^1=\lambda t,\qquad |\lambda|<1$$

的直线映为 t 轴的 Lorentz 变换，因而，这个变换保持二次型 $t^2-(x^1)^2$ 和前向光锥不变．

容易看到(习题 7.10)，$\mathbf{R}^2$ 中所有的 Lorentz 变换都具有形

式

$$(7.27)\qquad \begin{pmatrix} \varepsilon\cosh\theta & \varepsilon\sinh\theta \\ \eta\sinh\theta & \eta\cosh\theta \end{pmatrix},$$

其中 θ, ε, η 是实数，并且 $\varepsilon^2=\eta^2=1$. 这些变换中保持前向光锥不变的那些变换相应于值 $\varepsilon=\eta=+1$. 如果选取辐角 θ 使得

$$\lambda+\tanh\theta=0$$

(这是可能的,因为 $|\lambda|<1$)，则矩阵(7.27)把直线(7.26)变为 t 轴. 证毕.

我们回到(7.17)中定义的广义函数 $\mathscr{U}(t, x)$. 考察它关于 x 的 Fourier 变换 $\sin(|\xi|t)/|\xi|$，我们立即看到，它是取值于 ξ 变量的缓增广义函数空间 $\mathscr{S}'_\xi$ 中的、t 的连续函数,事实上,是 t 的 C^∞ 函数. 此外,这个函数在原点等于零. 为了看出后面这一点,只需证明,给定任一函数 $\varphi\in C_c^\infty(\mathbf{R}_n)$,有

$$\int\frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}\varphi(\xi)d\xi\to 0\quad 当\ |t|\to 0\ 时;$$

这是显然的. 因而知道, $E_+(t, x)$是实 t 的一个连续函数,取值在 x 的广义函数的空间中:

$$E_+(t, x)=\begin{cases}\mathscr{U}(t, x) & 当\ t>0\ 时,\\ 0 & 当\ t\leqslant 0\ 时.\end{cases}$$

由此，并从 $\mathscr{U}(-t, x)=-\mathscr{U}(t, x)$ 这一事实，我们看到命题 7.3 蕴涵着

推论 7.1 在光锥 $\Gamma=\{(x, t)\in\mathbf{R}^{n+1};\ |x|^2\leqslant t^2\}$ 之外广义函数 $\mathscr{U}(t, x)$ 恒等于零.

习 题

7.1 令 $u=t^2-r^2$, 并考虑 $\mathbf{R}^{n+1}$ 上的一个二次连续可微函数 $f(t, x)=F(t^2-r^2)(r=|x|)$.

(i) 证明,存在单个变量 u 的一个微分算子 L, 使得

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2-\Delta_x\right\}f(t, x)=LF(u).$$

给出 L 的表达式.

(ii) 令 T 是 $\mathbf{R}^{n+1}$ 上由函数 $f(t, x)$ 定义的广义函数. 证明, 存在 u 的一个微分算子 M, 使得广义函数

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 - \Delta_x\right\} T$$

由函数 $MF(u)$ 所定义. 给出 M 的表达式, 并与(i)中的 L 相比较.

7.2　在把 E 当作一个函数, 而不当作一个广义函数时, 解(7.2), 此时作变量变换(7.3), 解变换后的方程, 最后又回到坐标 t, x. 这样得到的 E 的值是什么?

7.3　$\hat{\varphi}(\tau-ia, \xi)$ 和 $(R^2+(\tau-ia)^2+|\xi|^2)^k\hat{\varphi}(\tau-ia, \xi)$ 关于 (τ, ξ) 的 Fourier 逆变换是什么? 其中 $\hat{\varphi}$ 是 $\varphi\in C_c^\infty(\mathbf{R}^{n+1})$ 的 Fourier 变换, a 是任一实数, k 是任一非负整数.

7.4　假设 $a>1$.

(i) 证明, 对于所有 $(\tau, \xi)\in\mathbf{R}^{n+1}$, 有

$$|(\tau-ia)^2-|\xi|^2| \geqslant a(\tau^2+|\xi|^2+a^2)^{1/2}.$$

(ii) 证明, 当 $k>n/2$ 时,

$$\iint \{(\tau-ia)^2-|\xi|^2\}^{-1}(1+a^2+(\tau-ia)^2+|\xi|^2)^{-k} d\tau d\xi$$

被一与 $a>1$ 无关的常数所界.

7.5　利用习题 7.3 和 7.4 中的结果来证明: 如果 k 是一个大于 $n/2$ 的整数, 那么存在一个不依赖于 $a>1$ 的常数 C, 使得

$$\left|\iint \frac{\hat{\varphi}(\tau-ia, \xi) d\tau d\xi}{(\tau-ia)^2-|\xi|^2}\right| \leqslant C \iint e^{-2at}\left|\left(1+a^2-\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta_x\right)^k \varphi(t, x)\right|^2 dt dx. \tag{7.28}$$

从这个不等式推导, 由(7.21)定义的线性泛函 $\phi\to\langle E_+, \phi\rangle$ 实际上是 $\mathbf{R}^{n+1}$ 上的一个广义函数(不要管 E_+ 的较早的那个定义).

7.6　从习题 7.5 推导, 对于所有的 $\phi\in C_c^\infty(\mathbf{R}^{n+1})$, 有

$$|\langle E_+, \phi\rangle| \leqslant \text{常数}\cdot\iint e^{2at}|(1+a^2-\Delta_{t,x})^k\phi(t, x)|^2 dt dx, \tag{7.29}$$

其中的常数不依赖于 $a>1$[$\Delta_{t,x}$ 表示 $n+1$ 个变量 (t, x) 的 Laplace 算子]. 从不等式(7.29)推导, 如果 ϕ 的支集在半空间 $t<0$ 中, 就有 $\langle E_+, \phi\rangle=0$; 换句话说, E_+ 的支集包含在半空间 $t\geqslant 0$ 中.

7.7　显式地构造 $\mathbf{R}^2$ 中的微分算子 $(\partial/\partial t)^2-(\partial/\partial x)^2+\lambda$ 的一个基本解, 这里 λ 是一个任意的复数.

7.8　对于微分算子(有时称为 *Klein–Gordon* 算子)

$$K_m = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_x + m^2, \tag{7.30}$$

证明类似于命题 7.3 的命题.

7.9 令 V 是一个非零实数. 对于算子

$$\frac{1}{V^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_x, \tag{7.31}$$

证明类似于命题 7.3 的命题. 在这个情形中,光锥的方程是什么?

7.10 证明,$\mathbf{R}^2$ 中的每个 Lorentz 变换都具有(7.27)这样的形式. 把任一 2×2 实矩阵等同于 $\mathbf{R}^4$ 的一个点: 把矩阵的四个元素看作为坐标. 描述相应于 Lorentz 群的 $\mathbf{R}^4$ 的子集. 证明,它由四个连通分支组成.

7.11 令 $\mathscr{L}$ 表示 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的 Lorentz 群, $n\geqslant 1$.

(i) 证明, $T\mapsto {}^tT^{-1}$ 是从 $\mathscr{L}$ 到 $\mathscr{L}$ 上的, 以及从 $\mathscr{L}_+$ 到 $\mathscr{L}_+$ 上的一个同构(对于群结构而言).

(ii) 证明,如果 $T\in\mathscr{L}$, 并且如果我们记

$$B(y, y') = y_{n+1}y'_{n+1} - y_1y'_1 - \cdots - y_ny'_n, \quad y, y'\in\mathbf{R}^{n+1},$$

则

$$B(Ty, Ty') = B(y, y').$$

(iii) 证明,对于任何 $T\in\mathscr{L}$, 有 $\det T = \pm 1$.

7.12 利用习题 7.10 中的结果以及 $\mathbf{R}^n$ 中旋转群的性质, 证明 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的 Lorentz 群 $\mathscr{L}$ 恰由四个连通分支组成.

7.13 把 $\mathbf{R}^{n+1}$ 的具有下述性质的任一子集称为 $\mathscr{L}$(相应地, $\mathscr{L}_+$)的一个**轨道**: 对于某个 x_0, 这个子集是 $\mathscr{L}$(相应地, $\mathscr{L}_+$)在映射 $T\mapsto Tx_0$ 下的象. 描述$\mathscr{L}$(相应地, $\mathscr{L}_+$)的所有的轨道, 并指出在 $n=1$ 和 $n>1$ 这两个情形之间可能存在的差别.

8. 有关波动方程基本解的支集和奇异支集的进一步的性质

除了 $\mathscr{U}$ 和 E_+(参阅 § 7) 的 Fourier 积分表示(7.17), (7.19)或(7.21)之外, 要在(t, x)坐标中得到 $\mathscr{U}$ 和 E_+ 的显式的公式是不容易的. 这一节的附录中导出了两个和三个空间变量情形中的显式公式, 但是, 我们这里要证明, 从 Fourier 积分中可以引出很重要的信息. 我们将要证明 E_+ 的两个重要的性质, 其中之一与 E_+ 的支集(在其外 E_+ 等于零的最小闭集)有关, 而另一个与它的

奇异支集(在其外 E_+ 为一C^∞ 函数的最小闭集)有关. 我们先证明有关 E_+ 的支集的性质(即经典的 Huyghens 原理).

定理 8.1　当 n 是奇数并且 $n>1$ 时, E_+ 的支集恰好等于前向光锥的边界, 即, 等于集合 $\{(t, x); t^2-|x|^2=0, t\geqslant 0\}$. 对于 n 的其它的值, E_+ 的支集恰好等于前向光锥本身.

证明　(1) $n=1$ 的情形. 在这个情形中, 我们证明 E_+ 等于由(7.7)所定义的平面中的广义函数 E_1. 由于(7.12)和(7.15), 有

$$E_+=(2\pi)^{-1}H(t)\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\xi(x+t))-\sin(\xi(x-t))}{\xi}\,d\xi.$$

只需注意到 E_+-E_1 是平面中的齐次波动方程的解这一事实, 直接计算上面这个积分, 我们的论断就将得到证明. 而齐次波动方程的所有的解是知道的: 它们具有 $S(t-x)+T(t+x)$ 的形式, 其中 S 和 T 是一个变量的广义函数. 它们的支集不会包含在半平面 $t\geqslant 0$ 中, 除非它们恒等于零.

(2) $n>1$ 为奇数的情形. 只需证明在前向光锥 Γ_+ 的内部 $\mathring{\Gamma}_+$ 中 $E_+\equiv 0$. 我们知道(由命题 7.2) E_+ 的支集由 $\mathscr{L}_+$ 的轨道组成, 并且(由命题 7.3)包含在 Γ_+ 中, 所以 E_+ 的支集必定等于 Γ_+ 的边界(它不会刚好是$\{0\}$!). 特别, t 总是被假设为大于零的. 在 $\mathring{\Gamma}_+$ 中, E_+ 是当 $\varepsilon\to+0$ 时广义函数

(8.1)
$$E_+^\varepsilon=(2\pi)^{-n}\int_{S_{n-1}}\int_0^{+\infty}\exp[-(\varepsilon-ir\langle\theta,\omega\rangle)\rho]\sin(\rho t)\rho^{n-2}d\rho d\omega$$

的极限, 其中 ρ, ω(相应地, r, θ)表示空间 $\mathbf{R}_n$(相应地, $\mathbf{R}^n$)中的球面坐标, ω(相应地, θ)是单位球面 S_{n-1}(相应地, S^{n-1})上的变量[参阅(7.16)]. 显然,

$$(2\pi)^nE_+^\varepsilon=(-1)^{n-2}\left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\right)^{n-2}\int_{S_{n-1}}I_\varepsilon(s,t)\,d\omega, \tag{8.2}$$

其中,
$$s=r\langle\theta,\omega\rangle,$$
$$I_\varepsilon(s,t)=\int_0^{+\infty}e^{-(\varepsilon-is)\rho}\sin(\rho t)\,d\rho$$
$$=\frac{i}{2}\left\{\frac{1}{\varepsilon-i(s-t)}-\frac{1}{\varepsilon-i(s+t)}\right\}.$$

注意，$(-1)^{n-2}(\partial/\partial\varepsilon)^{n-2}(\varepsilon-a)^{-1}=(n-2)!\ (\varepsilon-a)^{1-n}$，由此即得

(8.3) $$(2\pi i)^n E_+^\varepsilon=-\frac{(n-2)!}{2}\int_{S_{n-1}}\left\{\frac{1}{(t-s-i\varepsilon)^{n-1}}+\frac{(-1)^n}{(t+s+i\varepsilon)^{n-1}}\right\}d\omega.$$

现令 $\varphi=\varphi(t)\in C_c^\infty(\mathbf{R}^1)$，它的支集在正半直线 $t>0$ 中. 稍后还将把 φ 取得与 x 有关. 对于所有的 $k>0$，有

$$k!\int_0^{+\infty}(t-a)^{-k}\varphi(t)\,dt=(k-1)!\int_0^{+\infty}(t-a)^{-k+1}\varphi'(t)\,dt.$$

因而

(8.4) $$(2\pi i)^n\int E_+^\varepsilon(t,\ x)\varphi(t)\,dt$$

$$=-\frac{1}{2(n-1)}\int_{S_{n-1}}\int_0^{+\infty}\left\{\frac{1}{t-s-i\varepsilon}+\frac{(-1)^n}{t+s+i\varepsilon}\right\}\varphi^{(n-2)}(t)\,dt\,d\omega.$$

对于具有任意奇偶性的 n，这个公式都有效. 现在假设 n 是奇的 $(n=3,\ 5,\ \cdots)$. 我们注意，函数

$$g_\varepsilon(s,\ t)=(t-s-i\varepsilon)^{-1}-(t+s+i\varepsilon)^{-1}$$

关于 ω 在 S_{n-1} 上的积分等于 g_ε 的偶部 $g_\varepsilon^+(s,t)=\frac{1}{2}[g_\varepsilon(s,\ t)+g_\varepsilon(-s,\ t)]$ 的积分. 我们有

$$g_\varepsilon^+(s,\ t)=h_\varepsilon(t-s)+h_\varepsilon(t+s),$$

其中 $$h_\varepsilon(\tau)=\frac{1}{2}[(\tau-i\varepsilon)^{-1}-(\tau+i\varepsilon)^{-1}]=\frac{i\varepsilon}{\tau^2+\varepsilon^2}.$$

因此，

$$\int_0^{+\infty}h_\varepsilon(t-s)\varphi^{(n-2)}(t)\,dt=i\int_{-s/\varepsilon}^{+\infty}\varphi^{(n-2)}(s+\varepsilon\tau)\frac{d\tau}{1+\tau^2},$$

$$\int_0^{+\infty}h_\varepsilon(t+s)\varphi^{(n-2)}(t)\,dt=i\int_{s/\varepsilon}^{+\infty}\varphi^{(n-2)}(-s+\varepsilon\tau)\frac{d\tau}{1+\tau^2},$$

所以，当 $\varepsilon\to+0$ 时，有

$$\int_0^{+\infty}g_\varepsilon^+(s,\ t)\varphi^{(n-2)}(t)\,dt\to i\pi\varphi^{(n-2)}(|s|).$$

现在取 $\varphi=\varphi(t,\ x)\in C_c^\infty(\mathbf{R}^{n+1})$，它的支集包含在开锥

(8.5) $$t>|x|$$

中. 从(8.4)以及上面的计算，就得到结论

$$\iint E_+(t,\ x)\varphi(t,\ x)dtdx$$
$$=-(2\pi i)^{-n}\frac{1}{2(n-1)}\int_{\mathbf{R}^n}\int_{S_{n-1}}\varphi^{(n-2)}(|s|,\ x)d\omega dx.$$

但是 $|s|\leqslant r=|x|$，因而点$(|s|,\ x)$不属于集合(8.5)，因此$\varphi(|s|,\ x)=0$.

(3) n 是偶数的情形．我们回到(8.4)，取 $\varphi=\varphi(t,\ x)$ 如上所述，并注意，和以前一样，在 φ 的支集上 $|s|<t$．此时，当 $\varepsilon\to+0$ 时可以在(8.4)中取极限，因此得到

(8.6)

$$\iint E_+(t,\ x)\varphi(t,\ x)dtdx$$
$$=-\frac{1}{n-1}(2\pi i)^{-n}\int_{\mathbf{R}^n}\int_0^{+\infty}\int_{S_{n-1}}\frac{1}{t^2-s^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n-2}\varphi(t,x)dtdxd\omega.$$

这意味着，在前向光锥的内部，E_+ 由函数

$$(8.7)\qquad -\frac{1}{n-1}(2\pi i)^{-n}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n-2}\int_{S_{n-1}}\frac{td\omega}{t^2-r^2\langle\omega,\ \theta\rangle^2}$$

所定义．显然，(8.7)是$(t,\ r^2)$的一个解析函数，因而是集合(8.5)中$(t,\ x)$的解析函数．如果它在(8.5)的某一开子集中等于零，那么它必定在整个(8.5)中等于零，因为集合(8.5)是连通的．此时，函数

$$(8.8)\qquad \int_{S_{n-1}}\frac{td\omega}{t^2-r^2\langle\omega,\ \theta\rangle^2}$$

关于 t 应该是一个多项式(次数 $<n-2$)．但是在每个锥 $r<\lambda t(\lambda<1)$中，当 $t\to+\infty$ 时它趋于零；因而，如果它是 t 的一个多项式，就应该恒等于零．但这是不对的，因为它 $\geqslant t^{-1}|S_{n-1}|$，这里$|S_{n-1}|$是 S_{n-1} 的面积．

我们也证明了原来说过的与 E_+ 的奇异支集有关的第二个结果：

定理 8.2　在前向光锥的边界的余集中，$E_+(t,\ x)$是$(t,\ x)$的解析函数．

在 $n=1$ 时此论断是显然的，因为此时 $E_+(t,\ x)$ 在前向光锥

的边界之外是一个常数．当 n 是奇数并且 $n>1$ 时，在此边界之外 $E_+=0$．当 n 是偶数时，我们曾证明在前向光锥的内部 E_+ 由函数(8.7)所定义，而我们已经说过，(8.7)是$(t,\ r^2)$的一个解析函数．

附录　在两个和三个空间变量的情形中 E_+ 的显式表示

我们的出发点是(8.3)．

两个空间变量情形中的 E_+

在这个情形中，(8.3)变为

$$(8.9)\qquad E_+^\varepsilon=\frac{H(t)}{8\pi^2}\int_{S_1}\left\{\frac{1}{t-s-i\varepsilon}+\frac{1}{t+s+i\varepsilon}\right\}d\omega.$$

我们回忆一下，$s=r\langle\theta,\ \omega\rangle$，其中 θ 是 S^1 上的变点，$r=|x|$．但是，形为 $\int_{S_{n-1}}f(\langle\theta,\ \omega\rangle)d\omega$ 的任一积分是与 $\theta\in S^{n-1}$ 无关的；因此可以任意选取 θ：把它取为沿着第一个坐标轴的单位向量．因此，如果记 $\omega=(\cos\varphi,\ \sin\varphi)$，则 $\langle\theta,\ \omega\rangle=\cos\varphi$．我们有

$$E_+^\varepsilon=\frac{H(t)}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{1}{t-r\cos\varphi-i\varepsilon}+\frac{1}{t+r\cos\varphi+i\varepsilon}\right\}d\varphi.$$

我们来考察积分

$$J_+^\varepsilon=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{t+r\cos\varphi+i\varepsilon}=\oint_{|z|=1}\frac{1}{t+\frac{1}{2}r(z+z^{-1})+i\varepsilon}\,\frac{dz}{2\pi iz}.$$

令 $a=r/(t+i\varepsilon)$．则

$$\frac{1}{2}(t+i\varepsilon)J_+^\varepsilon=(2\pi i)^{-1}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{az^2+2z+a}.$$

类似地，

$$J_-^\varepsilon=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{t-r\cos\varphi-i\varepsilon}=\oint_{|z|=1}\frac{1}{t-\frac{1}{2}r(z+z^{-1})-i\varepsilon}\,\frac{dz}{2\pi iz},$$

由此得到

$$\frac{1}{2}(t-i\varepsilon)J_{-}^{\varepsilon}=-(2\pi i)^{-1}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{\bar{a}z^2-2z+\bar{a}}.$$

先考虑 $r>t\geqslant 0$ 的情形. 若 $\varepsilon>0$ 充分小, 则 $|a|>1$. 事实上, 令

$$a^{-1}=\frac{t+i\varepsilon}{r}=b+i\eta, \quad b=\frac{t}{r}<1,$$

当 $\varepsilon\to+0$ 时 $\eta\to+0$. 多项式 $f_+(z)=z^2+2(b+i\eta)z+1$ 有两个根:

$$\lambda_\alpha=-b-i\eta+\alpha i(1-(b+i\eta)^2)^{1/2}, \quad \alpha=\pm 1.$$

在忽略 η^2 的意义下, 我们有

$$\begin{aligned}
\lambda_\alpha &= -b-i\eta+\alpha i(1-b^2)^{1/2}\left(1-\frac{2ib\eta}{1-b^2}\right)^{1/2}\\
&= -b-i\eta+\alpha i(1-b^2)^{1/2}\left(1-\frac{ib\eta}{1-b^2}\right)\\
&= -b-i\eta+\alpha i(1-b^2)^{1/2}+\alpha b\eta(1-b^2)^{-1/2}\\
&= -b\{1-\alpha\eta(1-b^2)^{-1/2}\}+\alpha i\{(1-b^2)^{1/2}-\alpha\eta\}\\
&= [-b+\alpha i(1-b^2)^{1/2}]\{1-\alpha\eta(1-b^2)^{-1/2}\}.
\end{aligned}$$

由此推得, 对于充分小的 $\eta>0$, 有[1)]

$$|\lambda_\alpha| \# 1-\alpha\eta(1-b^2)^{-1/2}. \tag{8.10}$$

类似地, 多项式 $f_-(z)=z^2-2(\bar{a})^{-1}z+1=z^2-2(b-i\eta)z+1$ 有两个根:

$$\mu_\alpha=b-i\eta+\alpha i(1-(b-i\eta)^2)^{1/2},$$

当 $\eta>0$ 充分小时, 有

$$|\mu_\alpha| \# 1-\alpha\eta(1-b^2)^{-1/2} \tag{8.11}$$

(注意, 用 $-b$ 代替 b, 即从 f_+ 得到 f_-). 当 $\alpha=+1$ 时, λ_α 和 μ_α 属于圆盘 $|z|<1$; 当 $\alpha=-1$ 时, 它们位于这个圆盘的闭包之外. f_+^{-1} 在 $z=\lambda_{+1}$ 处的残数等于

$$R_+=\frac{1}{2i}(1-(b+i\eta)^2)^{-1/2},$$

1) 译者注: 符号"#"表示在忽略了高阶无穷小意义下的等式.

f_-^{-1} 在 $z=\lambda_{+1}$ 处的残数等于 $R_-=(1/2i)(1-(b-i\eta)^2)^{-1/2}$. 这样，当 $\eta\to+0$ 时，也就是当 $\varepsilon\to+0$ 时，

$$J_+^\varepsilon+J_-^\varepsilon=\frac{1}{2ir}\{(1-(b+i\eta)^2)^{-1/2}-(1-(b-i\eta)^2)^{-1/2}\}$$

收敛于零. 因此，我们证明了当 $r>t$ 时 $E_+=0$, 我们曾经从命题 7.3 知道过这一点.

现在考虑 $r\leqslant t$ 的情形; 对于每个 $\varepsilon>0$, 我们有 $|a|<1$. 上面给出的多项式 f_+ 现在有根:

$$\lambda_\alpha=-\frac{1}{a}+\alpha\frac{1}{a}(1-a^2)^{1/2}\#-\frac{1}{a}+\alpha\frac{1}{a}\left(1-\frac{a^2}{2}\right)$$

$$\#-\frac{1}{a}(1-\alpha)-\alpha\frac{a}{2}.$$

如果 $\alpha=-1$, 那么 $\lambda_\alpha\#-(2/a)(1-a^2/4)$ 在圆盘 $|z|\leqslant 1$ 之外，而如果 $\alpha=+1$, 那么 λ_α 属于开圆盘 $|z|<1$(对于充分小的 $\varepsilon>0$). 既然我们是用 $-\bar{a}$ 代替 a 来从 f_+ 过渡到 f_- 的，所以类似的结论也适用于 f_- 的根 μ_α: 当 $\alpha=+1$ 时，μ_α 属于圆盘 $|z|<1$, 当 $\alpha=-1$ 时，μ_α 属于其外部 $|z|>1$. f_+^{-1} 在 λ_{+1} 处的残数等于

$$R_+=\frac{a}{2}(1-a^2)^{-1/2},$$

f_-^{-1} 在 μ_{+1} 处的残数等于 $R_-=-(\bar{a}/2)(1-\bar{a}^2)^{-1/2}$, 因而，

$$\begin{aligned}J_+^\varepsilon+J_-^\varepsilon&=(t+i\varepsilon)^{-1}(1-a^2)^{-1/2}+(t-i\varepsilon)^{-1}(1-\bar{a}^2)^{-1/2}\\&=2\mathrm{Re}[(t+i\varepsilon)^{-1}(1-a^2)^{-1/2}]=2\mathrm{Re}[(t+i\varepsilon)^2-r^2]^{-1/2}\end{aligned}$$

(平方根总是表示在正实轴上大于零的那个分枝).

最后我们注意，函数 $H(t^2-r^2)(t^2-r^2)^{-1/2}$ 在 $\mathbf{R}^3$ 中是局部可积的($\mathbf{R}^3$ 中的测度是 $rdrd\theta dt$). 事实上，

$$\int_{t=t_0}^{t=t_1}\int_{r=0}^{r=|t|}(t^2-r^2)^{-1/2}r\,dr\,dt=\int_{t_0}^{t_1}|t|\,dt.$$

这样，$J_+^\varepsilon+J_-^\varepsilon$ 收敛于 $2H(t^2-r^2)(t^2-r^2)^{-1/2}$. 换言之，有

$$E_+=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}(t^2-r^2)^{-1/2} & \text{如果 } r<t,\\ 0 & \text{如果 } r\geqslant t.\end{cases}\tag{8.12}$$

三个空间变量情形中的 E_+

当 $n=3$ 时, (8.3) 变为

(8.13)

$$-E_+^\varepsilon=\frac{1}{2}(2\pi i)^{-3}H(t)\int_{S_2}\left\{\frac{1}{(t-s-i\varepsilon)^2}-\frac{1}{(t+s+i\varepsilon)^2}\right\}d\omega$$

$$=\frac{1}{2}(2\pi i)^{-3}H(t)\left(-\frac{\partial}{\partial t}\right)\int_{S_2}\left\{\frac{1}{t-s-i\varepsilon}-\frac{1}{t+s+i\varepsilon}\right\}d\omega.$$

对于 ξ 变量, 我们用球面坐标:

$$\xi_1=\rho\cos\varphi_1\cos\varphi_2,\qquad \xi_2=\rho\sin\varphi_1\cos\varphi_2,\qquad \xi_3=\rho\sin\varphi_2,$$

并在 $s=r\langle\theta,\omega\rangle$ 中选 θ 为坐标 x^3 方向上的单位向量, 即, $\langle\theta,\omega\rangle=\sin\varphi_2$. 利用

$$d\omega=\frac{1}{2}|\cos\varphi_2|\,d\varphi_1 d\varphi_2$$

这一事实, 如果容许 φ_1 和 φ_2 都在 0 到 2π 之间变动, 并注意

$$\int_{S_2}f(\sin\varphi_2)d\omega=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\sin\varphi_2)|\cos\varphi_2|\,d\varphi_1d\varphi_2$$

$$=2\pi\int_0^{\pi/2}[f(\sin\varphi_2)+f(-\sin\varphi_2)]\cos\varphi_2d\varphi_2$$

$$=2\pi\int_0^1[f(u)+f(-u)]du,$$

把它与 (8.13) 组合起来即导致

(8.14)

$$-E_+^\varepsilon=\frac{i}{2}(2\pi)^{-2}H(t)\left(-\frac{\partial}{\partial t}\right)\int_0^1\left\{\frac{1}{t-ru-i\varepsilon}+\frac{1}{t+ru-i\varepsilon}-\frac{1}{t+ru+i\varepsilon}-\frac{1}{t-ru+i\varepsilon}\right\}du$$

$$=(2\pi)^{-2}H(t)\frac{\partial}{\partial t}\int_0^1\left\{\frac{1}{(t+ru)^2+\varepsilon^2}+\frac{1}{(t-ru)^2+\varepsilon^2}\right\}\varepsilon du$$

$$=(2\pi)^{-2}H(t)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial t}\int_{t-r}^{t+r}\frac{\varepsilon dv}{v^2+\varepsilon^2}$$

$$=(2\pi)^{-2}H(t)\frac{\varepsilon}{r}\left\{\frac{1}{(t+r)^2+\varepsilon^2}-\frac{1}{(t-r)^2+\varepsilon^2}\right\}.$$

现在令 φ 是 $C_c^\infty(\mathbf{R}^4)$ 的任一元素，并令（参阅 § 9）

$$\varphi_\sharp(t, r) = (4\pi)^{-1}\int_{S^2}\varphi(t, r, \theta)d\theta.$$

由于(8.14)，我们有

$$\langle E_+^\varepsilon, \varphi\rangle = 4\pi\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}E_+^\varepsilon(t, r)\varphi_\sharp(t, r)r^2drdt$$

$$= -\varepsilon\pi^{-1}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\varphi_\sharp(t, r)\left\{\frac{1}{(t+r)^2+\varepsilon^2} - \frac{1}{(t-r)^2+\varepsilon^2}\right\}rdrdt.$$

在最后一个表达式中，关于 t 的积分等于

$$J^\varepsilon = \int_r^{+\infty}\varphi_\sharp(s-r, r)\frac{ds}{s^2+\varepsilon^2} - \int_{-r}^{+\infty}\varphi_\sharp(s+r, r)\frac{ds}{s^2+\varepsilon^2}$$

$$= \varepsilon^{-1}\left\{\int_{r/\varepsilon}^{+\infty}\varphi_\sharp(-r+\varepsilon t, r)\frac{dt}{t^2+1} - \int_{-r/\varepsilon}^{+\infty}\varphi_\sharp(r+\varepsilon t, r)\frac{dt}{t^2+1}\right\}.$$

对于 $r>0$，$\varepsilon J^\varepsilon$ 收敛于 $-\pi\varphi_\sharp(r, r)$。这样就得到结论：

$$\langle E_+, \varphi\rangle = \int_0^{+\infty}\varphi_\sharp(r, r)rdr. \tag{8.15}$$

用广义函数的记号，可把这个关系改写为

$$E_+ = (4\pi)^{-1}\frac{1}{r}\delta(t-r). \tag{8.16}$$

注 8.1 当 $n=2$ 时，如在(8.12)中看到的，E_+ 的支集是集合 $r\leqslant t$；当 $n=3$ 时，(8.16)指出了 E_+ 的支集是集合 $r=t$。自然，这与定理 8.1 是一致的。

注 8.2 在 $n=2$ 和 $n=3$ 这两个情形中，我们发现 E_+ 是一个 Radon 测度；事实上，当 $n=2$ 时，关于 Lebesgue 测度 E_+ 是绝对连续的：它具有 $h(x, t)dxdt$ 的形式，其中 h 是局部可积的（但不是有界的；与 $n=1$ 的情形比较）。当 $n=3$ 时，如我们在(8.15)中看到的，E_+ 是一个测度，其支集在前向光锥的边界曲面 $r=t$ 上。当 $n\to+\infty$ 时，E_+ 变得越来越不"正规"：对于 $n=4$，它不再是一个测度，它是一个支集在前向光锥中的测度的广义函数导数

(当 $n=1, 2, 3$ 的时候已经可以看到，随着变量数目的增加，E_+ 的奇异性也增加).

习　题

8.1　令 m 是一个不等于零的实数，$E_+(m)$ 是 Klein-Gordon 算子(7.30)的支集在前向光锥中的基本解. 叙述并证明与定理 8.1 和定理 8.2 类似的结果；特别，指出 Huyghens 原理变为什么形式.

8.2　当空间维数 $n\geqslant 5$ 为奇数时，计算波动算子的基本解 E_+ (参阅 § 8 的附录的第二部分).

8.3　当 $t\geqslant|x|$ 时(即，在前向光锥中)令 $s=(t^2-|x|^2)^{1/2}$，当 $t<|x|$ 时，令 $s=0$. 证明，在域 $\mathrm{Re}\,\alpha>-2$ 中，

(8.17)
$$\langle F(\alpha), \phi\rangle=\iint s^\alpha\phi(t, x)dtdx, \quad \phi\in C_c^\infty(\mathbf{R}^{n+1})$$

定义了 α 的一个全纯函数，它取值于 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的广义函数空间 $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^{n+1})$ 中.

证明，对于满足 $\mathrm{Re}\,\alpha>0$ 的所有复数 α，有

(8.18)
$$\Box F(\alpha)=\alpha(\alpha-1+n)F(\alpha-2),$$

其中 $\Box$ 是 d'Alembert 算子 $(\partial/\partial t)^2-\Delta_x$. [提示：对于空间变量利用球面坐标，并参阅命题 9.3.]

8.4　令 $F(\alpha)$ 是(8.17)中所定义的广义函数，并令

(8.19)
$$Z_\alpha=\pi^{-(n-1)/2}\frac{F(\alpha-n-1)}{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha/2)\Gamma((\alpha-n+1)/2)},$$

其中 Γ 是 Euler γ 函数(广义函数 Z_α 由 Marcel Riesz 引入，并称为 *Riesz 位势*).

证明，$\Box Z_\alpha=Z_{\alpha-2}$ ($\Box$ 是 $\mathbf{R}^{n+1}$ 上的波动算子)，并证明，Z_α 可延拓为 $\mathbf{C}$ 中 α 的一个整函数，取值于 $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^{n+1})$ 中. 证明，对于所有复数 α，Z_α 的支集包含在前向光锥中.

8.5　令 Z_α 是 Riesz 位势 (8.19). 当 $n=2$ 时，计算 Z_2，并由此推导 Z_0 的值.

当 $n=3$ 时，计算 Z_4，并由此推导 Z_2 和 Z_0 的值.

8.6　假设奇数 $n>1$. 承认 $Z_0=\delta$ 这一事实，推导 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中波动算子的(支集在前向光锥中的)基本解 E_+ 的明显的公式；此时，E_+ 的支集由前向光锥的边界曲面所支撑这一事实就一目了然了.

8.7　令 Z_α 是 Riesz 位势(8.19). 证明，

$$W_\lambda=\sum_{p=0}^{+\infty}\lambda^p Z_{2p+2} \tag{8.20}$$

定义了一个取值于 $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^{n+1})$ 中的、复变量 λ 的整函数，它是 $\square-\lambda$ 的一个基本解．(读者不妨承认 Z_0 是 Dirac 测度．)

9．Laplace 方程的基本解

在这一节中，我们要解 $\mathbf{R}^n$ 中的方程

$$\Delta E=\delta. \tag{9.1}$$

我们回忆一下，

$$\Delta=\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)^2. \tag{9.2}$$

我们可以象前几节中那样进行，在关于变量 x 中的 $n-1$ 个变量施行一个 Fourier 变换之后，就把问题化为解一个关于余下变量(譬如说)x^n 的常微分方程的问题．方程(9.1)就变为

$$(\partial/\partial x^n)^2\widetilde{E}-(\xi_1^2+\cdots+\xi_{n-1}^2)\widetilde{E}=\delta(x^n). \tag{9.3}$$

但是在现在的情形，这个手续极不自然．选出一个变量，就破坏了事情的根本的对称性．Laplace 算子出现在物理学的许多偏微分方程中，这些偏微分方程是描述发生在*各向同性介质*中的现象的．因而，更自然而更方便的，是采用一种不同的方法——这种方法不是忽视而是充分利用 Laplace 算子 Δ 是*旋转不变的*这个事实．实际上，这个新方法，象在 § 5 到 § 7 中所用的方法一样，把问题归结为解一个线性常微分方程．但是在这里，变量将是径向变量

$$r=|x|=[(x^1)^2+\cdots+(x^n)^2]^{1/2},$$

而方程不再具有常系数了．虽然如此，我们还是能够解此方程而没有太大困难[当 $n\geqslant 3$ 时，在习题 6.5 中指出了一个解(9.1)的不同的，然而也许是巧妙的方法．]

我们必须从某些一般的考虑开始，这些考虑来自 Laplace 算子在旋转下的不变性．事实上，我们将不仅利用 Δ 在旋转下的不变性，还要利用它在完全的*正交群* $O(n)$ 下的不变性．这是 $\mathbf{R}^n$ 的一个线性变换群，这些变换保持二次型 $|x|^2$ 不变．

命题 9.1　令 T 是 $\mathbf{R}^n$ 的任一正交变换，u 是 $\mathbf{R}^n$ 中任一具紧支集的 C^∞ 函数. 我们有

$$(\Delta u)^T = \Delta(u^T). \tag{9.4}$$

证明　只需利用下述一些考虑：线性变换在函数上的作用，以及它们在 Fourier 变换式上的"反射"(参阅第 48, 49 页). 我们注意，如果 $T \in O(n)$, $\det T = \pm 1$, 则

$$\widehat{f^T} = \hat{f}^{{}^tT^{-1}}.$$

但是如果 $T \in O(n)$，那么它的逆步 (contragradient) ${}^tT^{-1}$ 也属于 $O(n)$. 由 Fourier 变换，方程(9.4)等价于

$$(\widehat{\Delta u})^{{}^tT^{-1}} = \widehat{\Delta(u^T)}. \tag{9.5}$$

这又可写为

$$(|\xi|^2\hat{u})^{{}^tT^{-1}} = |\xi|^2\hat{u}^{{}^tT^{-1}}. \tag{9.6}$$

回忆起 $v^{{}^tT^{-1}}(\xi) = v({}^tT\xi)$，则从显然的等式

$$|{}^tT\xi|^2 = |\xi|^2$$

就得到(9.6).　　　　证毕.

事实上，我们也证明了：如果一个线性变换 T 保持 Δ 不变，那么它是一个正交变换.

利用一个广义函数在 $\mathbf{R}^n$ 的一个线性变换下的变换的定义(7.24)，容易看到，对于一个任意的广义函数 u，公式(9.4)仍然有效.

我们引进函数 f 在半径为 $r = |x|$，中心在原点的球面上的平均值(average)：

$$f_\natural(x) = |S^{n-1}|^{-1}\int_{S^{n-1}} f(r\dot{x})\,d\dot{x},$$

这里，$\dot{x}$ 表示单位球面 S^{n-1} 上的变量；$|S^{n-1}|$ 表示 S^{n-1} 的面积(有关单位球面面积的计算，请参阅这一节的附录). 注意，虽然 $f_\natural(x)$ 只是 r 的函数，但不是 $\mathbf{R}^1_+$ 上的函数；它是 $\mathbf{R}^n$ 上的一个函数. 虽然如此，我们有时仍将用 $f_\natural(r)$ 表示它.

命题 9.2　给定 $\mathbf{R}^n$ 中任一 C^∞ 函数 f，我们有

$$\Delta(f_\natural) = (\Delta f)_\natural. \tag{9.7}$$

证明 这里给出的证明不是初等的；不熟悉局部紧致群上 Haar 测度理论的读者不妨跳过此证明而去做习题 9.2.

用 dT 表示紧致群 $O(n)$ 上正规化的 Haar 测度，即有 $\int_{O(n)} dT = 1$；并令

$$f^\natural(x) = \int_{O(n)} f(Tx)\, dT. \tag{9.8}$$

平均值 $f^\natural(x)$ 是 $O(n)$ 不变的：

$$f^\natural(T_0^{-1}x) = \int_{O(n)} f(TT_0^{-1}x)\, dT = \int_{O(n)} f(Tx)\, dT$$

[因为 dT 是左不变和右不变的：$O(n)$，既然是紧致的，因而也是么模的(unimodular)]. 因此，$f^\natural$ 在半径为 $|x|$ 的球面上的平均值等于 $f^\natural(x)$：

$$(f^\natural)_\natural = f^\natural. \tag{9.9}$$

另一方面，$f_\natural(Tx) = f_\natural(x)$，因而

$$(f_\natural)^\natural(x) = \int_{O(n)} f_\natural(Tx)\, dT = f_\natural(x) \int_{O(n)} dT = f_\natural(x),$$

即

$$(f_\natural)^\natural = f_\natural. \tag{9.10}$$

但由于 Fubini 定理，我们可以交换在 S^{n-1} 上和在 $O(n)$ 上的积分的次序. 这样就得到

$$(f^\natural)_\natural = (f_\natural)^\natural,$$

因而，由(9.9)和(9.10)，有

$$f^\natural = f_\natural. \tag{9.11}$$

最后，由在积分号下求导的规则，我们有

$$\Delta(f^\natural)(x) = \int_{O(n)} \Delta[f(Tx)]\, dT,$$

由于命题 9.1，它等于

$$\int_{O(n)} (\Delta f)(Tx)\, dT = (\Delta f)^\natural(x),$$

即

$$\Delta(f^\natural) = (\Delta f)^\natural. \tag{9.12}$$

组合(9.11)和(9.12)即产生(9.7). 证毕.

命题 9.3 当作用在仅依赖于 $r = |x|$ 的函数 $\varphi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ 时，有

(9.13)
$$\Delta=\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2+\frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r}.$$

证明　令 $f(r)$ 只是 r 的函数. 则
$$\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)f(r)=f'(r)\frac{\partial r}{\partial x^j}=f'(r)\frac{x^j}{r},$$
因而
$$\begin{aligned}(\partial/\partial x^j)^2f(r)&=\frac{1}{r}f'(r)+x^j(\partial/\partial x^j)\left(\frac{1}{r}f'(r)\right)\\&=\frac{1}{r}f'(r)+x^j\left(\frac{1}{r}f'(r)\right)'\frac{x^j}{r}\\&=\frac{1}{r}f'(r)+\frac{(x^j)^2}{r^2}f''(r)-\frac{(x^j)^2}{r^3}f'(r).\end{aligned}$$
关于 $1,\cdots,n$ 求和, 就得到
$$\Delta f(r)=\left(\frac{n}{r}-\frac{1}{r^3}\sum_{j=1}^n(x^j)^2\right)f'(r)+f''(r).$$
证毕.

现在令 u 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个广义函数, 它由一个只依赖于 r 的局部可积函数定义, 用 $f(r)$ 表示后者. 给定任一 $\varphi\in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$, 我们有

(9.14)
$$\begin{aligned}\langle u,\varphi\rangle&=\int f(r)\varphi(x)dx=\iint f(r)\varphi(r\dot{x})r^{n-1}drd\dot{x}\\&=|S^{n-1}|\int_0^{+\infty}f(r)\varphi_\natural(r)r^{n-1}dr,\end{aligned}$$
其中(有点不恰当地), $\varphi_\natural(r)=\varphi_\natural(x)$, 这里 $r=|x|$ [即, 这里 $\varphi_\natural(r)$ 是单个实变量 $r\in\mathbf{R}_+$ 的函数, 而以前 $\varphi_\natural(x)$ 表示 $\mathbf{R}^n$ 上的函数, 它在以原点为中心的球面上是常数]. 在(9.14)中用 $\Delta\varphi$ 代替 φ:
$$\begin{aligned}\langle u,\Delta\varphi\rangle&=|S^{n-1}|\int_0^{+\infty}f(r)(\Delta\varphi)_\natural(r)r^{n-1}dr\\&=|S^{n-1}|\int_0^{+\infty}f(r)\Delta(\varphi_\natural)(r)r^{n-1}dr\qquad\text{(由命题 9.2)}\\&=|S^{n-1}|\int_0^{+\infty}f(r)\left(\frac{d}{dr}+\frac{n-1}{r}\right)\frac{d\varphi_\natural}{dr}r^{n-1}dr\\&\qquad\qquad\text{(由命题 9.3)}\\&=|S^{n-1}|\int_0^{+\infty}f(r)\frac{d}{dr}\{r^{n-1}\varphi_\natural'(r)\}dr.\end{aligned}$$

假设 f 关于 r 的导数在 $\mathbf{R}^n$ 中也是局部可积的; 我们可以分部积分:

$$\langle u, \Delta\varphi\rangle = |S^{n-1}|\{[r^{n-1}f(r)\varphi'_\sharp(r)]_{r=0}^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f'(r)\varphi'_\sharp(r)r^{n-1}dr\}.$$

回想起 $n>1$ 且 φ 有紧支集, 我们就看到, 已积出的项等于零, 因而

$$\langle u, \Delta\varphi\rangle = -|S^{n-1}|\int_0^{+\infty} \frac{df}{dr}\frac{d\varphi_\sharp}{dr} r^{n-1}dr. \tag{9.15}$$

这里, 我们注意

$$-\int_0^{+\infty} \frac{d\varphi_\sharp}{dr}dr = \varphi_\sharp(0) = \varphi(0).$$

因而, 如果能确定只依赖于 r 的局部可积函数 f, 使得

$$r^{n-1}\frac{df}{dr} = |S^{n-1}|^{-1}, \quad r>0, \tag{9.16}$$

则我们就有

$$\langle u, \Delta\varphi\rangle = \langle \Delta u, \varphi\rangle = \varphi(0); \tag{9.17}$$

换言之, u 即为 Laplace 算子的一个基本解. 并且, u 为 Δ 的一个旋转不变的基本解.

解(9.16)是直接的. 取 $f=F$:

$$F(r) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\log r & \text{当 } n=2 \text{ 时}, \\ -\dfrac{1}{(n-2)|S^{n-1}|}\dfrac{1}{r^{n-2}} & \text{当 } n>2 \text{ 时}, \end{cases} \tag{9.18}$$

就得到(9.16)的一个特解. 因为 $\mathbf{R}^n$ 中的体积元素是 $r^{n-1}drd\theta$, 我们立即看出由(9.18)给出的 $f(r)$ 确实是局部可积的, 它关于 r 的导数也是局部可积的[事实上, 由(9.16), 这一点是显然的].

可以应用定理 3.1 而得到 Weyl 引理.

定理 9.1 Laplace 算子是解析次椭圆的.

这定理又使我们能够确定 Δ 的所有的旋转不变的基本解, 它们中的每一个与由 (9.18) 中的函数 F 定义的基本解相差齐次 Laplace 方程 $\Delta u=0$ 的一个解 u. 由定理 9.1, u 由 $\mathbf{R}^n$ 中的一个解析函数定义; 这函数必定是旋转不变的, 所以它必定是定义 u 的函数[如以前一样, 记为 $f(r)$]. 首先注意,

$$r\frac{df}{dr}=\sum_{j=1}^{n}x^j\frac{\partial}{\partial x^j}f(r)$$

是 x 的一个解析函数，并且注意，当 $k\geqslant 1$ 时，$(d/dr)(r^k df/dr)$ 在任一有限区间 $[0,\ R]$ 上是 r 的一个有界函数，当 $r>0$ 时是解析的．根据(9.15)，对于 $\mathbf{R}^n$ 中任意试验函数 φ，必有

$$\int_0^{+\infty}\frac{df}{dr}\frac{d\varphi_\sharp}{dr}r^{n-1}dr=-\int_0^{+\infty}\frac{d}{dr}\left(r^{n-1}\frac{df}{dr}\right)\varphi_\sharp\,dr=0;$$

因而，由我们先前的考虑，即有

$$\frac{d}{dr}\left(r^{n-1}\frac{df}{dr}\right)=0.$$

这意味着 $df/dr=Cr^{1-n}$，因而，当 $n>2$ 时，$f=[C/(2-n)]r^{2-n}+C_1$；当 $n=2$ 时，$f=C\log r+C_1$．在所有情形中，只有当 $C=0$ 时，f 在区间 $[0,\ R]$ 中才会是有界的，而事实上 f 应该是有界的．因而，在所有的情形中，我们得到 $f=C_1=$ 常数．

注 9.1 我们终将证明，调和函数在球心处的值等于它在球面上的平均值．这立即导出，旋转不变的唯一的调和函数是常数函数．

我们来总结一下到目前为止我们所得到的结果．

定理 9.2 (9.18)中的函数 $F(r)$ 定义了 Laplace 算子 Δ 的一个旋转不变的基本解．Δ 的每个旋转不变的基本解由形为 $F(r)+\mathrm{const}$ 的局部可积函数定义．

用 E 表示 Δ 的由 (9.18) 中的 $F(r)$ 定义的基本解．如果把(9.14)应用于 $u=E$，就得到

$$\langle E,\ \varphi\rangle=\begin{cases}\displaystyle\int_0^{+\infty}\varphi_\sharp(r)r\log r\,dr & \text{当 } n=2 \text{ 时},\\[2ex] \displaystyle -\frac{1}{n-2}\int_0^{+\infty}\varphi_\sharp(r)r\,dr & \text{当 } n>2 \text{ 时}.\end{cases}\tag{9.19}$$

附录 单位球面面积的计算

假设 $n\geqslant 1$，并令 $I_n=\int_{\mathbf{R}^n}\exp(-|x|^2)dx$．显然，$I_n=I_1^n$，并

且，转换到极坐标，有 $I_n=|S^{n-1}|\int_0^{+\infty}\exp(-r^2)r^{n-1}dr$（当 $n=1$ 时，对于组成 S^0 的两个点 $x=+1$ 和 $x=-1$ 的每一点，假设其“面积”为 1，这样就有 $|S^{n-1}|=2$）．所以，$I_2=2\pi\int_0^{+\infty}\exp(-r^2)rdr=\pi$，因此，$I_1=\sqrt{\pi}$．现在假设 $n\geqslant 2$，并令 $r^2=s$，就得到

$$2I_n=|S^{n-1}|\int_0^{+\infty}e^{-s}s^{-1+n/2}ds=|S^{n-1}|\Gamma(n/2),$$

其中，$\Gamma(z)=\int_0^{+\infty}e^{-s}s^{z-1}ds(\mathrm{Re}\,z>0)$ 是 *Euler* γ 函数．这样，对于所有的 $n=1,2,\cdots$，就得到

$$|S^{n-1}|=2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2).$$

由此容易推得更明确的值．当 $n=2p$ 时，我们有

$$|S^{2p-1}|=2\pi^p/(p-1)!.$$

当 $n=2p+1$ 时，$\Gamma(n/2)=\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)=\left(p-\frac{1}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$，我们已经知道 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2I_1/|S^0|=I_1=\sqrt{\pi}$，由此，

$$|S^{2p}|=2^{p+1}\pi^p/[1\cdot 3\cdots(2p-1)].$$

习　　题

[在下面这些习题中，Δ 总表示 $\mathbf{R}^n$ 中的 Laplace 算子 $\sum_{j=1}^n(\partial/\partial x^j)^2$，$r$ 表示 Euclid 范数 $|x|$．假设 $n\geqslant 2$.]

9.1　对于每个复数α，令 V_α 表示复数域上的一个二维线性空间，它的基是（$\mathbf{R}^n\backslash\{0\}$ 中的）两个函数 r^α，$r^\alpha\log r$．证明，Δ 诱导一个线性映射 $V_\alpha\to V_{\alpha-2}$，并写出表示这个映射的 2×2 矩阵．对于不同的 α 值，完全地描述这个映射的内射性（injectivity）性质．

再把 V_α 看作 $\mathbf{R}^n$ 上的广义函数的线性空间，描述 ΔV_{2-n}.

9.2　令m是一个 $\geqslant 1$ 的任意整数．利用习题 9.1 的记号和结果，构造 $\mathbf{R}^n$ 中广义函数的一个序列 E_k，$k=1,\cdots,m$，它们有下述性质：

(9.20)　　$\Delta E_{k+1}=E_k,\quad k=1,\cdots,m-1,\quad \Delta E_1=\delta;$

(9.21)　　$E_k\in V_{2k-n},\quad k=1,\cdots,m.$

证明，对于适当选取的常数 $C_{m,n}$，下述结论成立：

(9.22)　如果 $2m-n$ 不是一个 $\geqslant 0$ 的偶整数，则 $E_m=C_{m,n}r^{2m-n}$ 是 Δ^m 的一个基本解；

(9.23)　如果 $2m-n$ 是一个 $\geqslant 0$ 的偶整数，则 $E_m=C_{m,n}r^{2m-n}\log r$ 是 Δ^m 的一个基本解.

9.3　从(9.22)推导，如果 n 是奇数(并且 $\lambda>0$)，则

$$F_\lambda=-r^{2-n}\sum_{m=0}^{+\infty}C_{m+1,n}(\sqrt{\lambda}\,r)^{2m} \tag{9.24}$$

给出 $\lambda-\Delta$ 的一个基本解，而如果 n 是偶数，则我们可以取

$$F_\lambda=-r^{2-n}\sum_{m=0}^{p-2}C_{m+1,n}(\sqrt{\lambda}\,r)^{2m}-r^{2-n}\log r\sum_{m=p-1}^{+\infty}C_{m+1,n}(\sqrt{\lambda}\,r)^{2m}, \tag{9.25}$$

其中 $p=n/2$ (读者必须证明上面这个级数收敛).

当 $n=3$ 时，计算(9.24)中的系数.

9.4　当 $n=3$ (和 $\lambda\geqslant 0$)时证明，

$$F=\frac{1}{4\pi}\frac{1}{r}e^{-\sqrt{\lambda}r}$$

是 $\lambda-\Delta$ 的一个基本解. 你如何把这一事实与习题 9.3 中的结果一致起来?

9.5　令 λ 是一个大于零的数. 用 G_λ 表示 $(|\xi|^2+\lambda)^{-1}$ 的 Fourier 逆变换. 证明，G_λ 是 $\lambda-\Delta$ 的一个旋转不变的基本解.

令 $p=(p_1,\cdots,p_n)$ 是 $\geqslant 0$ 的整数的一个任意的 n 数组，$\hat{G}_{\lambda,p}$ 是 x^pG_λ 的 Fourier 变换. 证明，存在一个常数 $C_p>0$，使得

$$|\hat{G}_{\lambda,p}(\xi)|\leqslant C_p(1+|\xi|)^{-|p|-2},\quad \forall\xi\in\mathbf{R}_n. \tag{9.26}$$

从(9.26)推导，当 $r\to+\infty$ 时，函数 $G_\lambda(x)$ 在 $\mathbf{R}^n\backslash\{0\}$ 中趋于零的速度快于 $1/r$ 的任何幂.

9.6　令 G_λ 是习题 9.5 中所表示的广义函数. 从(9.26)推导，如果取整数 M 足够大，则 $r^{2M}G_\lambda$ 是足够多次连续可微的. 由此推导，G_λ 在原点的余集中是 C^∞ 的，因此，$\lambda-\Delta$ 是次椭圆的.

9.7　令 G_λ 是习题 9.5 和 9.6 中所表示的广义函数. 证明，如果 $n\geqslant 3$ 是奇数，或者，如果 $n\geqslant 4$ 是偶数，则当 $r\sim 0$ 时，我们有渐近等价关系

$$G_\lambda(x)\sim\frac{n-2}{|S^{n-1}|}\frac{1}{r^{n-2}}, \tag{9.27}$$

然而，当 $n=2$ 时，我们有

$$G_\lambda(x)\sim-\frac{1}{2\pi}\log r \tag{9.28}$$

(读者必须估计在原点的邻域中左右两端之间的差的大小来明确地叙述这些等价关系的含义).

9.8 令 E 表示由(9.19)给出的 $\mathbf{R}^n$ 中 Δ 的基本解. 证明, $u\mapsto E*u$ 是一个连续线性映射 $C_c^0(\mathbf{R}^n)\to C^1(\mathbf{R}^n)$. [提示: 利用下述事实:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)(E*u)(x)=C_n\int_{\mathbf{R}^n} y^j u(x-y)\,|y|^{-n}dy.\ ] \tag{9.29}$$

9.9 令 λ 是一个大于或等于零的数. 证明, 当 f 是 $\mathbf{R}^n$ 中具紧支集的连续函数时, 方程

$$(\lambda-\Delta)u=f \tag{9.30}$$

的每个广义函数解属于 $C^1(\mathbf{R}^n)$.

9.10 令 E 表示由(9.19)给出的 Δ 的基本解. 令 R 是任一大于零的数, y 是 $\mathbf{R}^n$ 中适合 $|y|<R$ 的任一点. 证明, $E(x-y)$ 在球面 $|x|=R$ 上的平均值等于由(9.18)给出的 $F(R)$. [提示: 证明 $E(x-y)$ 在球面 $|x|=R$ 上的平均值是以 y 为变量的 Laplace 方程在此球内部的解, 并证明它是旋转不变的, 然后再应用注 9.1 中的论断.]

10. Green 公式. 调和函数的中值定理和极大值原理. Poisson 公式. Harnack 不等式

我们现在要为 Laplace 算子推导一个公式, 类似于 Cauchy-Riemann 算子的非齐次 Cauchy 公式(5.12). 把事情放进适当一般的框架中是有益的. 我们将与带有一个正定二次型的有限维实向量空间打交道; 所要研究的算子典则地与这个二次型联系着(通过 Riesz 表示定理, 把这个二次型转移到其对偶的二次型, 并通过 Fourier 变换): 空间是 $\mathbf{R}^n$, 二次型是范数的平方 $|x|^2$, 算子是 Laplace 算子. 换一个稍微不同的说法, 我们不妨说, 与所研究算子相联系, 在 $\mathbf{R}^n$ 上给出了一个 Riemann 结构. 现在令 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中一个有界的连通开集, 它的边界 $\partial\Omega$ 是一个光滑的, 譬如说是 C^2 的超曲面. 我们作假设: Ω 位于它的边界的一侧. 由于 $\mathbf{R}^n$ 上的 Riemann 结构, 我们就可以谈论这个超曲面的法线. 另一方面, $\partial\Omega$ 把 $\mathbf{R}^n$ 分成两个区域: 一个内部区域 Ω 和一个外部区域, 即 $\mathbf{R}^n\backslash\Omega$ 的内点集. 前者是相对紧的; 但后者不是. $\partial\Omega$ 在某点处的法线由两条确定的半直线组成: 外法线和内法线(换句话说, $\partial\Omega$ 的

法线是自然地定向的，因此 $\partial\Omega$ 的超切平面亦然）．我们还可以在 $\partial\Omega$ 上定义垂直于 $\partial\Omega$ 的，并指向 $\mathbf{R}^n\setminus\overline{\Omega}$ 内部的单位向量场 $\boldsymbol{\nu}$.

令 x_0 是 $\partial\Omega$ 的一个任意的点．如果 U 是 x_0 在 $\partial\Omega$ 中的一个充分小的开邻域，那么可以找到 $n-1$ 个在 U 中定义并为 C^2 的函数 $y^1, \cdots, y^{n-1}$，使得在 U 的每个点处，向量 $\operatorname{grad} y^j (j=1,\cdots,n-1)$ 在 $\partial\Omega$ 的超切平面中确定了一个有"正确"定向的标架．此时，U 就是 $\mathbf{R}^{n-1}$ 的一个开子集 V 在 C^2 微分同胚 $y'=(y^1, \cdots, y^{n-1})\mapsto x=x(y')$ 下的像．下面的做法是标准的，即令

$$g_{jk}(y')=\left\langle\frac{\partial x}{\partial y^j},\ \frac{\partial x}{\partial y^k}\right\rangle(1\leqslant j,\ k<n),\quad g(y')=\det(g_{jk}(y')),$$

其中，$\langle\ ,\ \rangle$ 表示 $\mathbf{R}^n$ 中的内积．我们可以把 U 中的面积元素定义为 V 中的（有向）测度 $\sqrt{g(y')}dy'$ 到 U 的转移．容易验证，这个定义不依赖于（有正确定向的）局部坐标 y' 的选取．当 U 是一片超平面时，这与通常的定义是一致的．用 U 那样的坐标块覆盖 $\partial\Omega$，我们就在 $\partial\Omega$ 上定义了一个正（有向）测度，此测度典则地联系着 $\partial\Omega$ 的 Riemann 结构与 $\partial\Omega$ 的定向（两者分别由 $\mathbf{R}^n$ 的结构及定向所诱导），我们用 $d\sigma$ 表示这个测度．

引理 10.1　令 $\varphi^1, \cdots, \varphi^n$ 是 n 个在 $\overline{\Omega}$ 的一个开邻域 $\mathscr{O}$ 中定义并为 C^1 的函数，它们取值于 $\mathbf{C}$ 中；令 $\boldsymbol{\varphi}(x)=(\varphi^1(x), \cdots, \varphi^n(x))$．我们有

$$\int_\Omega \operatorname{div}\boldsymbol{\varphi}dx=\int_{\partial\Omega}\langle\boldsymbol{\varphi},\ \boldsymbol{\nu}\rangle d\sigma. \tag{10.1}$$

证明　利用单位分解，我们看到，只需在 $\boldsymbol{\varphi}$ 的支集是紧的，并包含在 $\partial\Omega$ 的一个任意点 x_0（在 $\mathbf{R}^n$ 中）的一个小的开邻域 $\mathscr{N}$ 中的情形证明(10.1)即可．不妨假设 $\mathscr{N}\cap\partial\Omega=U$ 即为上一小段中考虑的那种类型的开邻域，并假设在 U 中我们有如前所述的一组坐标 $(y^1,\cdots,y^{n-1})$；在这组坐标中，我们添加一个坐标 y^n，其方向沿着平行于 $\partial\Omega$ 在 x_0 处的法线的轴．存在一个（V 中的）C^2 函数 $f(y')$，使得 $y^n<f(y')$ 确定着 $\Omega\cap\mathscr{N}$，因而 $y^n=f(y')$ 定义着 $\mathscr{N}$ 中的 U．最后，我们可以并且将假设，对于 $\mathbf{R}^n$ 的 Riemann 结构，坐标系 $(y^1,\cdots,y^n)$ 在 $\mathscr{N}$ 中是正交的．在这样的情形中，容易验证在 V 中

有

$$(10.2)\qquad g(y')=1+|\mathrm{grad}_{y'}f(y')|^2.$$

另一方面，向量

$$\left(-\frac{\partial f}{\partial y^1},\ \cdots,\ -\frac{\partial f}{\partial y^{n-1}},\ 1\right)$$

是 U 的法线并指向 $\mathbf{R}^n\backslash\Omega$ 中. 因此，(10.1)的右端变为

$$(10.3)\qquad \int_{R^{n-1}}\left(-\sum_{j=1}^{n-1}\varphi_{\natural}^j\frac{\partial f}{\partial y^j}+\varphi_{\natural}^n\right)dy',$$

其中 $\varphi_{\natural}^j(y')=\varphi^j[y^1,\cdots,y^{n-1},f(y')]$, $j=1,\cdots,n$. (10.1) 的左端是

$$(10.4)\qquad \sum_{j=1}^{n}\int_{y^n<f(y')}\frac{\partial\varphi^j}{\partial y^j}dy.$$

在(10.4)中，令 $z^j=y^j$ (当 $j<n$ 时), $z^n=y^n-f(y')$, $\psi^j(z)=\varphi^j(z^1,\cdots,z^{n-1},z^n+f(y'))$. 这就把(10.4)变为

$$(10.5)\qquad \sum_{j=1}^{n-1}\int_{z^n<0}\frac{\partial\psi^j}{\partial z^j}dz+\int_{z^n<0}\left(-\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial\psi^j}{\partial z^n}\frac{\partial f}{\partial y^j}+\frac{\partial\psi^n}{\partial z^n}\right)dz,$$

由于 $\mathrm{supp}\,\boldsymbol{\varphi}$ 的性质，(10.5)等于(10.3). 证毕.

推论 10.1 令 $u\in C^2(\mathscr{O})$，则我们有

$$(10.6)\qquad \int_\Omega\Delta u\,dx=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\nu}d\sigma.$$

证明 把(10.1)应用于 $\boldsymbol{\varphi}=\mathrm{grad}\,u$ 即可. 证毕.

我们已经用 $\partial u/\partial\nu$ 表示在 $\partial\Omega$ 的外法线方向上的偏微商:

$$\frac{\partial u}{\partial\nu}=\lim_{\substack{h\to0\\h\neq0}}\frac{1}{h}[u(x+h\boldsymbol{\nu})-u(x)].$$

推论 10.2 令 $\varphi\in C^1(\mathscr{O})$, $\mathbf{v}\in C^1(\mathscr{O};\mathbf{C}^n)$，则我们有

$$(10.7)\qquad \int_\Omega\mathrm{div}(\varphi\mathbf{v})dx=\int_{\partial\Omega}\varphi\langle\mathbf{v},\ \boldsymbol{\nu}\rangle d\sigma.$$

推论 10.3 令 $f,\ g\in C^2(\mathscr{O})$，则我们有

$$(10.8)\qquad \int_\Omega(f\Delta g-g\Delta f)\,dx=\int_{\partial\Omega}\left(f\frac{\partial g}{\partial\nu}-g\frac{\partial f}{\partial\nu}\right)d\sigma.$$

方程(10.8)是 Green 公式.

推论 10.3 的证明 在(10.7)中选取 $\mathbf{v}=\mathrm{grad}\,\psi$, $\psi\in C^2(\mathscr{O})$. 得到

(10.9) $$\int_\Omega (\varphi\Delta\psi+\langle \operatorname{grad}\varphi,\ \operatorname{grad}\psi\rangle)dx=\int_{\partial\Omega}\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\nu}d\sigma.$$

在这个恒等式中，先取 $\varphi=f$, $\psi=g$, 再取 $\varphi=g$, $\psi=f$. 两次的结果相减，就得到(10.8). 证毕.

现在，对于 Laplace 方程

$$\Delta u=f \quad (\text{在 } \overline{\Omega} \text{ 的邻域 } \mathcal{O} \text{ 中}),$$

我们来推导与非齐次 Cauchy 公式[参阅 (5.10), (5.12)] 类似的公式. 假设 $u\in C^2(\mathcal{O})$ 和 $f\in C^0(\mathcal{O})$.

令 χ_Ω 表示(有界)开集 Ω 的特征函数. 由 Leibniz 公式有

$$\Delta(\chi_\Omega u)=\chi_\Omega f+2\sum_{j=1}^n\frac{\partial u}{\partial x^j}\frac{\partial\chi_\Omega}{\partial x^j}+u(\Delta\chi_\Omega).$$

因为两端都有紧支集，所以对它们可作用 $E*$; 得到

(10.10) $$\chi_\Omega u=E*(\chi_\Omega f)+2E*\left\{\sum_{j=1}^n\frac{\partial u}{\partial x^j}\frac{\partial\chi_\Omega}{\partial x^j}\right\}+E*u(\Delta\chi_\Omega),$$

其中 E 是 Laplace 算子的任一基本解. 我们需要知道下面两个广义函数

$$A=\sum_{j=1}^n\frac{\partial u}{\partial x^j}\frac{\partial\chi_\Omega}{\partial x^j},\quad B=u(\Delta\chi_\Omega)$$

是什么. 令 φ 是 $\mathbf{R}^n$ 中一个任意的试验函数，有(紧)支集在 $\mathcal{O}$ 中. 我们有

$$\langle A,\ \varphi\rangle=-\sum_{j=1}^n\int_\Omega\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\varphi\frac{\partial u}{\partial x^j}\right)dx=-\int_\Omega \operatorname{div}(\varphi\operatorname{grad}u)dx$$

$$=-\int_{\partial\Omega}\varphi\frac{\partial u}{\partial\nu}d\sigma \quad (\text{由推论 } 10.2).$$

换句话说，

(10.11) $$A=-\chi_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\nu}d\sigma,$$

即具有密度(关于 $d\sigma$ 的) $-\partial u/\partial\nu$ 的、由 $\partial\Omega$ 所承载的测度. 另一方面，由推论 10.1, 有

(10.12) $$\langle B,\ \varphi\rangle=\int_\Omega\Delta(\varphi u)dx=\int_{\partial\Omega}\varphi\frac{\partial u}{\partial\nu}d\sigma+\int_{\partial\Omega}u\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}d\sigma.$$

这样，$B=-A+B_1$, 其中

(10.13) $$\langle B_1,\ \varphi\rangle=\int_{\partial\Omega}u\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}d\sigma.$$

广义函数 B_1 是一个由 $\partial\Omega$ 所承载的广义函数,但它不是一个由 $\partial\Omega$ 所承载的测度. 称它为一个"双层"(double layer).

在(10.10)中我们顾及(10.11)和(10.12), 但是把(10.10)限制于 Ω. 注意,当 $x\in\Omega$ 时, $E(x-x')$ 在 $\partial\Omega$ 的一个邻域中是 x' 的 C^∞ 函数. 因此可以把 A 和 B 看作变量 x' 的广义函数, 而求它们在函数上的值. 另一方面, E 是一个局部可积函数, 因而通过在 Ω 上积分可以计算 $E*(\chi_\Omega f)$. 这样, 当 $x_0\in\Omega$ 时, 我们有

$$(10.14)\qquad u(x_0)=\int_\Omega E(x_0-x)f(x)\,dx-\int_{\partial\Omega}E(x_0-x)\frac{\partial u}{\partial\nu}(x)\,d\sigma+\int_{\partial\Omega}u(x)\frac{\partial}{\partial\nu}E(x_0-x)\,d\sigma.$$

在这个公式中, 我们究竟选取 Δ 的哪一个基本解是毫无关系的. 习惯上, 人们喜欢用由(9.18)定义的基本解. 在 Ω 是以任意点 x_0 为中心的开球 $\{x\in\mathbf{R}^n;\ |x-x_0|<R\}$ 这一特殊情形, 并且要求 $u(x_0)$ 的值时, 用这个基本解是特别方便的. 自然, 要转换到 x_0 处的球面坐标, 也就是, 令 $x=x_0+r\dot{x}$, 其中 $\dot{x}$ 是单位球面 S^{n-1} 上的变点. 用(9.18)的记号, 因为在现在的情形中 $d\sigma=R^{n-1}d\dot{x}$, 所以我们有

$$(10.15)\qquad \begin{aligned} u(x_0)=&\int_0^R\int_{S^{n-1}}F(r)f(x_0+r\dot{x})r^{n-1}dr\,d\dot{x}\\ &-R^{n-1}F(R)\int_{S^{n-1}}\frac{\partial u}{\partial r}(x_0+R\dot{x})\,d\dot{x}\\ &+R^{n-1}F'(R)\int_{S^{n-1}}u(x_0+R\dot{x})\,d\dot{x}. \end{aligned}$$

其中, 我们还利用了 $(\partial/\partial\nu)E(x_0-x)=(d/dr)F(r)$ 这一事实. 如果再用一次(10.6), 我们就看到

$$R^{n-1}\int_{S^{n-1}}\frac{\partial u}{\partial r}(x_0+R\dot{x})\,d\dot{x}=\int_0^R\int_{S^{n-1}}f(x_0+r\dot{x})r^{n-1}dr\,d\dot{x},$$

因此由(10.15), 有

$$(10.16)\ u(x_0)=\int_\Omega\{F(|x-x_0|)-F(R)\}f(x)dx+F'(R)\int_{\partial\Omega}u(x)\,d\sigma,$$

其中假设了 Ω 是中心在 x_0 处半径为 R 的开球. 公式(10.16)是极其重要的. 它的最先几个推论之一是调和函数的下述引人注意的

性质，即所谓的*中值定理*：

定理 10.1　如果 u 是闭球 $\{x\in \mathbf{R}^n;\ |x-x_0|\leqslant R\}$ 的一个开邻域中的一个调和函数，那么

$$u(x_0)=\frac{1}{|S^{n-1}|}\int_{S^{n-1}}u(x_0+R\dot{x})d\dot{x}. \tag{10.17}$$

换句话说，一个调和函数在球心处的值，等于它在球面上的平均值.

证明　如果在球 $|x-x_0|<R+\varepsilon\ (\varepsilon>0)$ 中 $\Delta u=0$，那么由(10.16)，就有

$$u(x_0)=F'(R)R^{n-1}\int_{S^{n-1}}u(x_0+R\dot{x})d\dot{x}.$$

自然，我们有 $|S^{n-1}|R^{n-1}F'(R)=1$ [参阅(9.16)和(9.18)].

证毕.

推论 10.4　在定理 10.1 的假设下，我们有

$$|u(x_0)|\leqslant\sup_{|x-x_0|=R}|u(x)|. \tag{10.18}$$

证明　把初等的中值定理[1]应用于(10.17)，即得(10.18).　证毕.

推论 10.4 蕴涵着著名的*极大值原理*：

定理 10.2　令 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个连通的开子集，u 是 Ω 中的一个调和函数. 除了 u 在 Ω 中是一个常数这一情形之外，对于每个 $x_0\in\Omega$，我们有

$$|u(x_0)|<\sup_{\Omega}|u(x)|. \tag{10.19}$$

证明　假设对于某个 $x_0\in\Omega$，有 $|u(x_0)|=\sup_\Omega|u(x)|$.　令 R 是具有下述性质的任一大于零的数，它使得球 $\{x;\ |x-x_0|\leqslant R\}$ 包含在 Ω 中.　假设 $u(x_0)\geqslant 0$[否则，用 $\bar{u}(x_0)u$ 代替 u].　由(10.17)，我们必定有 $u(x_0)=\sup_{\dot{y}\in S^{n-1}}|u(x_0+R\dot{y})|$，因此，

$$\int_{S^{n-1}}\{\sup_{\dot{y}\in S^{n-1}}|u(x_0+R\dot{y})|-\operatorname{Re}u(x_0+R\dot{x})\}d\dot{x}=0.$$

上式中的被积函数是单位球面上处处 $\geqslant 0$ 的连续函数；因而它必定恒等于零. 这样，对于任何适合 $|x-x_0|=R$ 的 x，有 $u(x)=u(x_0)$，

---

1) 译者注：这里说的初等的中值定理是指微积分中连续函数的积分中值定理.

并且,我们可以取任意的 $R<d(x_0, \partial\Omega)$. 这就证明了在 x_0 在 Ω 中的一个邻域中 $u(x)=u(x_0)$,因而,在整个 Ω 中 $u(x)=u(x_0)$: 函数 $u(x_0)$ 和 $u(x)$ 在 Ω 中都是解析的,或者,如果人们愿意的话,可以这样看:使得这两个函数在其中相等的集合——它显然是闭的——刚才已证明它是开的. 证毕.

下面,我们推导一个开球的 Poisson 公式.

首先考虑 $\mathbf{R}^n$ 的一个有界开子集 Ω 的情形,这里,Ω 具有光滑的边界 $\partial\Omega$, 并且 Ω 位于它的边界的一侧——除此之外,其它都是任意的. 我们再次应用恒等式 (10.10), 并顾及到 (10.11) 和 (10.12). 在位于 $\overline{\Omega}$ 的余集中的一个点 x_1 处,计算(10.10)的两端的值. 回忆起在 Ω 中 $\Delta u=f$ (我们不妨假设 u 是 $\overline{\Omega}$ 中一个二次连续可微的函数),我们就得到[参阅(10.14)]

$$(10.20)\quad \int_\Omega E(x_1-x)f(x)dx = \int_{\partial\Omega}\left\{E(x_1-x)\frac{\partial u}{\partial\nu}(x)-u(x)\frac{\partial}{\partial\nu}E(x_1-x)\right\}d\sigma.$$

特别,如果 u 是调和的,则

$$(10.21)\quad \int_{\partial\Omega} E(x_1-x)\frac{\partial u}{\partial\nu}(x)d\sigma=\int_{\partial\Omega}u(x)\frac{\partial}{\partial\nu}E(x_1-x)d\sigma.$$

现在假设 Ω 是开球 $|x|<R$,并令 x_0 是 Ω 中不是 Ω 的中心的一个点, 即 $x_0\neq 0$. 我们把(10.21)应用于由(9.18)定义的 Δ 的基本解 $E(x)$ 以及点 x_1:

$$x_1=(R/|x_0|)^2x_0$$

(x_1 是 x_0 通过关于球面 $|x|=R$ 的"反射"而得到的点). 我们有

$$(10.22)\quad |x-x_1|=(R/|x_0|)|x-x_0|,\ \forall x,\ |x|=R.$$

由此,根据(9.18),我们有

$$(10.23)\quad E(x_1-x)=(|x_0|/R)^{n-2}E(x_0-x),\ |x|=R, \text{当 } n\geqslant 3 \text{ 时};$$

$$(10.24)\quad E(x_1-x)=E(x_0-x)+\text{const},\quad |x|=R, \text{当 } n=2 \text{ 时}.$$

如果把它代入(10.21)的左端,并考虑到下述事实:当 $u\in C^2(\overline{\Omega})$ 在 Ω 中是调和的时候,$\partial u/\partial\nu$ 在 $\partial\Omega$ 上的曲面积分等于零(习题10.6),我们就看到,对于任何 $n\geqslant 2$, 有

$$(10.25)\quad \int_{|x|=R} E(x_0-x)\,\frac{\partial u}{\partial r}\,d\sigma = (R/|x_0|)^{n-2}\int_{|x|=R} u(x)\frac{\partial}{\partial r}E(x_1-x)\,d\sigma.$$

在(10.14)(其中 $f\equiv 0$)中考虑到这个事实，就得到

$$(10.26)\quad u(x_0)=\int_{|x|=R} u(x)\frac{\partial}{\partial r}\{E(x_0-x) - (R/|x_0|)^{n-2}E(x_1-x)\}d\sigma.$$

我们注意，如果 $z\neq x$ (以及 $r=|x|$)，则

$$(10.27)\quad r\,\frac{\partial}{\partial r}\,E(z-x)=|S^{n-1}|^{-1}\,\frac{r^2-x\cdot z}{|x-z|^n}.$$

如果在(10.26)的右端利用(10.27)，我们就看到，$u(x_0)$ 等于 $u(x)$ 乘以

$$R^{-1}|S^{n-1}|^{-1}|x-x_0|^{-n}\{(R^2-x\cdot x_0) -\left(\frac{R}{|x_0|}\right)^{n-2}\left(\frac{|x-x_0|}{|x-x_1|}\right)^n(R^2-x\cdot x_1)\}$$

在 $\partial\Omega$ 上的积分．如果回到 x_1 的定义以及 (10.22)，立刻就得到 *Poisson* 公式

$$(10.28)\quad u(x_0)=\frac{1}{|S^{n-1}|R}\int_{|x|=R} u(x)\frac{R^2-|x_0|^2}{|x-x_0|^n}\,d\sigma.$$

应该注意到，这个公式——它是在 $x_0\neq 0$ 这一假设下被证明的——事实上当 $x_0=0$ 时也有效．此时它被化为中值公式(10.17)．

假设在(10.28)中 $u(x)$ 处处 $\geqslant 0$，并记 $r_0=|x_0|$．注意到当 $|x|=R$ 时 $R-r_0<|x-x_0|<R+r_0$，并应用中值定理(定理10.1)，我们立刻得到 *Harnack* 不等式

$$(10.29)\quad \frac{1-r_0/R}{(1+r_0/R)^{n-1}}u(0)\leqslant u(x_0)\leqslant\frac{1+r_0/R}{(1-r_0/R)^{n-1}}u(0),\quad \forall x_0,\ |x_0|=r_0<R.$$

通过解习题 10.7 中的问题，读者可以验证(10.29)中的两个常数是所有可能的常数中最好的．

从(10.29)我们推得一个经典的结果，它也称为 Harnack 不等式．

定理 10.3[1] 令 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个开子集, K 是 Ω 的任一紧子集. 那么, 存在一个常数 $C_K>0$, 使得 Ω 中的每个非负调和函数 u 满足不等式:

$$(10.29') \qquad C_K \sup_{y\in K} u(y) \leqslant u(x) \leqslant C_K^{-1} \inf_{y\in K} u(y), \quad \forall x\in K$$

这个定理的证明是(10.29)的一个简单的应用, 我们把它留给读者.

习 题

(在下面的习题中, Ω 表示 $\mathbf{R}^n$ 的一个开子集.)

10.1 假设 Ω 是有界的. 令 u 是 $\bar{\Omega}$ 中的一个连续实值函数, 在 Ω 中二次连续可微, 并使得在 Ω 中 $\Delta u\geqslant 0$. 证明, 对于任意的 $x_0\in\Omega$ 和 $r<d(x_0, \complement\Omega)$, 有

$$(10.30) \qquad u(x_0)\leqslant |S^{n-1}| \int_{S^{n-1}} u(x_0+r\dot{x})d\dot{x}.$$

从(10.30)推导 u 的*极大值原理*:

$$(10.31) \qquad \forall x_0\in\Omega, \quad u(x_0)\leqslant \sup_{x\in\partial\Omega} u(x).$$

当 Ω 不是有界的时候, (10.31)的正确提法是什么?

10.2 令 $u\in C^2(\Omega)$, $x_0\in\Omega$ 是任意的. 利用 u 在 x_0 处的二阶 Taylor 展开式, 证明:

$$(10.32) \qquad -\Delta u(x_0) = \lim_{r\to+0} \frac{2n}{r^2}\left\{u(x_0) - \frac{1}{|S^{n-1}|}\int_{S^{n-1}} u(x_0+r\dot{x})d\dot{x}\right\}.$$

由此推导, 如果对于任意的 $x_0\in\Omega$, u 满足(10.30), 则在 Ω 中处处有 $\Delta u\geqslant 0$.

10.3 令 λ 是一个大于或等于零的数. 对于[元调和(metaharmonic)]方程

$$(10.33) \qquad (-\Delta+\lambda)u=0 \quad \text{在 } \Omega \text{ 中}$$

的解, 证明极大值原理(10.31).

10.4 找出方程

$$(10.34) \qquad \frac{d^2u}{dx^2}-u=-1 \quad \text{在单位区间 } |x|<1 \text{ 中}$$

的一个解, 它不服从极大值原理.

10.5 令 λ 是一个小于零的数. 构造方程(10.33)的一个不满足极大值

1) 译者注: 原文将(10.29')误为一个平凡的不等式:

$$C_K \inf_{y\in\Omega} u(y) \leqslant u(x) \leqslant C_K^{-1} \sup_{y\in\Omega} u(y), \quad \forall x\in K.$$

原理的解的例子.

10.6 假设 $\mathscr{B}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个开球，并假设 $u\in C^1(\overline{\mathscr{B}})$ 是 $\mathscr{B}$ 中的调和函数. 证明,此时

$$\int_{\partial\mathscr{B}}\frac{\partial u}{\partial\nu}\,d\sigma=0. \tag{10.35}$$

反之，如果对于闭包包含在 Ω 中的任何球 $\mathscr{B}$, $u\in C^1(\Omega)$ 满足(10.35),证明, u 在 Ω 中是调和的.

10.7 假设 z_0 是球面 S^{n-1} 上的一点,证明,函数

$$u(x)=(1-|x|^2)/|z_0-x|^n$$

在这个球面的内部 $|x|<1$ 中是一调和函数($n\geqslant 2$). 证明，存在一些点 x_0, $|x_0|=r_0<1$, 使得(10.29)中的两个不等式中的一个事实上是一个等式.

10.8 令 u 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个实值调和函数. 证明,或者 u 是常数,或者 u 把 $\mathbf{R}^n$ 映到 $\mathbf{R}$ 上.

10.9 令 f 表示球面 $|x|=R$ ($R>0$) 上的一个可测函数,它的值或者是(有限的)实数,或者是 $+\infty$. 令[参阅(10.28)]

$$I_f(x)=\frac{1}{|S^{n-1}|R}\int_{|y|=R}f(y)\frac{R^2-|x|^2}{|y-x|^n}\,d\sigma_y \tag{10.36}$$

(所谓 f 的 Poisson 积分). 假设, f 在球面 $|x|=R$ 上是下半连续的,这意味着,给定任一 y_0($|y_0|=R$) 以及任一 $a<f(y_0)$, 在此球面上存在 y_0 的一个开邻域 U_a, 使得

$$f(y)>a,\quad \forall y\in U_a.$$

证明,给定任一 y_0($|y_0|=R$), 当 x($|x|<R$)趋于 y_0 时, $I_f(x)$ 的下极限大于或等于 $f(y_0)$.

由此推导,如果 f 在球面 $|x|=R$ 上连续,则 I_f 在闭球 $|x|\leqslant R$ 上连续且在这闭球的边界上等于 f.

10.10 令 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个开子集. 从 Poisson 公式 (10.28) 推导，如果 Ω 中的一个调和函数序列在 Ω 的每个紧子集上一致收敛，那么它们也在 $C^\infty(\Omega)$ 中收敛.

10.11 令 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个开子集.从 Poisson 公式(10.28)推导,如果 Ω 中的一个调和函数序列在广义函数意义下收敛,那么它们也在 $C^\infty(\Omega)$中收敛(参阅习题 2.10).

第 II 章

Cauchy 问题

11. 线性常微分方程的 Cauchy 问题

在实直线的一开区间 $-T<t<T\,(T>0)$ 中考虑一阶线性微分方程：

$$\frac{du}{dt}-a(t)u=f. \tag{11.1}$$

假设系数 $a(t)$ 和右端 $f(t)$ 都是 $t\,(|t|<T)$ 的连续函数．我们立刻得到(11.1)的一个解：

$$u(t)=e^{A(t,\,0)}u_0+\int_0^t e^{A(t,\,t')}f(t')\,dt', \tag{11.2}$$

其中 u_0 是一任意常数，且

$$A(t,\,t')=\int_{t'}^t a(s)\,ds,\qquad |t|<T,\ |t'|<T.$$

事实上，可用下述方法得到(11.1)的所有解：它们是形如(11.2)的全体．显然，通过选取 u_0，就完全确定 $u(t)$．注意，

$$u(0)=u_0. \tag{11.3}$$

换言之，问题(11.1)—(11.3)有唯一解，用(11.2)给出．注意，这个解在 $]-T,\,T[$ 中是一次连续可微的．

现在考虑一阶线性常微分方程组：

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt}-M(t)\,\mathbf{u}=\mathbf{f}, \tag{11.4}$$

$$\mathbf{u}(0)=\mathbf{u}_0. \tag{11.5}$$

这里，$\mathbf{u}$，$\mathbf{f}$，$\mathbf{u}_0$ 取值于 $\mathbf{C}^m$ 中，而 $M(t)$ 是以连续函数为元素的 $m\times m$ 矩阵．如果这些元素都是常数函数，即 $M(t)\equiv M$ 是一复 $m\times m$ 矩阵，则(11.4)—(11.5)的理论是(11.1)—(11.3)理论的直

接推广. (11.4)—(11.5)的解由

(11.6) $$\mathbf{u}(t)=e^{tM}\mathbf{u}_0+\int_0^t e^{(t-t')M}\mathbf{f}(t')dt'$$

给出. 但是,当 $M(t)$ 不是常数矩阵时情形就截然不同了. 在常系数的情形中,令

$$U(t,\ t')=\exp((t-t')M).$$

公式(11.6)来源于下述事实:

(11.7) $$\frac{dU}{dt}=MU,\quad U|_{t=t'}=I\quad (I\text{ 为 } m\times m \text{ 单位矩阵}).$$

然而,一般地,当 M 不是常数矩阵时,情形就不是这样的了. 为此,我们避开指数函数而集中考虑(11.7)的解. 必须注意,问题(11.7)和问题(11.4)—(11.5)是同一类型的:它也是一阶线性常微分方程组. 此时,有 m^2 个未知函数的 m^2 个方程,在时刻 $t=t'$ 满足 m^2 个条件. 从常微分方程的基本定理立刻得到,(11.7)有唯一解,并且,这个解是 t, t' 在 $|t|<T$, $|t'|<T$ 中的 C^1 函数.

因此,(11.2)的恰当的推广是

(11.8) $$\mathbf{u}(t)=U(t,\ 0)\mathbf{u}_0+\int_0^t U(t,t')\mathbf{f}(t')dt'.$$

有时,把函数 $U(t',t)$ 称为问题(11.4)—(11.5)的 *Riemann 函数*.

命题 11.1 如果 t, t', t'' 是区间 $]-T,\ T[$ 中的三个点,则有

(11.9) $$U(t,t')U(t',\ t'')=U(t,\ t''),$$

(11.10) $$U(t,\ t)=I,\quad U(t,\ t')U(t',t)=I.$$

证明 (11.10)中的第一个恒等式是 $U(t,\ t')$ 的定义的一部分. 将此恒等式关于 t 求导数,得到

$$\frac{dU}{dt}+\frac{dU}{dt'}=0\quad \text{当 } t=t' \text{ 时},$$

将此式与(11.7)结合起来,得到

(11.10a) $$\frac{dU}{dt'}=-M(t')\quad \text{当 } t=t' \text{ 时}.$$

另一方面,如果将(11.7)的第一个方程关于 t' 求导数,就得到

(11.10b) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{dU}{dt'}\right)=M(t)\frac{dU}{dt'}.$$

可以直接验证，Cauchy 问题(11.10a)—(11.10b)的解由

(11.10c) $$\frac{dU}{dt'}=-U(t,\ t')M(t')$$

给出．现在，令

$$V(t,\ t')=U(t,\ t')U(t',\ t).$$

由(11.7)和(11.10c)，我们有

$$\frac{dV}{dt'}=\frac{dU}{dt'}(t,\ t')U(t',\ t)+U(t,\ t')\frac{dU}{dt'}(t',\ t)$$
$$=-U(t,\ t')M(t')U(t',\ t)+U(t,\ t')M(t')U(t',\ t)=0,$$

因而，$V(t,\ t')=V(t,\ t)=I$.

现在，令 $$W(t)=U(t,\ t')U(t',\ t'').$$

我们有

$$\frac{dW}{dt}=\frac{dU}{dt}(t,\ t')U(t',\ t'')=M(t)U(t,\ t')U(t',\ t'')=MW.$$

另一方面，当 $t=t''$ 时 $W=I$．由(11.7)的解的唯一性，我们得到 $W=U(t,\ t'')$. 证毕.

现在考虑一个 m 阶微分方程

(11.11) $$Lu=\frac{d^m u}{dt^m}+a_1(t)\frac{d^{m-1}u}{dt^{m-1}}+\cdots+a_m(t)u=f,$$

其中系数 a_j 和右端 f 都是 $]-T,\ T[$ 中的连续函数．由已述的标准过程(参阅第 26, 27 页)，可以把(11.11)变为(11.4)型的方程．在这里，这就意味着

$$M(t)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ -a_m(t) & -a_{m-1}(t) & -a_{m-2}(t) & \cdots & -a_1(t) \end{pmatrix},$$

而 $\mathbf{u}$ 的分量 u_j 由下式给出：

(11.12) $$u_j=\frac{d^{j-1}u}{dt^{j-1}},\qquad 1\leqslant j\leqslant m.$$

我们来看初始条件(11.5)在这里的含义：用 $u_{0,0},\ u_{0,1},\ \cdots,\ u_{0,m-1}$

表示 $\mathbf{u}_0$ 的分量．则，在这里条件(11.5)即等价于

$$u^{(k)}(0)=u_{0,k},\quad 0\leqslant k\leqslant m-1. \tag{11.13}$$

这样，条件(11.13)就是初始条件(11.3)对于高阶方程的推广．按照偏微分方程的术语，我们将把问题(11.11)—(11.13)叫做微分算子 L 的 *Cauchy* 问题．

接下来的问题是，公式(11.2)对于高阶方程的情形的推广是什么？这个问题可以用相应于等价的方程组(11.4)—(11.5)的公式(11.8)来回答．我们必须记住 $\mathbf{f}(t)=f(t)\mathbf{e}_m$．我们用 $\mathbf{e}_j(1\leqslant j\leqslant m)$ 表示第 j 个分量等于 1，其它的分量都等于零的向量．然后注意

$$U(t,\ 0)\mathbf{u}_0=\sum_{k=0}^{m-1}u_{0,k}U(t,\ 0)\mathbf{e}_{k+1}.$$

记 $U(t,\ t')\mathbf{e}_{j+1}$ 的第一个分量为 $U_j(t,\ t')$．由于(11.12)，从(11.8)，我们得到

$$u(t)=\sum_{k=0}^{m-1}u_{0,k}U_k(t,\ 0)+\int_0^t U_{m-1}(t,\ t')f(t')dt'. \tag{11.14}$$

从这个恒等式，我们得到，$U_k(t,\ t')$是 Cauchy 问题

$$LV=0, \tag{11.15}$$

$$\text{当 } t=t' \text{ 时,}\quad \frac{d^jV}{dt^j}=\begin{cases}0 & \text{若 } j\neq k,\\ 1 & \text{若 } j=k\end{cases}\quad (0\leqslant j\leqslant m-1) \tag{11.16}$$

的解．

一般说来，计算函数 $U_j(t,\ t')$是不容易的．因而，给出(11.14)的一个等价的表达式是方便的，在此表达式中，除了 U_{m-1} 之外，其余所有的 U_j 都已被消去．可如下进行．引入函数

$$\tilde{u}_0(t)=\sum_{k=0}^{m-1}u_{0,k}t^k/k!. \tag{11.17}$$

显然，$\tilde{u}_0(t)$满足初始条件(11.13)．再令

$$v(t)=u(t)-\tilde{u}_0(t).$$

我们有

$$Lv=f-L\tilde{u}_0, \tag{11.18}$$

$$v^{(k)}(0)=0,\quad 0\leqslant k\leqslant m-1. \tag{11.19}$$

因而，用 v 代替 u，我们可以应用(11.14)：

$$v(t)=\int_0^t U_{m-1}(t, t')(f(t')-L\tilde{u}_0(t'))dt',$$

因此，

(11.20)

$$u(t)=\tilde{u}_0(t)-\int_0^t U_{m-1}(t, t')L\tilde{u}_0(t')dt'+\int_0^t U_{m-1}(t, t')f(t')dt'.$$

在(11.20)的右端的第一个积分中，用 $L\tilde{u}_0$ 的明显表达式，可以进行分部积分．这就导致 $u(t)$ 的一个更明显的公式，其中包含 $U_{m-1}(t, t')$ 及其导数．我们把它留给读者去计算，如果读者愿意这样做的话．在系数 a_j 是常数的情形，计算 $U_{m-1}(t, t')$ 并不难；它是

$$e^{(t-t')M}\mathbf{e}_m$$

的第一个分量．我们有

$$U_{m-1}(t, t')=U_{m-1}(t-t', 0)=U(t-t'),$$

其中 $U(x)$ 是第 28 页上所表示的函数．用 § 4 的记号，我们有 $E=HU$，其中 H 是 Heaviside 函数，而 E 是 L 的基本解，其支集在非负半直线中．在此情形，公式(11.20)可改写为

(11.21)

$$u=\tilde{u}_0+(HU)*\{H(f-L\tilde{u}_0)\}-(\check{H}U)*\{\check{H}(f-L\tilde{u}_0)\},$$

其中 $\check{H}(t)=H(-t)$．(11.21)的右端第一个卷积的支集含于半直线 $t\geqslant 0$ 中，第二个卷积的支集含于半直线 $t\leqslant 0$ 中．

作为最后的注记，我们回到变系数的一般情形．关于方程组(11.4)及其解(11.8)，我们不妨指出，如果系数 $M(t)$ 和右端 $\mathbf{f}(t)$ 是 t 在 $|t|<T$ 中的 N 次连续可微函数，则 Riemann 函数 $U(t,t')$ 是 t, t' 在同一区间中的 $N+1$ 次连续可微函数．因而在 $]-T,T[$ 中 $\mathbf{u}(t)\in C^{N+1}$．现在，经过等价的一阶方程组(11.4)，我们回到 m 阶方程(11.11)．假设，a_j 和 f 是 $]-T, T[$ 中的 C^N 函数．由于关系式(11.12)，我们得到结论：$u^{(m-1)}$ 在 $]-T, T[$ 中是 C^{N+1} 函数．可叙述为

命题 11.2　如果方程(11.11)的系数 a_j $(1\leqslant j\leqslant m)$ 和右端 f 是 t 在 $|t|<T$ 中的 C^N 函数，则由(11.14)给出的解 u 在区间 $]-T,T[$ 中是 C^{N+m} 函数.

推论 11.1　如果系数 a_j 和右端 f 在区间 $]-T,T[$ 中是 C^∞ 函数，则解 u 亦然.

在这个推论中，出现 C^∞ 之处都可用解析来代替. 这从下述事实立刻可以得到：若(11.4)中的系数 $M(t)$ 关于 t 是解析的，则 Riemann 函数 $U(t,t')$ 关于 t, t' 也是解析的(在区间 $]-T,T[$ 中).

习　　题

11.1　假设对于区间 $]-T,T[$ 中的任何两点 t, t', $m\times m$ 矩阵 $M(t)$ 和 $M(t')$ 是可交换的. 在这个情形，给出问题(11.4)—(11.5)的 Riemann 函数的一个简单的表达式.

11.2　假设，在(11.4)中矩阵 M 是常数矩阵. 再假设 M 是负定的，即对所有 $\mathbf{v}\in\mathbf{C}^m$, $\mathbf{v}\neq 0$, 有 $(M\mathbf{v},\mathbf{v})<0$[我们已经用 $(,)$ 表示 $\mathbf{C}^m$ 中的 Hermite 内积]. 令 $U(t)$ 表示问题(11.7)的解. 证明，存在一常数 $c>0$，使得当 $t\to+\infty$ 时，$U(t)$ 的矩阵范数至少像 e^{-ct} 一样地衰减.

11.3　利用习题 4.10，给出当 M 是任意的 $m\times m$ 矩阵时问题(11.7)的解 U 的完全的描述.

11.4　当 L 的系数 a_j 都是常数时，给出(11.14)中的函数 $U_{m-1}(t,t')$ 的完全的描述(参看习题 4.10 和 11.3).

11.5　令 L 是(11.11)中定义的微分算子. 假设在区间 $]-T,T[$ 中系数 $a_j(t)$ 和右端 $f(t)$ 是 C^∞ 函数. 再假设当 $t<0$ 时 $f(t)=0$，而 u 是形如

$$u=\left(\frac{d}{dt}\right)^p g$$

的 $]-T,T[$ 中的广义函数，这里 g 是 t 在 $t<T$ 中的连续函数，当 $t<0$ 时 $g(t)=0$. 用 $Lu=f$ 这一事实证明，在 $]-T,T[$ 中 u 是 C^∞ 函数.

11.6　假设在实直线上算子 L 的系数 $a_j(j=1,\cdots,m)$ 和(11.11)的右端 f 是(复值) C^∞ 函数. 从公式(11.14)立刻得到，问题(11.11)—(11.13)有在 $\mathbf{R}^1$ 中为 C^∞ 函数的唯一解 u(唯一性从常微分方程的基本定理即得). 令 $\tilde{u}(t)$ 是当 $t\geqslant 0$ 时等于 $u(t)$，当 $t<0$ 时等于零的函数. 试计算广义函数 $L\tilde{u}$.

特别，当 $u=U_k(t, 0)$ 时，$k=0, \cdots, m-1$，计算广义函数 $L\tilde{u}$（参看(11.14)到(11.16)）.

11.7 假设(11.11)中的微分算子 L 是常系数的，并令 $\tilde{u}$ 表示习题 11.6 中定义的函数. 证明，如果 v 是当 $t<0$ 时等于零的实直线上的任一广义函数，即 $v\in\mathscr{D}'_+$（参看习题 4.11），且使得 $Lv=L\tilde{u}$，则必有 $v=\tilde{u}$. 当 L 有变系数（但系数是 C^∞ 的）时，此结论是否仍成立？

11.8 给出具有解析系数（在整个实直线上）的齐次一阶常微分方程的一个例子，其解在原点无穷阶为零.

11.9 彻底地分析解"初始值问题"

$$xu''+a_1u'+a_2xu=0, \tag{11.22}$$

$$u(0)=u_0 \tag{11.23}$$

的可能性. 证明，一般地（它的含义可被明确地叙述），加上条件

$$u'(0)=u_1 \tag{11.24}$$

后得到的 Cauchy 问题无解.

当此 Cauchy 问题有解时，其解是唯一的吗？

11.10 令 a, f 和 v 是闭区间 $[0, T]$ 上的三个非负连续函数，v_0 是一非负常数. 将 v 与(11.1)的解进行比较，证明不等式

$$v(t)\leqslant v_0+\int_0^t f(s)ds+\int_0^t a(s)v(s)ds, \quad 0\leqslant t\leqslant T \tag{11.25}$$

蕴涵 *Gronwall* 不等式

$$v(t)\leqslant\left(v_0+\int_0^t f(s)ds\right)\exp\left(\int_0^t a(s)ds\right), \quad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{11.26}$$

假设 $a(s)$ 是单调的，从

$$|v'(t)|\leqslant v_1+\int_0^t f(s)ds+\int_0^t a(s)v(s)ds, \quad 0\leqslant t\leqslant T \tag{11.27}$$

将得到关于 v 的什么不等式？

12. 线性偏微分方程的 Cauchy 问题. 初步的探讨

在例 2.2 中我们曾指出（在那里我们用了稍微不同的记号，并在关于数据 u_0, u_1 的光滑性的适当假设下），问题

(12.1) $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 u-\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 u=0, \quad x\in\mathbf{R},\ |t|<T,$

(12.2) 当 $t=0$ 时, $u=u_0(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}=u_1(x)$

有一解,用

(12.3)

$$u(t, x)=\frac{1}{2}[u_0(t+x)+u_0(x-t)]+\frac{1}{2}[U_1(t+x)-U_1(x-t)]$$

给出,其中 U_1 是 u_1 的一个任选的原函数. 我们还曾指出,这是(12.1)—(12.2)的唯一解. 显然,问题(12.1)—(12.2)是 Cauchy 问题(11.11)—(11.13)当其右端 f 恒等于零时的自然推广. 除了时间变量 t 之外,还有"横截"变量或空间变量 x; 代替乘法因子作用的(12.1)的系数不再是 t 的函数,而是关于 x 的微分算子. 但是,我们知道如何把它回转到含有乘法因子的情形: 对 x 施行 Fourier 变换,方程(12.1)变为

(12.4) $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \tilde{u}+|\xi|^2\tilde{u}=0,$

它具有(11.11)的形式;事实上,它的系数是依赖于参数 ξ 的常数.

这个方法还能用于非齐次方程

(12.5) $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 u-\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 u=f(t, x), \quad x\in\mathbf{R},\ |t|<T,$

如果 f 关于 x 的 Fourier 变换 $\tilde{f}(t, \xi)$ 有意义, 即 $\tilde{f}(t, \xi)$ 是缓增广义函数. 这就提供了一个研究(12.1)—(12.5)型问题的一般方法,并且还能给我们以有关求解它们的可能性的有价值信息. 在我们处理的数据的类型上有明显的限制: 关于 x, 它们必须是缓增的. 这已经是相当弱的限制,并且当这些限制被满足时一旦我们知道如何处理问题,我们还可以希望去掉这些限制. 问题的实质在于,在所研究的偏微分方程中,对 x 施行 Fourier 变换后所得的常微分方程,其 Riemann 函数必须是关于 ξ 的缓增广义函数.

我们不妨把我们的基本实例按此线索加以检验. 例如,先取齐次 *Cauchy-Riemann* 方程. 经过 Fourier 变换,导致 Cauchy 问题

$$(12.6)\qquad \frac{\partial\widetilde{u}}{\partial t}-\xi\widetilde{u}=0,\qquad \widetilde{u}|_{t=0}=\widetilde{u}_0(\xi).$$

它的解为

$$(12.7)\qquad \widetilde{u}(t,\ \xi)=\widetilde{u}_0(\xi)e^{\xi t}.$$

什么时候对于所有的 t，$|t|<T$，这个解关于 ξ 是缓增的呢？粗略的回答是当

$$(12.8)\qquad \widetilde{u}_0(\xi)e^{T|\xi|}\text{是缓增的}$$

时．若 $T'<T$，则(12.8)蕴涵着：当 $|\xi|\to+\infty$ 时 $\widetilde{u}_0(\xi)e^{T'|\xi|}$ 是速降的．我们有

$$u_0(x)=(2\pi)^{-1}\int e^{ix\xi}\widetilde{u}_0(\xi)d\xi.$$

显然，若 $|y|<T$，我们就可以用 $z=x+iy$ 代替 x：

$$u_0(z)=(2\pi)^{-1}\int e^{ix\xi}e^{-y\xi}\widetilde{u}_0(\xi)d\xi.$$

再者，若 $|y|<T$，我们就能在积分号下对 $\bar{z}$ 求导，且其结果显然为零：在带域 $|\operatorname{Im}z|<T$ 中，$u_0(z)$ 是 z 的全纯函数．因而，$u_0(x)$ 必须是 $\mathbf{R}$ 中的解析函数．这就作为一个提示出现在我们面前，(12.6)是

$$(12.9)\qquad \frac{\partial u}{\partial t}+i\frac{\partial u}{\partial x}=0,\qquad u|_{t=0}=u_0(x)$$

的变形．由于(12.9)的第一个条件，$u(t,\ x)$ 必为 $t+ix$ 的全纯函数．因而 $u_0(x)=u(0,\ x)$ 必为解析的．经过这一探讨，我们注意到，类似的讨论也适用于所有解析次椭圆微分算子．把它叙述得更具一般性，就是

命题 12.1 令 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的一开子集，P 是在乘积集合 $\{t\in\mathbf{R}^1;\ |t|<T\}\times\Omega$ 中定义的关于变量 t, x 的线性偏微分算子，它有解析系数，阶为 $m>0$．若 P 是解析次椭圆的，且函数 $f(t,\ x)$ 在上述乘积集合中是解析的，则问题

$$(12.10)\qquad Pu=f,\qquad x\in\Omega,\ |t|<T,$$

$$(12.11)\qquad \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j u=u_j(x),\quad j=0,\ \cdots,\ m-1,\ \text{当 } t=0,\ x\in\Omega\text{ 时}$$

没有(广义函数)解，除非所有的初始数据 u_j 都是 Ω 中的解析函数．

这个讨论也澄清了 *Laplace* 算子的情形：当 $P=\Delta$ 时，对于一般的数据 $u_j\in C^\infty(\Omega)$，$j=0, 1$，Cauchy 问题(我们这样称呼它)(12.10)—(12.11)将无解.

我们再来考察热导方程. 在此情形，变换后的方程为

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t}+|\xi|^2\tilde{u}=\tilde{f}(t, \xi). \tag{12.12}$$

若取 $f\equiv 0$，则(12.12)的所有解具有形式：

$$\tilde{u}(t, \xi)=\tilde{u}_0(\xi)\exp(-t|\xi|^2). \tag{12.13}$$

当 $-T<t<0$ 时关于 ξ 它不是缓增的，除非对任何 $T'<T$，$\tilde{u}_0(\xi)\exp(T'|\xi|^2)$ 是缓增的. 这就要求 $u_0(x)$ 是解析的，事实上，$u_0(x)$ 可延拓为复空间 $\mathbf{C}^n$ 上的一整函数. 另一方面，对于 $t>0$，只要 $\tilde{u}_0$ 是缓增的，则(12.13)关于 ξ 也是缓增的. 虽然这只是间接论据，但是它似乎还是指出，当 t 大于零时我们也许能解此 Cauchy 问题，而当 t 小于零时则不能. 我们在这里遇到的是某种典型情形，即对于"单侧 Cauchy 问题"，更明确些，对于前向 Cauchy 问题具有可解性，而对于"双侧 Cauchy 问题"不具有可解性的情形. 这个讨论仅适用于解的存在性，并且，通过更严格的分析它将得到证实. 对于解的唯一性，我们已经有了提示，它将不再适用. 为此，我们参阅例 3.1：取 Ω 为原点在 $\mathbf{R}^1$ 中的余集的任一开子集；在例 3.1 中用 $F(x, t)$ 表示的函数在 $\Omega\times\mathbf{R}^1$ 中是 (x, t) 的 C^∞ 函数，当 $t<0$ 时它恒等于零，因而它满足

$$F=\frac{\partial F}{\partial t}=0 \quad \text{当 } t=0,\ x\in\Omega \text{ 时}, \tag{12.14}$$

且为齐次热导方程

$$\frac{\partial F}{\partial t}=\Delta_x F \quad \text{在 } \Omega\times\mathbf{R}^1 \text{ 中} \tag{12.15}$$

的解.

如果替代热导方程，我们考察 Schrödinger 方程，则将面临不同的情形. 此时，变换后的方程为

$$\frac{1}{i}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t}+|\xi|^2\tilde{u}=\tilde{f}(t, \xi). \tag{12.16}$$

(12.16) 的 Riemann 函数是

$$\exp(-i(t-t')|\xi|^2), \tag{12.17}$$

对于所有的实数 t, t', 它是缓增的. 这暗示了对于双侧 Cauchy 问题, 解总是存在的——无论如何, 当 $t=0$ 时的 *Cauchy 数据* $u_0(x)$ 是缓增的时候, 解总是存在的. 没有另外的限制, 唯一性不成立(习题 12.3). 与此有关,我们注意到,热导方程和 Schrödinger 方程有一个共同的重要特征, 即, 它们关于 t 的导数的阶都等于 1, 而它们的总体阶为 2. 正如有关唯一性的主要定理——Holmgren 定理(§ 21)将要指出的那样(也参阅习题 12.1 到12.3), 这是事情的本质.

最后,但不是最不重要的,是*波动方程*变换后的方程

$$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial t^2}+|\xi|^2\tilde{u}=\tilde{f}(t, \xi) \tag{12.18}$$

的 Riemann 函数是函数

$$\frac{\sin(|\xi|(t-t'))}{|\xi|}, \tag{12.19}$$

对于任何 t, $t'\in\mathbf{R}^1$, 它是缓增的. 再者,波动方程关于 t 的导数的阶为 2, 与其总体阶相同. 在这里, 我们可以期望 Cauchy 问题的解的存在性和唯一性. 在一个空间变量的情形, 这已被我们所熟悉的分析证实了, 而通过基于已收集于 §§ 7 和 8 中的信息的严格的分析,它(对于任意数目的空间变量)也将得到证实.

习 题

12.1 θ 为一位于 $\frac{1}{2}<\theta<1$ 中的数. 证明:

$$F(t, x)=\int_{-\infty}^{\infty}\exp[i\tau t-(i\tau)^{1/2}x-(i\tau)^{\theta}]d\tau \tag{12.20}$$

确定了一个 $\mathbf{R}^2$ 中的 C^∞ 函数,它是齐次热导方程

$$\frac{\partial F}{\partial t}=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad (\text{在 } \mathbf{R}^2 \text{ 中}) \tag{12.21}$$

的解. [*注意*: 我们总是用"自然的方式"来选取分数幂 z^{α} 的分枝: 在正半实轴上取正值.]

12.2 利用 Cauchy 积分定理, 证明在(12.20)中定义的函数也等于

$$-i\int_{-a-i\infty}^{-a+i\infty}\exp(-zt-z^{1/2}x-z^{\theta})dz \tag{12.22}$$

(复积分是在垂直的直线 $\mathrm{Re}\, z=-a$ 上进行的，这里 a 是一任意正数). 由此得到，存在一个不依赖于 $a>0$ 的常数 $C>0$，使得

$$|F(t,\ x)|\leqslant C\exp(at+Ca^{\theta}) \tag{12.23}$$

(允许 C 依赖于 x，但是当 x 有界时 C 也有界). 从(12.23)得到，当 $t<0$ 时 $F(t,\ x)\equiv 0$.

12.3 修改习题 12.1 和 12.2 中的论证，构造 Schrödinger 方程

$$\frac{1}{i}\frac{\partial F_1}{\partial t}=\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} \quad 在\ \mathbf{R}^2\ 中 \tag{12.24}$$

的一个解 $F_1(t,\ x)$，它在全平面中是$(t,\ x)$的 C^{∞} 函数，而在半平面 $t<0$ 中它恒等于零.

12.4 在(12.20)中固定 $t>0$. 当 x 趋于 $+\infty$ 或趋于 $-\infty$ 时 $F(t,\ x)$的性状如何?

12.5 令 $P(\xi,\ \tau)$是两个变量的 m 次复系数多项式. 假设 $P(0,\ \tau)$的次数$\leqslant m-1$[但是 $P(\xi,\ \tau)$的 m 阶偏导数中至少有一个非零]. 利用 Puiseux 定理，并推广习题 12.1 和 12.2 中的论证，证明: 存在 $\mathbf{R}^2$ 中$(t,\ x)$的一个 C^{∞} 函数 $F(t,\ x)$，当 $t<0$ 时它恒等于零，且在整个平面中它满足齐次方程

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial t}\right)F=0. \tag{12.25}$$

12.6 令 A 是一复 $m\times m$ 矩阵，考虑 $\mathbf{R}^2$ 中的 Cauchy 问题

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}=A\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}, \quad \mathbf{u}|_{t=0}=\mathbf{u}_0(x), \tag{12.26}$$

其中黑体字表示复 m 向量. 证明，若 A 是自伴的，即 $A=A^*={}^t\bar{A}$，则对每个 $\mathbf{u}_0\in\mathscr{S}'_x(\mathbf{C}^m)$[这里 $\mathscr{S}'_x(\mathbf{C}^m)$为关于 x 的、取值于 $\mathbf{C}^m$ 中的缓增广义函数空间(即复 m 向量的空间，向量的分量是关于 x 的缓增广义函数)]，问题(12.26)有唯一解，它是 t(在 $\mathbf{R}^1$ 中)的 C^{∞} 函数，取值于空间 $\mathscr{S}'_x(\mathbf{C}^m)$中.

12.7 假设习题 12.6 中的矩阵 A 有互不相同的特征值. 证明: 若这些特征值无一为实的，则仅当 $\mathbf{u}_0(x)$是 x 的解析函数时，Cauchy 问题(12.26)才有解.

12.8 如同在习题 12.7 中一样，假设矩阵 A 的特征值互不相同. 证明，若这些特征值皆为实的，则对于 $\mathbf{R}^1$ 中任意的连续函数 $\mathbf{u}_0$，Cauchy 问题(12.26)总是有解. 给出此解的一个明显的表达式，并用此表达式求出它的支集，假设当 $|x|<1$ 时 $\mathbf{u}_0(x)>0$，而当 $|x|\geqslant 1$ 时 $\mathbf{u}_0(x)=0$.

12.9 考虑 Cauchy 问题

$$(12.27)\qquad \frac{\partial u}{\partial t}=\lambda t\Delta_x u \quad 在\ \mathbf{R}^{n+1}\ 中,\quad u|_{t=0}=u_0(x)\quad 在\ \mathbf{R}^n\ 中,$$

其中 $u_0(x)\in L^2(\mathbf{R}^n)$(同样地，我们也可取 u_0 为缓增广义函数). 证明，若 $\lambda>0$, 则问题(12.27)有解，它是 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的广义函数，事实上，当 $t\neq 0$ 时它是解析函数.

13. 波动方程的整体 Cauchy 问题. 解的存在性和唯一性

在这一节中，我们研究下述 *Cauchy* 问题:

$$(13.1)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\Delta_x u=f(t,\ x),\quad 在\ \mathbf{R}^{n+1}\ 中,$$

$$(13.2)\qquad 当\ t=0\ 时,\quad u=u_0(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}=u_1(x),\quad 在\ \mathbf{R}^n\ 中.$$

对于一类非常一般的数据 f 和 u_0, u_1, 我们将证明解 $u(t, x)$ 的存在性和唯一性. 暂时，对数据先作一较强限制的假定:

(13.3) $f(t, x)$ 是 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中 (t, x) 的 C^∞ 函数，其支集包含在某个圆柱 $\{(x, t);\ |x|\leqslant R\}$ 中;

(13.4) u_0, u_1 是 $\mathbf{R}^n$ 中 x 的 C^∞ 函数，有紧支集.

在这样的情形，我们可在(13.1)和(13.2)中关于 x 施行 Fourier 变换. 得到

$$(13.5)\qquad \tilde{u}_{tt}+|\xi|^2\tilde{u}=\tilde{f}(t,\ \xi)\quad 在\ \mathbf{R}^1\times\mathbf{R}_n\ 中,$$

$$(13.6)\qquad \tilde{u}(0,\ \xi)=\tilde{u}_0(\xi),\ \tilde{u}_t(0,\ \xi)=\tilde{u}_1(\xi)\quad 在\ \mathbf{R}_n\ 中,$$

其中下标表示微商.

为了用 f 和 u_0, u_1 表示 u, 应用公式(11.14). 在 §7 中我们已经计算了 $U_1(t, t')$. 即

$$(13.7)\qquad U_1(t,\ t')=\frac{\sin(|\xi|\,(t-t'))}{|\xi|}.$$

因为[参阅(11.15), (11.16)]$U_0(t, 0)$ 是

$$(13.8)\qquad V_{tt}+|\xi|^2V=0,\ V|_{t=0}=1,\ V_t|_{t=0}=0$$

的解，我们就立刻得到

$$U_0(t,\ 0)=\cos(|\xi|t). \tag{13.9}$$

由(11.14),我们有

$$\tilde{u}(t,\ \xi)=\tilde{u}_0(\xi)\cos(|\xi|t)+\tilde{u}_1(\xi)\frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}+\int_0^t \tilde{f}(t',\ \xi)\frac{\sin(|\xi|(t-t'))}{|\xi|}dt'. \tag{13.10}$$

首先取 $t>0$. 则我们可写

$$\tilde{u}(t,\ \xi)=\tilde{u}_0(\xi)H(t)\frac{\partial}{\partial t}\frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}+\tilde{u}_1(\xi)H(t)\frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}+\int_{-\infty}^{+\infty}H(t')\tilde{f}(t',\ \xi)H(t-t')\frac{\sin(|\xi|(t-t'))}{|\xi|}dt'. \tag{13.11}$$

注意,(13.11)的右端的第一项等于

$$\tilde{u}_0(\xi)\frac{\partial}{\partial t}\left\{H(t)\frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}\right\}.$$

由此,对于 $t>0$, (13.11)可改写为

$$\tilde{u}(t,\ \xi)=\tilde{u}_0(\xi)\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{E}_+(t,\ \xi)+\tilde{u}_1(\xi)\widetilde{E}_+(t,\ \xi)+\{H(t)\tilde{f}(t,\ \xi)\}\underset{(t)}{*}\widetilde{E}_+(t,\ \xi), \tag{13.12}$$

其中 $\underset{(t)}{*}$ 意味着卷积只关于 t 计算. 对于 $t<0$, 我们有

$$\tilde{u}(t,\ \xi)=-\tilde{u}_0(\xi)\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{E}_-(t,\ \xi)-\tilde{u}_1(\xi)\widetilde{E}_-(t,\ \xi)+\{H(-t)\tilde{f}(t,\ \xi)\}\underset{(t)}{*}\widetilde{E}_-(t,\ \xi). \tag{13.13}$$

在这些公式中, E_+(或者, E_-)是波动方程的支集在前向(或者,后向)光锥中的基本解, $\widetilde{E}_+$(或者, $\widetilde{E}_-$)是其关于 x 的 Fourier 变换[记住 $\widetilde{E}_+-\widetilde{E}_-=\sin(|\xi|t)/|\xi|$]. 关于 x 施行 Fourier 逆变换,得到

$$u(t,\ x)=u_0(x)\underset{(x)}{*}\frac{\partial}{\partial t}(E_+-E_-)+u_1(x)\underset{(x)}{*}(E_+-E_-)+\{H(t)f(t,\ x)\}\underset{(t,x)}{*}E_++\{H(-t)f(t,\ x)\}\underset{(t,x)}{*}E_-. \tag{13.14}$$

一旦写下这个公式，下述事实就成为显然的了：加在数据上的限制条件(13.3)—(13.4)有很多可解除．事实上，当 $u_0(x)$，$u_1(x)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的任意广义函数，且当 $f(t, x)$ 是 t 的连续函数取值于关于 x 的广义函数空间 $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n_x)$ 中时，(13.14)中的卷积就有意义．这是因为对每个 t，作为 x 的广义函数的 E_+ 和 E_-，它们的支集包含在球 $|x|\leqslant|t|$ 中．至于关于 t 的卷积，它们有意义，因为 E_+ 和 $H(t)f(t, x)$ 的支集都包含在半空间 $t\geqslant 0$ 中，而 E_- 和 $H(-t)f(t, x)$ 的支集都包含在半空间 $t\leqslant 0$ 中(回忆一下，在实直线上支集含于半直线 $t\geqslant 0$ 中的广义函数形成一个卷积代数)．

这样，公式(13.14)就拓广到相当一般的数据[唯一的限制是 $f(t, x)$ 为 t 的连续函数，取值于 $\mathscr{D}'_x$ 中，]．但我们可以问，由(13.14)给出的 $u(t, x)$ 是否满足(13.1)和(13.2)．它满足(13.1)是显然的．我们来验证(13.2)．令 Ω 表示 $\mathbf{R}^n$ 的一有界开子集．若 $|t|<T$，则视作 x 的广义函数的

$$E_+,\quad E_-,\quad \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)(E_+-E_-),\quad E_+-E_-,$$

它们的支集包含于开球 $|x|<T$ 中．用 Ω_T 表示到 Ω 的距离不超过 T 的点 $x\in\mathbf{R}^n$ 的集合．令 $\alpha\in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$，在 Ω_T 中 $\alpha=1$ 而在 $\Omega_{T+\varepsilon}(\varepsilon>0)$ 外 $\alpha=0$．由卷积的熟知性质，我们看到

(13.15)　　若 $|t|<T$，$x\in\Omega$，则

$$\begin{aligned}u(t, x)=&\{\alpha(x)u_0(x)\}\underset{(x)}{*}\left\{\frac{\partial}{\partial t}(E_+-E_-)\right\}\\&+\{\alpha(x)u_1(x)\}\underset{(x)}{*}(E_+-E_-)\\&+\{H(t)\alpha(x)f(t, x)\}\underset{(t,x)}{*}E_+\\&+\{H(-t)\alpha(x)f(t, x)\}\underset{(t,x)}{*}E_-.\end{aligned}$$

此公式的右端有点类似于在假设(13.3)和(13.4)下的公式(13.14)的右端．在这里，$\alpha(x)u_0(x)$，$\alpha(x)u_1(x)$，$\alpha(x)f(t, x)$ 未必是光滑函数．但是它们关于 x 的支集都包含在一固定的紧集中．因而，由 Paley-Wiener 定理，它们关于 x 的 Fourier 变换是 ξ 的解析

函数．在这里，(13.10)型的公式也成立：自然，我们必须用 $v_j(x)=\alpha(x)u_j(x)$ 代替 $u_j(x)$ $(j=0, 1)$，用 $g(t, x)=\alpha(x)f(t, x)$ 代替 $f(t, x)$，并且用等于(13.15)右端的 $v(t, x)$ 代替 $u(t, x)$．假设 f 是取值于 $\mathscr{D}'_x$ 中的 t 的连续函数．则 g 是取值于 x 的缓增广义函数空间 $\mathscr{S}'_x$ 中的 t 的连续函数，而 $\tilde{g}(t, \xi)$ 是取值于 $\mathscr{S}'_\xi$ 中的 t 的连续函数．由(13.10)我们看到，当 $t\to 0$ 时在 $\mathscr{S}'_\xi$ 中 $\tilde{v}(t, \xi)$ 收敛于 $\tilde{v}_0(\xi)$，同时，

$$(13.16)\quad \tilde{v}_t(t, \xi)=-\tilde{v}_0(\xi)|\xi|\sin(|\xi|t)+\tilde{v}_1(\xi)\cos(|\xi|t)+\int_0^t \tilde{g}(t', \xi)\cos(|\xi|(t-t'))dt'$$

收敛于 $\tilde{v}_1(\xi)$．这就蕴涵着，当 $t\to 0$ 时，在 Ω 中的广义函数的意义下，$u(t, x)$ 收敛于 $u_0(x)$，$u_t(t, x)$ 收敛于 $u_1(x)$．因为 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的任意的有界开子集，所以这个收敛性在 $\mathbf{R}^n$ 中也是成立的．此外，(13.16)指出，$u_t(t, x)$ 是取值于 $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ 中的 t 的 C^1 函数，因而(参阅命题 11.2)，$u(t, x)$ 是取值于 $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ 中的 t 的 C^2 函数．

读者将注意到，我们在这里处理的是取值于(无限维)局部凸空间，例如 $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ 中的可微函数．关于取值于 Banach 空间中的可微函数，参看 § 39．若 E 是一局部凸 Hausdorff 空间，特别地，它也是一拓扑空间，这时我们就知道定义于另一拓扑空间 X 中且取值于 E 中的一连续函数 f 的含义．若 X 是实直线或 Euclid 空间 $\mathbf{R}^m$ 的一开子集，则可以定义 f 在 X 的点处的导数，或 f 的梯度．例如考虑 $X=\mathbf{R}^1$ 的情形，用 t 表示 $\mathbf{R}^1$ 中的变量．则当 $h\neq 0$ 趋于零时，$f'(t_0)=\lim h^{-1}[f(t_0+h)-f(t_0)]$．与经典的情形相比较，唯一的不同是，收敛性是在 E 中考虑的，而在 E 中用自然的方式赋予其各种拓扑，例如，强(或原始)拓扑或弱拓扑 $\sigma(E, E')$．在本书中我们大多用强拓扑——在 Banach 空间中这意味着由范数确定的拓扑．在空间 $\mathscr{D}'$ 或 $\mathscr{S}'$(缓增广义函数空间)中，它没有任何差别：对序列或具有可数基的滤子(filter)(它是被包含在导数的定义之中的)来说，它等价于 $\mathscr{D}'$ 或 $\mathscr{S}'$ 中的弱拓扑．这样，说依赖于实变量 t(例如，在某个区间 $]t_0, t_1[$ 中)的广义函数 $T(t)$ 是连

续可微的,或者,是 $C^k(0\leqslant k\leqslant +\infty)$的, 和说对于任何给定的试验函数 $\phi\in C_c^\infty$, 纯量函数 $\langle T(t),\phi\rangle$ 是连续可微的或者是 C^k 的, 这两件事是一样的. 当 $T(t)$是缓增的并被视作取值于 $\mathscr{S}'$ 中时, 这也是有效的. 以后将要用到而现在必须回忆的一个事实是,在 $\mathbf{R}^m$ 的一开子集 X 中定义且为 C^∞ 的函数 f, 它取值于另一空间 $\mathbf{R}^n$ 的开子集 Y 中的 C^∞ 函数空间中, 就和乘积 $X\times Y$ 中的 C^∞ 函数是一回事.

现在考虑 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的广义函数 $h(t,x)$, 它取值于 $\mathscr{D}'(\mathbf{R}_x^n)$ 中, 是 t 的 C^2 函数,且满足

(13.17) $\qquad h_{tt}-\Delta_x h=0 \quad$ 在 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中,

(13.18) $\qquad h=h_t=0 \quad$ 在 $\mathbf{R}^n$ 中,当 $t=0$ 时.

令 $h_+(t,x)=H(t)h(t,x)$. 从 Leibniz 公式和初始条件(13.18)立刻得到

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 h_+=H(t)h_{tt},$$

因而

(13.19) $$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 h_+-\Delta_x h_+=0 \quad \text{在 } \mathbf{R}^{n+1} \text{ 中}.$$

因为 h_+ 的支集包含在半空间 $t\geqslant 0$ 中, 因而先前在公式(13.14)中关于卷积的讨论在这里也适用. 现在可以写

$$0=E_+*(\square h_+)=(\square E_+)*h_+=h_+,$$

其中$\square$表示波动算子. 这就证明了解 $u(t,x)$的唯一性, 而前面已证明了它的存在性. 总括起来,有:

定理 13.1 令 u_0,u_1 是 $\mathbf{R}^n$ 中任何两个广义函数, $f(t,x)$是 $t\in\mathbf{R}^1$ 的任一连续函数,取值于 $\mathscr{D}'(\mathbf{R}_x^n)$ 中. 则 Cauchy 问题(13.1)—(13.2)有唯一解 $u(t,x)$, 它取值于 $\mathscr{D}'(\mathbf{R}_x^n)$ 中,是 t 的 C^2 函数. 它由公式(13.14)给出.

公式(13.5)和(13.16)还证明了, 当数据是 C^∞ 函数时, 解的 C^∞ 性亦真:

定理 13.2 令 u_0,u_1 是 $\mathbf{R}^n$ 中任两个 C^∞ 函数, f 是 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中任一 C^∞ 函数. 则由公式(13.14)给出的问题(13.1)—(13.2)的解 u 也

是 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的 C^∞ 函数.

应该这样来理解定理 13.2，它绝非是一个次椭圆性的结果：它不是关于(13.1)的每个解的正规性的命题、而仅仅是关于(13.1)的唯一解的命题，它也满足(13.2).

与其对于具有 C^∞ 数据的 Cauchy 问题去求 C^∞ 解，倒不如用具有某种类型限制的正规性的数据去求具有尽可能好的正规性的解. $\mathbf{R}^n$ 中所谓的 *Sobolev* 空间提供了关于 x 度量正规性的一个好方法. 用平方可积性作为零级正规性来度量. 则正规性的级可为任何实数 s：若 s 是一正整数，则说 u 是 s 级正规的，即 u 的所有阶数 $\leqslant s$ 的导数都是 L^2 函数；若 s 是一负整数，则说 u 是 s 级正规的，即 u 是一个 L^2 函数的阶数 $\leqslant s$ 的广义导数之和. 这个途径的最大的好处是，在空间 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 中 Fourier 变换很有效：我们可以充分利用 Plancherel 定理. 这就使我们在 s 不是整数的时候能够定义正规性的级. s 阶的 Sobolev 空间 $H^s(\mathbf{R}^n)$ 的形式定义如下：

定义 13.1　$\mathbf{R}^n$ 中的缓增广义函数 u 称为属于 $H^s(\mathbf{R}^n)$，若关于测度 $(1+|\xi|^2)^s d\xi$，u 的 Fourier 变换 $\hat{u}$ 是平方可积函数.

我们再说一遍，这里 s 可以是任何实数. 在 $H^s(\mathbf{R}^n)$ 中令范数为

$$\|u\|_s=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\left\{\int|\hat{u}(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^s d\xi\right\}^{1/2}, \tag{13.20}$$

我们可以把 $H^s=H^s(\mathbf{R}^n)$ 变成一 Hilbert 空间. 用 $\mathscr{F}$ 表示 $\mathbf{R}^n$ 中的 Fourier 变换，并用 $\mathscr{F}^{-1}$ 表示其逆变换，我们可以引进算子

$$T^s u=\mathscr{F}^{-1}(1+|\xi|^2)^{s/2}\mathscr{F}u. \tag{13.21}$$

我们看到，T^s 是从 H^s 到 $H^0=L^2$ 上的一个等距算子：通过 T^s，H^s 是 L^2 的一个复本. 令 $\mathscr{S}$ 表示 $\mathbf{R}^n$ 中的 C^∞ 函数 φ 的空间，对于任何多重指数 α 和整数 k，在无穷远处 $|D^\alpha\varphi|$ 下降快于 $|x|^{-k}$. Fourier 变换是从 $\mathscr{S}_x$（赋予其自然的拓扑）到 $\mathscr{S}_\xi$ 上的同构；另一方面，乘以 $(1+|\xi|^2)^{s/2}$ 的运算显然是从 $\mathscr{S}_\xi$ 到其自身上的一个同构. 这样，我们就得到 T^s 是从 $\mathscr{S}_x$ 到其自身上的一个同构. 事实上，当 s

变化时，算子 T^s 形成 $\mathscr{S}_x$ 的一个单参数的自同构群. 特别地，T^{-s} 把 $\mathscr{S}\subset L^2$ 映到 $\mathscr{S}\subset H^s$ 上. 因为 T^{-s} 是一等距算子，且 $\mathscr{S}$ 在 L^2 中稠，我们就得到下面要用的结论：

命题 13.1 $\mathbf{R}^n$ 中在无穷远处速降的 C^∞ 函数空间 $\mathscr{S}$ 在每个 H^s 空间(S 为实数)中稠.

因为试验函数空间 C_c^∞ 在 $\mathscr{S}$ 中稠，因而它也在每个 H^s 中稠(关于 Sobolev 空间的更多的研究，参看 §§ 24 和 25).

我们现在回到公式(13.10). 用 $(1+|\xi|^2)^{s/2}$ 乘(13.10)的两端，并注意

$$\left|\frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}\right|\leqslant 2(1+|\xi|^2)^{-1/2}\sup(1,\ |t|);$$

因而，由(13.20)，

$$\|u(t,\ \cdot)\|_s\leqslant\|u_0\|_s+2\sup(1,\ |t|)\|u_1\|_{s-1}+2\left|\int_0^t\|f(t',\ \cdot)\|_{s-1}\sup(1,\ |t-t'|)dt'\right|. \tag{13.22}$$

因为 C_c^∞ 在 H^s 中稠，这就指出了，当 $u_0\in H^s$, $u_1\in H^{s-1}$, f 是 t 的连续函数，取值于 H^{s-1} 时，公式(13.10)仍有效. 然而，因此而说 u 是 t 的 C^2 函数，取值于 H^s，那是不对的. 例如，若将(13.10)对 t 微商一次，如同(13.16)一样，出现了一个新因子 $|\xi|$. 这样，若上面提到的假设成立，则 u_t 是 t 的连续函数，取值于 H^{s-1} 中. 我们有

$$\|u_t(t,\ \cdot)\|_{s-1}\leqslant 常数\cdot\left\{\|u_0\|_s+\|u_1\|_{s-1}+\left|\int_0^t\|f(t',\ \cdot)\|_{s-1}dt'\right|\right\}. \tag{13.23}$$

我们可以把这个论证推进一步，因而可以证明

定理 13.3 假设 $u_0\in H^s$, $u_1\in H^{s-1}$, 且 f 是 $t\in\mathbf{R}^1$ 的连续函数，取值于 H^{s-1} 中，则(13.1)—(13.2)的解 u 是 t 的 C^k 函数，取值于 $H^{s-k}(k=0,\ 1,\ 2)$ 中.

更一般地，有

定理 13.4 假设 $u_0\in H^s$, $u_1\in H^{s-1}$, 且 f 是 t 的 C^m 函数，取值于

H^{s-1}中．则(13.1)－(13.2)的解 u 是 t 的 C^k 函数，取值于 H^{s-k} $(k=0, 1, \cdots, m+2)$中．

在此，讨论解 u 对于数据的依赖性是惯例，而解 u 的存在性和唯一性已由上面几个定理所断言．这用闭图像定理就能容易地办到，只要注意到公式(13.14)有下述显然的推论：

定理 13.5　映射

$$(u_0, u_1, f)\mapsto u \tag{13.24}$$

是从三重积　$\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)\times\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)\times C^0(\mathbf{R}^1_t;\ \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n_x))$

到 $C^2(\mathbf{R}^1_t;\ \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n_x))$中的一个连续线性映射，其中 u 由(13.14)给出．

证明　只需应用公式(13.15)即可，它将证明归为 u_0, u_1 有紧支集，同时 $\operatorname{supp} f$ 在 x 变量的空间 $\mathbf{R}^n$ 上的投影是紧集的情形．然后关于 x 施行 Fourier 变换并验证公式(13.10)，——那是显然的．　　证毕．

因此我们立刻得到下述结果：

定理 13.6　映射(13.24)是从

$$C^\infty(\mathbf{R}^n)\times C^\infty(\mathbf{R}^n)\times C^\infty(\mathbf{R}^{n+1})$$

到 $C^\infty(\mathbf{R}^{n+1})$中的一个连续线性映射．

事实上，容易看到这个映射的图像是闭的(参阅注 15.1)，因而，由闭图像定理，此映射是连续的．类似地，我们证明定理 13.3 的下述推广：

定理 13.7　映射(13.24)是从

$$H^s(\mathbf{R}^n)\times H^{s-1}(\mathbf{R}^n)\times C^0(\mathbf{R}^1_t;\ H^{s-1}(\mathbf{R}^n))$$

到

$$\bigcap_{k=0,1,2} C^k(\mathbf{R}^1_t;\ H^{s-k}(\mathbf{R}^n))$$

中的一个连续线性映射．

回忆一下，若 Ω 是 $\mathbf{R}^m$ 的一开子集，而 X 是一 Banach 空间，则空间 $C^k(\Omega;\ X)$被赋予在 Ω 的每个紧子集上，函数及其阶数$\leqslant k$的所有导数的一致收敛拓扑．我们再回忆一下，交 $A\cap B$ 的拓扑是如下定义的：一集合为 $A\cap B$ 中某点的邻域，若对于 A 在 $A\cap B$

上诱导的拓扑，或对于 B 在 $A\cap B$ 上诱导的拓扑，此集合为该点的邻域。

习　题

13.1　在公式(12.3)中，假设 u_0 和 u_1 都有紧支集．证明，(12.3)等价于(13.10)，其中 $n=1$ 和 $f\equiv 0$．

13.2　令 θ 表示单位圆周 Γ 上的角变量(这样，θ 即从 0 变到 2π)．用 Fourier 级数展开式，解 Cauchy 问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2},\quad t\in\mathbf{R}^1,\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, \tag{13.25}$$

$$u=u_0(\theta),\quad \frac{\partial u}{\partial t}=u_1(\theta),\quad \text{当 } t=0,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi \text{ 时}, \tag{13.26}$$

其中 u_0 和 u_1 是 θ(在 Γ 上)的两个 C^∞ 函数．当 u_0 和 u_1 是 Γ 上任何两个广义函数时，用同样的方法求解．比较(12.3)和(13.10)．

13.3　用与习题 13.2 相同的记号，对于 Cauchy 问题(13.25)—(13.26)提出与定理 13.4 类似的定理(特别地，读者必须定义在单位圆周 Γ 上的 Sobolev 空间 H^k)．

13.4　用与习题 13.2 相同的记号，显式地解问题(13.25)—(13.26)，其中 $u_0=0$，$u_1=\delta(\theta)$，$\delta(\theta)$为单位圆周 Γ 上的 Dirac 广义函数(即在 $\theta=0$ 处的质量 $+1$)．再考虑实直线上的周期广义函数 $\mathring{\delta}$，它等于区间 $-2\pi<t<2\pi$ 中的 Dirac 测度．应用公式(12.3)和(13.10)解当 $u_0=0$，$u_1=\mathring{\delta}$ 时的Cauchy 问题(12.1)—(12.2)．

13.5　考虑 $n\geqslant 2$ 时的 Cauchy 问题(13.1)—(13.2)．假设数据 f，u_0，u_1 是 $x\in\mathbf{R}^n$ 的旋转不变函数，即它们只是 $|x|$ 的函数．证明，此时解 u 也只是 $|x|$ 的函数(对于固定的时刻 t)．还证明，可以简化公式(13.14)，使它包含积分，更一般地，包含一表达式，其中只出现变量 t 和 $|x|$．应用在 § 8 的附录中计算的 E_+ 的表达式，在 $n=2$，3 的情形，把上述简化显式地写出来．

13.6　考虑 *Klein-Gordon* 算子

$$K_m=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta_x+m^2. \tag{13.27}$$

当 m 是实数，$m\neq 0$ 时，给出类似于(13.7)和(13.9)的公式．验证定理 13.1 的证明确实可推广到这个情形，从而把定理 13.1 推广到这个情形．当 m 是任何复数时，定理 13.1 仍然成立吗？

14. 影响域，奇性的传播，能量守恒

Cauchy 问题(13.1)—(13.2)的解 u 的存在性和唯一性已在定理 13.1 中叙述，这个解 u 是问题

(14.1) $$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\Delta_x v=0 \quad \text{在 } \mathbf{R}^{n+1} \text{ 中},$$

(14.2) $$\text{当 } t=0 \text{ 时},\ v=u_0(x),\ \frac{\partial v}{\partial t}=u_1(x) \quad \text{在 } \mathbf{R}^n \text{ 中}$$

的解 v 与下述问题:

(14.3) $$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\Delta_x w=f(t, x), \quad \text{在 } \mathbf{R}^{n+1} \text{ 中},$$

(14.4)† $$\text{当 } t=0 \text{ 时}, \quad w=0,\ \frac{\partial w}{\partial t}=0 \quad \text{在 } \mathbf{R}^n \text{ 中}$$

的解 w 的和 $v+w$. 稍加思索即易指出这两问题的每一个的意义. 在第一个问题中，具有某个初始强度和某个初始传播速度，在零时刻生成了一个振动现象；然后它就通过一个没有其它扰动产生的介质向着将来和过去两方面传播. 在空间和时间的任何给定的点，函数 v 度量着振动的振幅和相. 在问题(14.3)—(14.4)中，没有“初始脉冲”：但是在介质中，在某个区域中(那里有“源”和“壑”)产生一个“场”，在某种程度上区域随时间而变；w 度量最终的振动.

分开来研究这两个问题较为方便. 我们将主要考察前者，(14.1)—(14.2). 它的解由(13.14)给出:

(14.5) $$v(t, x)=u_0(x)\underset{(x)}{*}\frac{\partial}{\partial t}(E_+-E_-)+u_1(x)\underset{(x)}{*}(E_+-E_-).$$

例如，我们在半空间 $t>0$ 中考察 v. 在那里我们有

(14.6) $$v(t, x)=u_0(x)\underset{(x)}{*}\frac{\partial E_+}{\partial t}+u_1(x)\underset{(x)}{*}E_+.$$

† 在这一节中，除非另有声明，否则 u_0 和 u_1 总表示 $\mathbf{R}^n$ 中两个广义函数，$f(t, x)$ 表示 $\mathbf{R}^1$ 中的 t 的连续函数，取值于 $\mathcal{D}'_x(\mathbf{R}^n)$ 中.

定理 14.1 令 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的任一开子集，t 是大于零的任一数．则 $v(t, x)$ 在 Ω 中的值只依赖于 $u_0(x)$ 和 $u_1(x)$ 在集合

$$\Omega_t = \{x \in \mathbf{R}^n;\ \operatorname{dist}(x, \Omega) < t\}$$

中的值．

证明 只需证明，若 u_0 和 u_1 在 Ω_t 中都为零，则 $v(t, x)$ 在 Ω 中为零即可．在这样的情形，我们有

$$\operatorname{supp}_x\left(u_0 \underset{(x)}{*} \frac{\partial E_+}{\partial t}\right) \subset \operatorname{supp}_x u_0 + \operatorname{supp}_x E_+ \subset \mathbf{C}\Omega_t + \operatorname{supp}_x E_+,$$

其中 supp_x 表示广义函数关于 x 变量的支集（t 是固定的）；$A+B$ 表示 $\mathbf{R}^n$ 的子集 A 和 B 的向量加法．记住：作为 x 的广义函数的 $E_+(x, t)$，其支集包含在球 $|x| \leqslant t$ 中，我们有

$$\operatorname{supp}_x\left(u_0 \underset{(x)}{*} \frac{\partial E_+}{\partial t}\right) \subset \mathbf{C}\Omega.$$

对于 $u_1 \underset{(x)}{*} E_+$，类似的包含关系也成立． 证毕．

上面的叙述通常称为关于影响域的定理．可以用下述方式来构作开集 Ω_t：把 Ω 视作 $\mathbf{R}^{n+1}$ 的一子集，包含在对应于 t 时刻的超平面中，即，把 Ω 等同于 $\tilde{\Omega} = \{(x, t); x \in \Omega\}$．令 Ω_Γ 表示顶点在 $\tilde{\Omega}$ 中移动所产生的所有后向光锥的并集．则 Ω_t 即为 Ω_Γ 与相应于时刻零的超平面的交集（看图 14.1）．

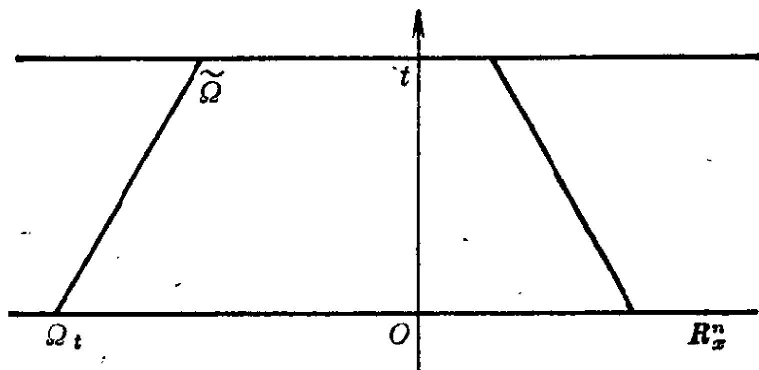


图 14.1

暂且假设 u_0 和 u_1 是 $\mathbf{R}^n$ 中的 C^∞ 函数．那么上面关于影响域的考察可做得更准确：对于固定的 t，$v(t, x)$ 在 x_0 处的值（现在 v 是 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的 C^∞ 函数）只依赖于 u_0 和 u_1 在球 $|x-x_0| \leqslant t$ 中的值．

这可以从(14.6)中的卷积直接加以验证，不然也可以应用定理 14.1，并令 Ω 收敛于点 x_0. 其实，对于这个要作的论证，u_0 和 u_1 不需要是 C^∞ 的：它们必须有使 v 为 (t, x) 的连续函数的足够的正规性.

在适当的时候上面的讨论可以倒过来：与其问：在空间的某个区域中在一给定的时刻观察到的现象产生于何处，不如问：在某个集合中在零时刻发生的现象将影响什么区域. 更严格地，这就是问：知道了 u_0 和 u_1 的支集包含于 K 中，那么 $v(t, x)$ 的支集是什么？自然，在半空间 $t>0$ 中，

(14.7) $$\operatorname{supp} v \subset K + \operatorname{supp} E_+,$$

其中 K 已被等同于点 $(x, 0)$ $(x\in K)$ 的集合. 由于 Huyghens 原理，在 $n>1$, n 为奇数的情形与其它的情形之间有着重大的差别. 取 K 为一个点可以很清楚地看出此差别，例如取 $K=\{0\}$ [这样，不妨取 $u_0=\delta(x)$, $u_1=0$; 更一般地，不妨取 u_0, u_1 为 Dirac 测度及其关于 x 的导数的任意的线性组合]. 这相应于在时刻 $t=0$，具有"无限的"强度在空间的某点闪了一下光，并在时刻 $t>0$ 时即中止发光的现象. 若 $n=3$，或更一般地，若 $n\geqslant 3$ 并且为奇数，则在任意时刻 $t_0>0$，由 $v(x, t)$ 度量的振动集中在球面 $|x-x_0|=t_0$ 上. 我们可以重新叙述这个现象如下：假定观察者位于空间中离原点的距离为 $r>0$ 的某一点：当 t 从零增大到 r 时，振动向他而来，在时刻 $t=r$，振动到达观察者处，而当 $t>r$ 增大时振动离他而去. 振动在恰好等于 r 的时刻 t 达到观察者处这一事实仅仅是由于我们度量时间和空间的选择的一致性；因为我们处处假定了传播速度等于 1. 在速度是任意数 $V>0$ 的一般情形，答案是显然的：在时刻 r/V，振动到达观察者处.

当 $n=1$ 或者当 n 是偶数时，波也是在时刻 $t=r$ 时到达，但与 $n=3, 5, 7, \cdots$ 的情形不同的是，即使在时刻 $t>r$，观察者仍将继续感觉到振动(如果他手头有足够灵敏的仪器).

与第二个问题(14.3)—(14.4)的比较也是有益的. (14.3)—(14.4)的解为

(14.8) $w(t,x)=\{H(t)f(t,x)\}*E_{+}+\{H(-t)f(t,x)\}*E_{-}$,

这里 $*$ 意味着关于所有变量 t 和 x 的卷积. 在半空间 $t>0$ 中，我们有

(14.9) $$w=\{H(t)f\}*E_{+}.$$

值得注意的是，表示介质(它随时间而变化)中的源和壑的效果的右端数据中，只有那些位于现在或将来本身的右端数据才影响将来. 这与因果律(causality principle)一致. 自然，

(14.10) $$\operatorname{supp} w\subset\operatorname{supp} H(t)f+\operatorname{supp} E_{+}.$$

这与(14.7)类似. 但是在(14.7)中 K 是超平面 $t=0$ 的一个紧子集，而在这里 $\operatorname{supp}(H(t)f)$ 可以是闭半空间 $t\geqslant 0$ 的任一子集. 考察点源可以很好地看出其差别. 例如，假设 $f(t,x)=1(t)\delta(x)$. 则 $H(t)f(t,x)=H(t)\delta(x)$ 将描述在空间的给定点(取为空间的原点)开灯并且此后永远亮着这样的现象. $H(t)f(t,x)$ 的支集是半直线 $t\geqslant 0$, $x=0$. (14.10)的右端等于前向光锥 Γ_{+}，无论空间的维数 n 的奇偶性如何. 这与通常的经验是一致的，即若源继续喷流，则位于空间任何一处的观察者将继续接收到其流. 除了源(光源，声源，无线电波源，等等)，我们还可以考虑壑或障碍物，或源和壑[这相应于右端 $f(t,x)$ 的符号，我们假定 f 是实值函数，或更一般地，是实值测度]的任何组合. 至于障碍物，自然我们应该遇到它的影子及光的吸收，等等.

现在来研究所谓的奇性的传播. 假设在 $\mathbf{R}^n$ 的某个闭子集 S 外 u_0 和 u_1 是 C^∞ 函数，换句话说，假定 u_0 和 u_1 的奇异支集包含在 S 中，我们试图确定(14.1)—(14.2)的解 v 的奇性所在. 关于问题(14.3)—(14.4)，我们也能提出类似的问题. 在这两个情形中，考察卷积

(14.11) $$g=E*h$$

可以得到答案，这里 E, g, h 是 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的广义函数，E 的支集包含在 Γ_{+} 中，而 g 和 h 的支集包含在半空间 $t\geqslant 0$ 中. 注意，v 的表达式(14.6)中的两项事实上具有这种形式：例如，令 $E=E_{+}$ 和 $h(t,x)=\delta(t)u_1(x)$ 就得到其第二项.

引理 14.1　在上面的假设下，有

(14.12)　　$\text{sing supp}\, g \subset \text{sing supp}\, E + \text{sing supp}\, h.$

证明　令 α(相应地，β)是 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的 C^∞ 函数，其支集在 $A=\text{sing supp}\, E$(相应地，$B=\text{sing supp}\, h$)的一个 ε 邻域中，并且，在 A 的(相应地，B 的)$\varepsilon/2$ 邻域中 α(相应地，β)等于 1. 我们有，$E=\alpha E+(1-\alpha)E$, $h=\beta h+(1-\beta)h$ 和 $(1-\alpha)E$, $(1-\beta)h$ 都是 C^∞ 函数；因而

$$g-(\alpha E)*(\beta h)$$

是 C^∞ 函数. 但是 $\text{supp}[(\alpha E)*(\beta h)]\subset \text{supp}\,\alpha+\text{supp}\,\beta$ 包含在 $A+B$ 的 2ε 邻域中. 令 $\varepsilon\to 0$, 我们得到在 $A+B$ 的余集中 g 是 C^∞ 函数这一结论.　　证毕.

在把此引理应用于我们的情形时，有 $E=E_+$ 或 $E=\partial E_+/\partial t$, $h=\delta(t)u_j(x)$ $(j=0, 1)$ 或 $h=H(t)f(t, x)$. 因而能够提出

定理 14.2　假设在 $\mathbf{R}^n\backslash S$ 中 u_0 和 u_1 是 C^∞ 函数(这里 S 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个闭子集). 任给 $t>0$, 则(14.1)—(14.2)的解、关于 x 的广义函数 $v(t, x)$ 在集合

$$S_{(t)}=\{x\in\mathbf{R}^n;\ \exists y\in S,\ |x-y|=t\}$$

关于 $\mathbf{R}^n$ 的余集中是 C^∞ 函数.

关于(14.3)—(14.4)的解 w, 有类似的命题，我们把它留给读者.

不难作出定理 14.2 的物理解释. 既然当 $n=3, 5, 7, \cdots$ 时 E_+ 的支集与其奇异支集是一致的，故当 $n=1$ 或 n 是偶数时也容易得到这事实. 例如，取 $n=2$: 用形象的语言说，它相应于一个二维的传播介质，譬如湖面或海面. 在湖的中心，在零时刻发生了一个非常短但是非常强的风暴似的事件("非常"自然意味着"无限地"); 从那里开始，一个象大浪一样的波传播着. 对于湖上一个距离湖中心 r 的不动的观察者来说，直到波在时刻 $t=r$ 时到达他这里以前什么也没发生过. 在那个时刻，他发现自己处于一个非常剧烈的状态中：初始"爆炸"或风暴的所有能量似乎都被集中于波前. 如果我们的观察者还活着，一旦波前通过他这里后，他将发现

他自己平稳地"涨高"了，他到静止的湖面的高度随时间趋于$+\infty$而减少到零.

必须注意，集合$S_{(t)}$有某一宽度，由包含u_0和u_1的奇性的集合S的宽度确定. 如果S是紧集，则$S_{(t)}$的宽度将是有限的：在这里，我们可以想象一个爆发着的并且位于燃烧体扩散壳中心的恒星：$S_{(t)}$是其壳(在时刻t的). 我们可以考虑$S_{(t)}$的外边界；它是集合

$$\dot{S}_{(t)}=\{x\in\mathbf{R}^n;\ \operatorname{dist}(x,S)=t\}.$$

$\dot{S}_{(t)}$构成一单参数超曲面族；若$t_1<t_2$，则$\dot{S}_{(t_1)}$包含在$\dot{S}_{(t_2)}$的内部. 如果假定这些超曲面是充分光滑的，譬如它们是C^1的，则可以引入它们的*正交轨道*. 它们通常称为*光线*：没有必要去推敲它们的光学解释. 当把光线的概念适当地推广时，在偏微分方程的一般理论中它将起重要的作用.

再一次回到问题(14.1)—(14.2)，引入下述量：

$$E(t)=\int\left\{\left|\frac{\partial v}{\partial t}\right|^2+|\operatorname{grad}_x v|^2\right\}dx,$$

称为该系统的*总能量*. 此积分施行于全空间$\mathbf{R}^n$上(t被视作参数). 当v_t和$\operatorname{grad}_x v$关于x是平方可积函数时，此积分有意义. 注意到这里$f\equiv 0$，并取$s=1$，就可以应用定理13.3. 我们得到，若$u_0\in H^1(\mathbf{R}^n)$，$u_1\in H^0=L^2(\mathbf{R}^n)$，则$v$是$t$的$C^0$函数，取值于$H^1$中(因而$\operatorname{grad}_x v$是$t$的$C^0$函数取值于$L^2$中)，而$v_t$是$t$的$C^0$函数，取值于$L^2$中. 在这个情形，$E(t)$有意义.

定理 14.3 令u_0属于$H^1(\mathbf{R}^n)$，u_1属于$H^0=L^2(\mathbf{R}^n)$. 则总能量E是常数，即，对所有的$t\in\mathbf{R}^1$，有

$$E(t)=\int\{|u_1(x)|^2+|\operatorname{grad}u_0(x)|^2\}dx. \tag{14.13}$$

证明 首先假设u_0和u_1是$\mathbf{R}^n$中具有紧支集的C^∞函数. 则v是$\mathbf{R}^{n+1}$中的C^∞函数，并且，对每个t，$x\mapsto v(t,x)$的支集是紧的. 我们有

$$E'=2\operatorname{Re}\int(v_{tt}\bar{v}_t+\langle\operatorname{grad}_x v,\ \operatorname{grad}_x\bar{v}_t\rangle)dx.$$

在第二项中，我们可以关于 x 分部积分：

$$E' = 2\,\mathrm{Re}\int (v_{tt} - \Delta_x v)\,\bar{v}_t dx = 0 \quad \text{由}(14.1).$$

这就证明了 $u_0,\ u_1 \in C_c^\infty$ 时的(14.13).

当 $u_0 \in H^1$ 和 $u_1 \in H^0$ 时，对每个固定的 t, v_t 和 $\mathrm{grad}_x v$ 属于 H^0，并且，由定理 13.7，从 $H^1 \times H^0$ 到 $(L^2)^{n+1}$ 中的映射

$$(u_0,\ u_1) \mapsto (v_t,\ \mathrm{grad}_x v)$$

是线性的连续的. 另一方面，在 $E(t)$ 的变量的范围中 $E(t)$ 显然是一连续(二次)泛函. 因而，作为 $(u_0,\ u_1)$ 的一个泛函，它是二次的且为连续的，所以是(14.13)的右端. 如果当 $(u_0,\ u_1)$ 属于稠线性子空间 $C_c^\infty \times C_c^\infty$ 时后者与 $E(t)$ 一致，正如上面已证的那样，则对所有的 $(u_0,\ u_1)$，后者亦必须与 $E(t)$ 一致.　　　证毕.

习　　题

14.1　如果用 Klein-Gordon 算子(13.27)代替波动算子，定理 14.1 还有效吗?

14.2　如果用 Klein-Gordon 算子(13.27)代替波动算子，定理 14.2 还有效吗?

14.3　令 u 是 Cauchy 问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta_x u + \lambda u = 0 \quad \text{在 } \mathbf{R}^{n+1} \text{ 中}, \tag{14.14}$$

$$u = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = u_1(x) \quad \text{在 } t=0 \text{ 时} \tag{14.15}$$

的解，其中 u_0 和 u_1 是 $\mathbf{R}^n$ 中具有紧支集的两个光滑函数. 若定理 14.3 被推广到 λ 的所有实值，问(在时刻 t)该系统的总能量 $E(t)$ 的定义应是什么?

14.4　令 K 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个紧子集，v 是(14.1)—(14.2)的解，其中 Cauchy 数据 u_0, u_1 被假定为具有紧支集的 C^∞ 函数. 引入 K 的(在时刻 t 的)能量

$$E_K(t) = \int_K \{|v_t|^2 + |\mathrm{grad}_x v|^2\} dx. \tag{14.16}$$

在空间变量个数 n 等于 1 的假设下证明，存在一数 $T \geqslant 0$，使得对所有的 $t > T$，有 $E_K(t) = 0$.

14.5　用与习题 14.4 相同的记号. 现在假设空间变量个数 n 是一奇整

数$\geqslant 3$. 证明对所有的$t>T$, 这里$T>0$充分大, $E_K(t)$[定义如(14.16)]等于0.

14.6 我们用与习题14.4相同的记号, 并引入$\mathbf{R}^{n+1}$中的广义函数$U(t, x)$, 它使得

(14.17) $$U_{tt}-\Delta_x U=0 \quad \text{在 } \mathbf{R}^{n+1} \text{ 中},$$

(14.18) $$U|_{t=0}=0, \ U_t|_{t=0}=\delta(x), \quad \mathbf{R}^n \text{ 中的 Dirac 测度}.$$

由定理13.4我们知道, 存在唯一的 $\mathbf{R}^1$中t的C^∞函数, 取值于$\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$中, 满足(14.17)—(14.18). U的Fourier变换是什么?

证明, 在域$|x|^2\neq t^2$中能量密度$\varepsilon(x, t)=|U_t|^2+|\mathrm{grad}_x U|^2$是$(x, t)$的光滑(事实上, 是解析)函数.

14.7 用与习题14.6相同的记号, 并假设$n=2$. 对于时刻$t>R$, 计算在(14.16)中定义的、相应于$v=U$(U在习题14.6中被定义)和

$$K=\{x\in\mathbf{R}^n;\ |x|\leqslant R\}, \quad R>0$$

的能量$E_K(t)$.

从这个计算结果得到, 当v是具有紧支集的初始数据的(14.1)—(14.2)的任一解(并当$n=2$)时, 对于大的t值$E_K(t)$不恒等于零, 这与n为奇数时的结论相反(习题14.4和14.5).

14.8 我们引入下述

定义 14.1 令u是$\mathbf{R}^n$的一开子集Ω中的任一广义函数. 则Ω的最小闭子集, 在其余集中u是解析函数, 称这样的闭子集为u的解析奇异支集, 并用$\mathrm{sing\ supp}_a u$表示.

处处用$\mathrm{sing\ supp}_a$代替$\mathrm{sing\ supp}$(参看定义3.2), 证明与引理14.1类似的命题.

14.9 用在习题14.8中叙述的结果(即与引理14.1类似的关于解析奇异支集的命题), 证明下述与定理14.2类似的定理:

定理 14.4 令S是$\mathbf{R}^n$的一闭子集, u_0, u_1是$\mathbf{R}^n$中两个广义函数, 它们在$\mathbf{R}^n\backslash S$中是解析函数.

任给$t>0$, 则(14.1)—(14.2)的解$v(x, t)$在$S_{(t)}=\{y\in\mathbf{R}^n;\ \exists y'\in S, |y-y'|=t\}$的余集中是$x$的解析函数.

15. 常系数一阶双曲组

在§§13和14中, 我们研究了波动方程的Cauchy问题(大范

围的，即在整个空间变量–时间变量的 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中)，并且遇到了值得注意的性质. 我们可以说，对于这样的问题，波动方程以及与其密切有关的方程，如 Klein–Gordon 方程，是最合适的方程. 即，在关于 Cauchy 数据的最弱的假定下，其 Cauchy 问题的解总是存在的，是唯一的，并且是数据的连续线性泛函. 按习惯，把这些性质综述为：*对于波动方程，Cauchy 问题是适定的*(看定义 15.1). 在 § 12 中我们看到，对于我们的其它基本例(Cauchy-Riemann 方程，Laplace 方程，热导方程，Schrödinger 方程)，事情并非如此. 然而，有广泛的一类偏微分方程，其 Cauchy 问题是适定的：**双曲型方程**(波动方程是双曲的). 这一节中我们研究具有常系数的一阶双曲组. 它们是形如

$$L=\frac{\partial}{\partial t}-\sum_{j=1}^{n} A_j \frac{\partial}{\partial x^j}-A_0 \tag{15.1}$$

的线性偏微分算子，其中 $A_j(0\leqslant j\leqslant n)$ 是具有复系数的 $m\times m$ 矩阵. 关于 x 施行 Fourier 变换显然是方便的，这导致常微分算子组

$$\widetilde{L}=\frac{\partial}{\partial t}-iA(\xi)-A_0, \tag{15.2}$$

其中 $$A(\xi)=\xi_1 A_1+\cdots+\xi_n A_n.$$

我们要研究 Cauchy 问题：

$$Lu=f \quad 在\ \mathbf{R}^{n+1}\ 中, \tag{15.3}$$

$$u|_{t=0}=u_0(x) \quad 在\ \mathbf{R}^n\ 中, \tag{15.4}$$

其中 u_0 和 f 是复 m 向量.

定义 15.1 我们说 Cauchy 问题(15.3)—(15.4)是适定的，若任给数据 $u_0\in\mathscr{D}'_x(\mathbf{R}^n)$，$f\in C^0_t(\mathscr{D}'_x(\mathbf{R}^n))$，它有唯一解 $u\in C^1_t(\mathscr{D}'_x(\mathbf{R}^n))$，并且，当数据是 C^∞ 函数时这个解也是 C^∞ 函数.

注 15.1 如果我们将此术语推广到高阶方程和高阶组(此时要把解所需要的可微性提高到适当的程度)，则我们看到，定理 13.1 和 13.2 指出，对于波动方程，Cauchy 问题是适定的.

注 15.2 现在我们已经用整体的术语提出了 Cauchy 问题：

方程(15.3)必须在 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中被满足，而条件(15.4)必须在 $\mathbf{R}^n$ 中被满足. 自然，我们还可以用局部的术语来叙述 Cauchy 问题. 一般地，当系数是变数时，我们不能避免用局部的术语. 用局部的叙述法，我们给出一开集 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 和一数 $T>0$; f 是一取值于 $\mathscr{D}'_x(\Omega)$ 中的 t 的连续函数，$|t|<T$，同时 $u_0\in\mathscr{D}'_x(\Omega)$. 解 u 要求为 t 的 C^1 函数，$|t|<T$，且取值于 $\mathscr{D}'_x(\Omega)$ 中.

注 15.3 当然，我们可以稍微改动一下定义 15.1 中关于 t 的正规性条件. 但是必须指出，对于(15.4)，必须说清楚当 $t=0$ 时 $u(t, x)$ 的取值这句话指的是什么. 例如，当 $u(t, x)$ 关于 t 只是 L^1 的时候，这句话指的什么是不清楚的. 另一方面，如果 u 和 f 关于 t 都是连续的(取值于 $\mathscr{D}'_x$ 中)，那么方程(15.3)重写为

$$u_t=f+\sum_{j=1}^n A_j u_{x_j}+A_0 u$$

就表明 u_t 关于 t 也应该是连续的.

注 15.4 在适定的 Cauchy 问题的定义中我们没有把解对数据的连续依赖性包含进去. 这是因为由闭图像定理，从解的存在性和唯一性自然地得到连续依赖性，正如在 §13 的末尾处提到的那样. 事实上，闭图像定理适用于如 $\mathscr{D}'_x$ 和 $C^k_t(\mathscr{D}'_x)$ 这样的空间. 现假设在 $\mathscr{D}'_x$ 中 $u_0^\nu\to u_0$，在 $C^0_t(\mathscr{D}'_x)$ 中 $f^\nu\to f$ 和在 $C^1_t(\mathscr{D}'_x)$ 中 $u^\nu\to u$. 因为 L 在空间 $C^1_t(\mathscr{D}'_x)$ 上为一连续线性算子，故若对每个 ν 有 $Lu^\nu=f^\nu$，则我们也必有 $Lu=f$. 另一方面，若对每个 ν 有 $u^\nu(0, x)=u_0^\nu(x)$，则显然有 $u(0, x)=u_0(x)$.

若我们用 C^∞_x 代替 $\mathscr{D}'_x$，用 $C^\infty_{t,x}$ 代替 $C^k_t(\mathscr{D}'_x)$，那么这里的注亦适用. 此注导致一有意义的发展，正如我们现在将要看到的那样.

如果我们回忆一下 C^∞ 拓扑的定义，则我们看到，可以如下地表达映射 $(u_0, f)\mapsto u$ 的连续性:

(15.5) 对于 $\mathbf{R}^{n+1}$ 的每个紧子集 K，对于每个整数 $M\geqslant 0$，存在另一紧集 $K'\subset\mathbf{R}^{n+1}$，$\mathbf{R}^n$ 的一紧子集 K_0，两个常数 M', $M_0\geqslant 0$ 和一常数 $C>0$，使得对所有 $u\in C^\infty(\mathbf{R}^{n+1})$，有

$$\sup_{(t,x)\in K}\sum_{k+|\alpha|\leqslant M}|D_t^k D_x^\alpha u(t,x)|$$
$$\leqslant C\{\sup_{x\in K_0}\sum_{|\alpha|\leqslant M_0}|D_x^\alpha u(0,x)|$$
$$+\sup_{(t,x)\in K'}\sum_{k+|\alpha|\leqslant M'}|D_t^k D_x^\alpha(Lu(t,x))|\}.$$

我们试图从这个不等式中得到一些信息. 取 $f=Lu=0$, 稍微简化一下这里的情形. 首先注意, 若 $u_0(x)=u(0,x)$ 在 K_0 的一个邻域中恒等于零, 则 $u(t,x)$ 在 K 中恒等于零. 我们可以重新叙述这个事实, 即 $u(t,x)$ 在 K 的邻域中的值只依赖于 $u_0(x)$ 在 K_0 的邻域中的值. 这就是在研究波动方程时已遇到过的影响域现象, 然而, 在那里非常明确地建立了 K_0 和 K 之间的关系(定理 14.1).

最后, 仍令 $Lu\equiv 0$, 我们将取一特殊的 u_0. 取

$$u_0(x)=e^{i\langle x,\xi\rangle}v_0,$$

其中 v_0 是一固定的非零复 m 向量, ξ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的任意向量. 若写 $u(t,x)=e^{i\langle x,\xi\rangle}v(t,x,\xi)$, 则我们看到, v 是问题

$$(15.6)\qquad \frac{\partial v}{\partial t}-\sum_{j=1}^n A_j\frac{\partial v}{\partial x^j}-\{iA(\xi)+A_0\}v=0,\quad v|_{t=0}=v_0$$

的解. 我们不妨取 v 与 x 无关, 因而, 由(15.2),

$$(15.7)\qquad \tilde{L}v=0,\quad v|_{t=0}=v_0$$

的唯一解是 $\quad v(t,\xi)=\exp[t\{iA(\xi)+A_0\}]v_0.$

选取 K 为一个区间 $\{(x,t);\ x=0,\ |t|<T\}$, $T>0$, 我们来应用(15.5). 取 $M=0$, 得到

$$(15.8)\qquad \sup_{|t|<T}|\exp[t\{iA(\xi)+A_0\}]v_0|\leqslant C(1+|\xi|)^{M_0}|v_0|.$$

任选一单位向量 $\dot{\xi}$ 并令 $A=A(\dot{\xi})$. 用 $f(z,\varepsilon)$ 表示 $A-i\varepsilon A_0$ 的特征多项式:

$$f(z,\varepsilon)=\det(zI-A+i\varepsilon A_0).$$

若把 ε 视作实变量, 则不难看到, 存在 m 个 ε 的复值连续函数 $\lambda_j(\varepsilon)$, $j=1,\cdots,m$, 在每个点 ε 处, 它们表示 $f(z,\varepsilon)$ 的 m 个根(此论断的证明留给读者).

再假设 A 有具有非零虚部的一个特征值 λ_0. 则存在 $\varepsilon_0>0$,

使得对所有满足$|\varepsilon|<\varepsilon_0$的$\varepsilon$, $A-i\varepsilon A_0$有一个特征值λ_ε满足$|\mathrm{Im}\,\lambda_\varepsilon|>c>0$. 从上面的讨论得到，可以选取$\lambda_\varepsilon$为$\varepsilon$的连续函数. 以后,我们把$\varepsilon$的变化限制在开区间$]0, \varepsilon_0[$中. 对于每一这样的$\varepsilon$, 可以选取相应于特征值$\lambda_\varepsilon$的$A-i\varepsilon A_0$的特征向量$v_\varepsilon$. 取$|v_\varepsilon|=1$. 在(15.8)中用$v_\varepsilon$代替$v_0$并选取$\xi=\varepsilon^{-1}\dot{\xi}$. 我们有

$$\exp[t\{iA(\xi)+A_0\}]v_\varepsilon=\exp[it\varepsilon^{-1}(A-i\varepsilon A_0)]v_\varepsilon$$
$$=\exp(it\varepsilon^{-1}\lambda_\varepsilon)v_\varepsilon,$$

由此及(15.8),得到

$$\sup_{|t|\leqslant T}\{\exp[-t(\mathrm{Im}\,\lambda_\varepsilon)\varepsilon^{-1}]\}\leqslant C(1+\varepsilon^{-1})^{M_0}. \tag{15.9}$$

由于λ_ε关于ε的连续性，当$\varepsilon<\varepsilon_0$时$\mathrm{Im}\,\lambda_\varepsilon$有相同的符号. 在(15.9)中取

$$t=-T(\mathrm{sign}\ \mathrm{Im}\,\lambda_\varepsilon).$$

我们得到$\exp(cT\varepsilon^{-1})\leqslant C(1+\varepsilon^{-1})^{M_0}$, 而当$\varepsilon$趋于零时这是不对的.

这样,我们证明了

命题 15.1 若 Cauchy 问题(15.3)—(15.4)是适定的，则矩阵$A(\xi)$的特征值都是实的.

注 15.5 取$n=1$, $A_1=1/i$, $A_0=0$: $L=\partial/\partial t+i\partial/\partial x$. 用不同于§12中所用的方法我们看到，Cauchy-Riemann 算子的 Cauchy 问题不是适定的.

注 15.6 假设取K是区间$\{(x, t); x=0, 0\leqslant t\leqslant T\}$(不再是$|t|\leqslant T$). 那么从(15.9)得到的是下述条件:

(15.10) $A(\xi)$的特征值的虚部都$\geqslant 0$.

这个注可以作为研究前向 Cauchy 问题的出发点来对待.

比命题 15.1 更精确的结论也能被证明,即

定理 15.1 若 Cauchy 问题(15.3)—(15.4)是适定的，则下面的结论正确:

(15.11) 存在一常数$C>0$, 使得对任给的$\xi\in\mathbf{R}_n$和$A(\xi)-iA_0$的任一特征值λ, 有$|\mathrm{Im}\,\lambda|\leqslant C$.

此定理的证明不是初等的；它基于 Seidenberg-Tarski 定理

在这里我们就不证明了. 然而, 其基本思想是不难掌握的. 事实上, 从(15.8)得到, $A(\xi)-iA_0$ 的特征值虚部的绝对值界于 $C_0\log(1+|\xi|)$, 其中 $C_0>0$ 不依赖于 ξ. 然而, 这些特征值是 z 的多项式 $\det(zI-A(\xi)-iA_0)$ 的根, 这多项式的系数是 ξ 的多项式. 若这些根或它们的虚部当 $|\xi|\to+\infty$ 时亦增大并趋于无限, 则它们不应该是对数地增长; 它们的增长如同 $|\xi|$ 的分数幂一样. 容易用简单的例子验证此事实; 而在一般情形, Seidenberg-Tarski 定理为我们提供了一个证明的工具. 因而, 若特征值虚部的绝对值都被 $C_0\log(1+|\xi|)$ 所界, 这就意味着它们是与 ξ 无关地有界的.

定理 15.2——这一节的主要结果——指出, (15.11) 蕴涵着 Cauchy 问题(15.3)—(15.4)是适定的. 这样, (15.11) 即为使 (15.3)—(15.4)是适定的一个既必要又充分的条件. 这就构成著名的 *Gårding 定理*. 它导致了下述术语的引入:

定义 15.2　若(15.11)成立, 则组(15.1)称为*双曲的*.

在证明定理 15.1 之逆之前, 我们给出两个准则, 它们在验证所给方程组是否为双曲的时是有用的.

命题 15.2　当下述两个条件之一被满足时, 组(15.1)即为双曲的:

(15.12)　对任何 $\xi\in\mathbf{R}_n$, 矩阵 $A(\xi)$ 是自伴的;

(15.13)　对任何 $\xi\in\mathbf{R}_n$, $\xi\neq0$, $A(\xi)$ 的特征值实而互异.

证明　假设下述事实成立:

(15.14)　任给点 $\xi^0\in\mathbf{R}_n$, $|\xi^0|=1$, 存在 ξ^0 的一邻域 U_0 和一可逆 $m\times m$ 矩阵 $\Gamma(\xi)$, 其元素是 U_0 中的连续函数, 使得对 U_0 中的任何 ξ, $S(\xi)=\Gamma(\xi)^{-1}A(\xi)\Gamma(\xi)$ 是自伴的.

我们断言, (15.14) 蕴涵着方程组(15.1)是双曲的. 令

$$B_0(\dot{\xi})=\Gamma(\dot{\xi})^{-1}A_0\Gamma(\dot{\xi}),\ \dot{\xi}\in U_0,\ |\dot{\xi}|=1,$$

并取 $\xi=\rho\dot{\xi}$. 我们注意, 若 λ 是 $A(\xi)-iA_0$ 的一个特征值, 则它也

是 $\rho S(\dot{\xi})-iB_0(\dot{\xi})$ 的一个特征值. 因而, 在 $\mathbf{C}^m$ 中存在一单位向量 v, 使得

$$\rho(S(\dot{\xi})v,\ v)-i(B_0(\dot{\xi})v,\ v)=\lambda(v,\ v)=\lambda.$$

这里, 我们用了 $(,)$ 表示 $\mathbf{C}^m$ 中的 *Hermite* 积. 由假设, $S(\dot{\xi})$ 是自伴的, 因而

$$\operatorname{Im}\lambda=-\operatorname{Re}(B_0(\dot{\xi})v,\ v),$$

它蕴涵着 $|\operatorname{Im}\lambda|\leqslant\|B_0(\dot{\xi})\|$ ($\|\ \|$ 表示矩阵范数), 因而

$$|\operatorname{Im}\lambda|\leqslant\|\Gamma(\dot{\xi})\|\|\Gamma(\dot{\xi})^{-1}\|\|A_0\|. \tag{15.15}$$

但 $\|\Gamma(\dot{\xi})\|$ 和 $\|\Gamma(\dot{\xi})^{-1}\|$ 是 U_0 中的连续函数. 所以我们能够找到 ξ^0 的一个邻域 $U_0'\subset U_0$, 在 U_0' 中这两个函数是有界的. 这样, 我们就能用这样的邻域 U_0' 的有限并来覆盖单位球面 $S_{n-1}\subset\mathbf{R}_n$, 并不难得到, 数 $|\operatorname{Im}\lambda|$ 是与 ξ 无关地有界的.

在情形 (15.12), 条件 (15.14) 的满足是平凡的. 我们来证明在情形 (15.13), 条件 (15.14) 也被满足. 令 $\lambda_1(\dot{\xi})<\cdots<\lambda_m(\dot{\xi})$ 表示 $A(\dot{\xi})$ 的特征值并令 $d=\inf(\lambda_{j+1}(\dot{\xi})-\lambda_j(\dot{\xi}))$, 其中 inf 是对 $j=1,\ \cdots,\ m-1$ 和 $\dot{\xi}\in S_{n-1}$ 取的. 令 c_j 是复平面上的圆周, 其中心在 $\lambda_j(\dot{\xi})$, 半径为 $d/2$. 圆 c_j 随 $\dot{\xi}$ 连续地变动. 令

$$P_j(\dot{\xi})=(2i\pi)^{-1}\oint_{c_j}(zI-A(\dot{\xi}))^{-1}dz,\qquad j=1,\ \cdots,\ m.$$

下述性质是直接的并都是易于验证的:

$$P_j(\dot{\xi})^2=P_j(\dot{\xi}),\ A(\dot{\xi})P_j(\dot{\xi})=\lambda_j(\dot{\xi})P_j(\dot{\xi}),$$
$$I=P_1(\dot{\xi})+\cdots+P_m(\dot{\xi}).$$

对于每个 $j=1,\ \cdots,\ m$, 令 $\mathbf{v}_j^0$ 是 $A(\xi^0)$ 的相应于 $\lambda_j(\xi^0)$ 的具有单位长度的一个特征向量. 向量 $\mathbf{v}_1^0,\ \cdots,\ \mathbf{v}_m^0$ 是线性无关的, 因而构成 $\mathbf{C}^m$ 的一个基. 我们令 $\mathbf{v}_j(\dot{\xi})=P_j(\dot{\xi})\mathbf{v}_j^0$. 若 $\dot{\xi}$ 充分接近于 ξ^0, 则 $\mathbf{v}_1(\dot{\xi}),\ \cdots,\ \mathbf{v}_m(\dot{\xi})$ 也构成 $\mathbf{C}^m$ 的一个基. 令 $\mathbf{e}_k$ 表示除了第 k 个分量等于 1 以外, 其余分量都是零的向量. 令

$$\mathbf{v}_j(\dot{\xi})=\sum_{k=1}^{m}\gamma_j^k(\dot{\xi})\mathbf{e}_k.$$

正如读者容易弄清楚的那样, 矩阵 $\Gamma(\dot{\xi})=(\gamma_j^k(\dot{\xi}))_{1\leqslant j,k\leqslant m}$ 有在

(15.14)中所要求的性质. 证毕.

下述术语经常被用到:

定义 15.3 称方程组(15.1)为强(或严格)双曲的,若条件(15.13)被满足.

现在我们来证明这一节的主要结果.

定理 15.2 若方程组 L 是双曲的,则 Cauchy 问题(15.3)—(15.4)是适定的.

证明 从矩阵值广义函数 $U(t, x)$ 的研究即得此定理,这里 $U(t, x)$ 是广义函数

$$\tilde{U}(t, \xi)=\exp\{it[A(\xi)-iA_0]\}$$

关于 x 的 Fourier 逆变换. 我们回忆一下, $A(\xi)$ 关于 ξ 是线性的. 我们不妨立刻把 $\tilde{U}(t, \xi)$ 的 ξ 延拓到复值,用 ζ 表示,并且直接得到

(15.16) 存在两个常数 $B, C>0$, 使得对所有实数 t 和所有复向量 $\zeta\in\mathbf{C}_n$, 有

$$\|\tilde{U}(t, \zeta)\|\leqslant Ce^{B|t||\zeta|}.$$

这样, $\tilde{U}(t, \zeta)$ 就是 ζ 的一个指数型的整函数($\|\ \|$表示矩阵范数). 证毕.

最后,我们来证明下述论断:

(15.17) 存在两个常数 $B_0, C_0>0$, 使得对所有实数 t 和所有实向量 $\xi\in\mathbf{R}_n$, 有

$$\|\tilde{U}(t, \xi)\|\leqslant C_0(1+|\xi|)^m\exp(B_0|t|).$$

这样, $\tilde{U}(t, \xi)$ 就是 $\mathbf{R}_n$ 中 ξ 的在无穷远处"缓增的"函数. 从矩阵的某些性质可以得到性质(15.17),我们现在就来描述这些性质.

引理 15.1 令 M 是任一 $m\times m$ 矩阵. 则存在一个只依赖于阶数 m 的常数 $C_m>0$, 使得对所有的复数 z, z 到 M 的谱(即 M 的特征值集合)的距离至少等于 1, 有

(15.18) $$\|(zI-M)^{-1}\|\leqslant C_m(1+|z|+\|M\|)^{m-1}.$$

证明 记 $N=zI-M$. 用 $a_1, \cdots, a_m$ 表示 N 的特征多项式的系数,则由 Hamilton-Cayley 的定理,我们有

$$N(N^{m-1}+a_1N^{m-2}+\cdots+a_{m-1})+a_mI=0.$$

所以

$$\|N^{-1}\|\leqslant|a_m|^{-1}\|N\|^{m-1}+|a_1/a_m|\,\|N\|^{m-2}+\cdots+|a_{m-1}/a_m|.$$

但是$\|N\|\leqslant|z|+\|M\|$,并且,对称函数的比 a_j/a_m 被一个共同的常数所界,而此常数是 a_m^{-1}: 事实上,它们是 N^{-1} 的特征值的对称函数,而其绝对值$\leqslant 1$. 证毕.

引理 15.2 令 M 是任一 $m\times m$ 矩阵. 则存在一个只依赖于 m 的常数 $C'_m>0$, 使得

$$\|e^{iM}\|\leqslant C'_m(1+\|M\|)^m e^{I(M)}, \tag{15.19}$$

其中 $I(M)$ 是 M 的特征值虚部的绝对值之最大者.

证明 令 γ 表示在图 15.1 中所示的积分围道. 因为 M 的所有特征值的绝对值都$\leqslant\|M\|$, 所以从 γ 到 M 的谱的距离至少是 1(事实上等于 1). 另一方面,若 $z\in\gamma$, 则 $|z|\leqslant 2(1+\|M\|)$. 我们有

$$e^{iM}=(2\pi i)^{-1}\oint_\gamma e^{iz}(zI-M)^{-1}dz,$$

从它,由引理 15.1 得

$$\|e^{iM}\|\leqslant C_m\int_\gamma e^{-\mathrm{Im}\,z}(1+|z|+\|M\|)^{m-1}|dz|$$
$$\leqslant 3^{m-1}C_m(1+\|M\|)^{m-1}e(\gamma \text{ 的长度})e^{I(M)}.$$

因为 γ 的长度$\leqslant 4(1+\|M\|)$,我们就得到(15.19).

(15.17) 的证明 只需在(15.19)中取 $M=t(A(\xi)-iA_0)$, 并用下述事实,即,由双曲性假设, $A(\xi)-iA_0$ 的特征值的虚部是与 ξ 无关地有界的. 还需记住 $A(\xi)$ 关于 ξ 是线性的. 证毕.

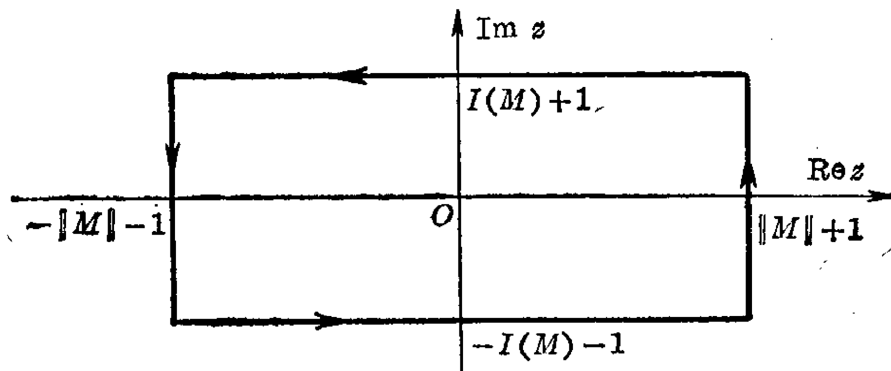


图 15.1

应用 Paley-Wiener(-Schwartz) 定理：若 $\xi\in\mathbf{R}_n$ 的一个函数能被延拓到复空间 $\mathbf{C}_n$ 中而成为一指数型的整函数，且若在 $\mathbf{R}_n$ 上它象一多项式似地增长，则它是 $\mathbf{R}^n$ 中具紧支集的一广义函数的 Fourier 变换，我们就可以利用性质(15.16)和(15.17)．由上述，已经知道广义函数支集的凸包和 Fourier 变换的"指数型"有关，我们有了更多的信息．事实上，我们从(15.16)可推得

(15.20)　看作 x 的广义函数的 $U(t,x)$（固定 t），其支集包含在球 $\{x\in\mathbf{R}^n;\ |x|\leqslant B|t|\}$ 中．

现在，在 Cauchy 问题(15.3)—(15.4)中，若数据 f 和 u_0 是有紧支集的 C^∞ 函数，则可以对 x 施行 Fourier 变换来变化我们的问题．变化后的问题

$$\tilde{L}\tilde{u}=\tilde{f}(t,\xi)\quad 在\ \mathbf{R}^1\times\mathbf{R}_n\ 中, \tag{15.21}$$

$$\tilde{u}(0,\xi)=\tilde{u}_0(\xi)\quad 在\ \mathbf{R}_n\ 中 \tag{15.22}$$

有唯一解

$$\tilde{u}(t,\xi)=\tilde{U}(t,\xi)\tilde{u}_0(\xi)+\int_0^t\tilde{U}(t-t',\xi)\tilde{f}(t',\xi)\,dt', \tag{15.23}$$

它是

(15.24)

$$u(t,x)=U(t,x)\underset{(x)}{*}u_0(x)+\int_0^t U(t-t',x)\underset{(x)}{*}f(t',x)\,dt'$$

即

(15.25)

$$\begin{aligned}u(t,x)=U(t,x)\underset{(x)}{*}u_0(x)&+\{H(t)f(t,x)\}\underset{(t,x)}{*}E_+(t,x)\\&+\{H(-t)f(t,x)\}\underset{(t,x)}{*}E_-(t,x)\end{aligned}$$

的 Fourier 变换，其中

$$E_+(t,x)=H(t)U(t,x),\quad E_-(t,x)=-H(-t)U(t,x).$$

不需要强调公式(15.25)和(13.14)之间的类似性．这里的论证与 §13 中的论证以相同的方式进行：对于任何广义函数 u_0, f，公式(15.24)[或(15.25)]都有意义，因为对每个固定的 t，$U(t,x)$ 的支集是紧的[由(15.20)]．进一步得到，u 是一 C^∞ 函数．

例 15.1　假设 $n=3$，并考虑下述的 4×4 矩阵：

$$K=\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix},\quad A_j=\begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix},\quad j=1,\ 2,\ 3,$$

其中 σ_j 是下述的 2×2 矩阵，在物理学中称为 *Pauli* 矩阵(在 K 中，I 表示 2×2 单位矩阵)：

$$\sigma_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad \sigma_2=i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\quad \sigma_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

我们考虑 4×4 方程组(其中 m 是某个至少为零的数)：

(15.26)
$$L=\frac{\partial}{\partial t}-\sum_{j=1,2,3}A_j\frac{\partial}{\partial x^j}-miK.$$

这里我们有
$$A(\xi)=\begin{pmatrix} 0 & \sigma(\xi) \\ \sigma(\xi) & 0 \end{pmatrix},$$

其中
$$\sigma(\xi)=\begin{pmatrix} \xi_3 & \xi_1+i\xi_2 \\ \xi_1-i\xi_2 & -\xi_3 \end{pmatrix}.$$

用以前的记号，我们有 $A_0=miK$，$A(\xi)-iA_0$ 的特征行列式是

(15.27)　$\det(\tau I-A(\xi)-mK)=(\tau^2-|\xi|^2-m^2)^2.$

$A(\xi)-iA_0$ 的特征值是二重的；它们是

$$\pm(|\xi|^2+m^2)^{1/2}.$$

这样，方程组 L 是双曲的．然而，它不是强双曲的．方程组 $Lu=f$ 是 *Dirac* 方程组的标准形式之一，Dirac 方程组是为了在相对论中描述电子的性状而引入的(注意，作为以 τ，ξ_1，ξ_2，ξ_3 为坐标的 $\mathbf{R}_4$ 上的函数，其特征多项式是 Lorentz 不变的)．有兴趣于 Dirac 算子的不变性的读者可参阅习题 15.4；所述的与 Lorentz 群和 Pauli 矩阵 σ_j 有关系的方程在习题 15.5 到 15.9 中论及．

习　题

15.1　考虑算子 $L=I\partial/\partial t-A\partial/\partial x$(这样，$n=1$)，其中 I 是 $m\times m$ 单位矩阵，A 是元素为复的另一 $m\times m$ 矩阵．我们作假设：

(15.28)　　A 的特征值互异(但不必是实的)．

再令 $\mathbf{h}(z)$ 是 $\mathbf{C}$ 中的一个整函数，取值于 $\mathbf{C}^m$ 中．考虑算子

(15.29)
$$\exp\left(tA\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathbf{h}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k}{k!}A^k\mathbf{h}^{(k)}(x).$$

证明，存在一个可逆矩阵 Γ($m\times m$，元素为复的)，使得，若我们令

(15.30)
$$S_t\mathbf{w}(x)=\Gamma^{-1}\exp\left(tA\frac{\partial}{\partial x}\right)\Gamma\mathbf{w},$$

则向量 $S_t\mathbf{w}$ 的分量与 $\mathbf{w}$ 的分量之间有关系

(15.31)
$$(S_t\mathbf{w})^j(x)=\mathbf{w}^j(x+t\lambda_j),\quad j=1,\cdots,m,$$

其中 λ_j 是 A 的特征值. 由此得到，若 A 的所有特征值都是实的，则 S_t 能被延拓为一个作用在 $\mathbf{R}^1$ 中 x 的连续函数上的连续线性算子，因而 L 的 Cauchy 问题是适定的(定义 15.1).

15.2　令 L 表示习题 15.1 中的那个算子. 假设(15.28)成立，但 A 的某一特征值不是实数. 利用在习题 15.1 中引进的矩阵 Γ 证明，L 的 Cauchy 问题不是适定的(定义 15.1).

15.3　在 $\mathbf{R}^2$ 上考虑算子 $L=I\partial/\partial t-A\partial/\partial x$，其中 I 是 $m\times m$ 单位矩阵，A 是任一 $m\times m$ 复矩阵. 把 A 写成它的 *Jordan* 标准型，证明，L 的 Cauchy 问题是适定的，当且仅当 A 的所有特征值都是实的. 此时，用 $u(0,x)\in C^\infty(\mathbf{R}^1)$ 给出在 $\mathbf{R}^2$ 中满足 $Lu=0$ 的函数 $u(t,x)\in C^\infty(\mathbf{R}^2)$ 的表达式.

15.4　令 $A_j(j=1,2,3)$ 是在例 15.1 中表示的矩阵，$\mathscr{P}_4$ 是由 4×4 矩阵

(15.32)
$$M(\xi)=\xi_0 I+\sum_{j=1}^{3}\xi_j A_j,\quad \xi\in\mathbf{R}_4$$

构成的实线性空间.

考虑 $\mathbf{R}_4$ 的一线性变换 T，它使得存在一个 4×4 矩阵 S_T，满足

(15.33)
$$M(T\xi)=S_T M(\xi),\quad \forall\xi\in\mathbf{R}_4.$$

记 $Q(\xi)=\xi_0^2-(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2)$，证明，对某个数 $\varkappa$，我们有

(15.34)
$$Q(T\xi)^2=\varkappa^2 Q(\xi)^2,\quad \forall\xi\in\mathbf{R}_4.$$

在 $\varkappa$ 和 S_T 之间的关系是什么？证明，使得对 $\varkappa=1$，(15.34)有效的矩阵 T 的集合构成具有实元素的 4×4 可逆矩阵群，即第四线性群 $LG(4,\mathbf{R})$ 的一个子群 G. 从 G 到 $LG(4,\mathbf{R})$ 中的映射 $T\mapsto S_T$ 是内射映射吗？其像是什么？

给出 $\mathbf{R}_4$ 上的线性变换 T 的一个例子，使得对所有 $\xi\in\mathbf{R}_4$ 有 $Q(T\xi)=-Q(\xi)$.

15.5　用 $M_m(\mathbf{K})$ 表示元素在域 $\mathbf{K}=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$ 中的 $m\times m$ 矩阵的代数，用 $LG(m,\mathbf{K})$ 表示这些矩阵中的可逆矩阵所成的群，用 $SL(m,\mathbf{K})$ 表示由那些行列式等于 $+1$ 的矩阵构成的子群. 若 M 是一复矩阵，则用 M^* 表示其伴随矩阵，即 M 的复共轭的转置. 再用 $\mathbf{e}_0$ 表示 2×2 单位矩阵，用 $\mathbf{e}_j$ 表示在例

15.1 中用记号 σ_j 引进的 Pauli 矩阵($j=1, 2, 3$).

证明,

$$\zeta=(\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)\mapsto M(\zeta)=\sum_{j=0}^{3}\zeta_j\mathbf{e}_j \tag{15.35}$$

是从 $\mathbf{C}_4$ 到 $M_2(\mathbf{C})$ 上的一个线性同构, 它把复共轭变为伴随矩阵, 即 $M(\bar{\zeta})=M(\zeta)^*$, 因而, 它映实空间 $\mathbf{R}_4$ 到所有自伴的 2×2 矩阵的空间 Σ_2 上.

建立下述公式:

$$\det M(\zeta)=\zeta_0^2-\sum_{j=1,2,3}\zeta_j^2, \tag{15.36}$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{Tr} M(\zeta)=\zeta_0 \tag{15.37}$$

($\operatorname{Tr} M$ 是 M 的迹(trace), 换句话说, 就是矩阵 M 的对角线元素的和). 给出通过(15.35)与 $\mathbf{R}_4$ 中超平面 $\xi_0=0$ 上的点相对应的一般的矩阵的表达式.

注 15.7 读者马上能验证 $\mathbf{e}_j(j=0, 1, 2, 3)$ 的乘法表如表 15.1 所示.

表 15.1

	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$
$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_0$	$-i\mathbf{e}_3$	$i\mathbf{e}_2$
$\mathbf{e}_2$	$i\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_0$	$-i\mathbf{e}_1$
$\mathbf{e}_3$	$-i\mathbf{e}_2$	$i\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_0$

15.6 用习题 15.5 中相同的记号. 任给矩阵 $A\in M_2(\mathbf{C})$, 用公式

$$AM(\xi)A^*=M(T_A\xi), \quad \xi\in\mathbf{R}_4, \tag{15.38}$$

确定 $\mathbf{R}_4$ 中的一变换 T_A. 用(15.36)证明, $A\mapsto T_A$ 是从特殊线性群 $SL(2, \mathbf{C})$ 到($\mathbf{R}_4$ 上)Lorentz 群 $\mathscr{L}$ 中的一个群同态. 此同态的核是什么?

15.7 令 $U(2)$ 表示 2×2 的酉群[$U\in U(2)$, 若 $UU^*=I$], 并对于 $U(2)$ 中的 U, 令

$$UM(\xi)U^{-1}=M(T_U\xi), \quad \xi\in\mathbf{R}_4. \tag{15.38'}$$

证明, UMU^{-1} 保持行列式和迹. 然后用公式(15.36)—(15.37)证明, 若 $U\in U(2)$, 则 T_U 保持 $\mathbf{R}_4$ 中的每个超平面 $\xi_0=$常数, 并诱导了等同于超平面 $\xi_0=0$ 的 $\mathbf{R}_3$ 上的一个正交变换.

证明, $U\mapsto T_U$ 是从 $U(2)$ 到 3×3 正交矩阵群 $O(3)$ 中的一个群同态, 其核是 $e^{i\omega}I(0\leqslant\omega\leqslant 2\pi)$ 型对角矩阵所成的子群.

15.8 用上面习题中相同的记号. 令 $U^+(2)$ 表示 $U(2)$ 的子群, 它由行列式恰好等于 $+1$ 的酉矩阵组成; $U^+(2)$ 也是 $SL(2, \mathbf{C})$ 的子群, 显然, T_U 的

定义 (15.38) 和 (15.38′) 是相同的. 在习题 15.7 中我们已看到, $U\mapsto T_U$ 是从 $U^+(2)$到 $O(3)$中(不是映上!)的一个群同态. 它的核是什么?

令 $$V(\phi)=\begin{pmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi} \end{pmatrix}, \quad R(\theta)=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

证明,每个矩阵 $U\in U^+(2)$可被写成

(15.39) $$U=V(\phi/2)R(\theta/2)V(\psi/2),$$

其中 ϕ, ψ, θ 是角度(即, 在环面 $\mathbf{T}^1$ 上变动). 由此推得, $U^+(2)$是一连通的三维紧致(实解析)流形,因而得到, $U\mapsto T_U$ 是从 $U^+(2)$到 $\mathbf{R}_3$ 中的旋转群 $O^+(3)$上的一个群同态[$O^+(3)$是$O(3)$中含有单位元素的连通分支,也是$O(3)$与 $SL(3, \mathbf{R})$的交集].

在下述每个情形中计算 T_U: $U=V(\phi/2)$, $U=R(\theta/2)$, 并由此及从(15.39)得到 T_U 的一般公式.

15.9 用习题 15.6 中相同的记号,证明,每个矩阵 $A\in SL(2, \mathbf{C})$必须具有形式

(15.40) $$A=\pm\begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}, \quad t\in\mathbf{R},$$

这里, A 使得 T_A 在平面 $\xi_0=\xi_3=0$ 的限制是恒等变换. 通过结合这个事实与习题 15.8 中的主要结果[即 $U\mapsto T_U$ 把 $U^+(2)$映到 $O^+(3)$上]得到, $A\mapsto T_A$ 是从 $SL(2, \mathbf{C})$到 Lorentz 群中含有单位元素的连通分支 $\mathscr{L}_+$ 上的一个群同态,这样, $SL(2, \mathbf{C})$就是 $\mathscr{L}_+$ 的 2 阶覆盖群.

16. 一个空间维度的强一阶双曲组

上一节中的某些结果, 特别是与 Cauchy 问题的解的存在性和唯一性有关的那些结果, 可以推广到具有变系数的某些偏微分方程和方程组,它们一般地被称为是双曲的. 这里,我们限于研究变系数的一阶组,空间变量的个数等于 1. 这些方程组具有形式

$$L=\frac{\partial}{\partial t}-A(x, t)\frac{\partial}{\partial x}-B(x, t).$$

这里, $A(x, t)$和 $B(x, t)$是 $m\times m$ 矩阵, 它们的元素是光滑函数, 譬如说是 $\Omega\times]-T, T[$ ($\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 是开集, $T>0$)中(x, t)的 C^1 函数; 自然, $\partial/\partial t$ 表示 $I\partial/\partial t$, 其中 I 是 $m\times m$ 单位矩阵. 我们将假

定方程组 L 是强双曲的(参阅定义 15.3)：

(16.1)　对每个 $x_0\in\Omega$, $t_0\in]-T, T[$, $A(x_0, t_0)$的特征值是实的和互异的.

引理 16.1　若(16.1)成立, 则在 $\Omega\times]-T, T[$ 中存在(x, t)的 m 个 C^1 函数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$, 在每个点$(x, t)$处它们表示 $A(x, t)$的 m 个特征值.

证明　因为 $A(x, t)$的特征值是实而互异的, 我们不妨选取它们的指标, 使得在 $\Omega\times]-T, T[$ 中到处都有 $\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_m$. 令$(x_0, t_0)$是集合 $\Omega\times]-T, T[$ 中的任意一点, λ_j^0 是 $A(x_0, t_0)$的第 j 个特征值. 用 $f(\lambda; x, t)$表示 $A(x, t)$的特征多项式: $f(\lambda; x, t)=\det(\lambda I-A(x, t))$. 我们有

$$f(\lambda_j^0;\ x_0,\ t_0)=0,\qquad f_\lambda(\lambda_j^0;\ x_0,\ t_0)\neq 0.$$

因而我们可以应用隐函数定理, 并得到, 在(x_0, t_0)的一邻域中存在一个 C^1 函数 $\lambda(x, t)$, 它在此邻域中满足 $f(\lambda(x, t); x, t)=0$, 且当 $x=x_0$, $t=t_0$ 时它等于 λ_j^0. 当然我们必定有 $\lambda(x, t)=\lambda_j(x, t)$.　证毕.

注 16.1　如果特征值不再是实的, 但仍为互异的, 此引理仍然成立. 一般地, 如果允许有重特征值, 则此引理不成立.

$$A(x,\ t)=\begin{pmatrix}0 & x^2+t^2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

提供了一个简单的例子. 我们令

$$P_j(x,\ t)=(2\pi i)^{-1}\oint_{\gamma_j}(zI-A(x,\ t))^{-1}dz,$$

其中 γ_j 是复平面中的一圆周, 在它上面没有 $A(x, t)$的特征值, 而在它的内部包含 $A(x, t)$的一个且只包含一个特征值——第 j 个特征值 $\lambda_j(x, t)$. 显然, $P_j(x, t)$是(x, t)的一个 C^1 函数; 它是 $A(x, t)$的第 j 个谱投影算子. 作用在 $\mathbf{C}^m$ 上的矩阵 $P_j(x, t)$的值域 $\mathscr{L}_j(x, t)$是一维的: 它是 $A(x, t)$的第 j 个特征空间(它是一维的). 我们有

$$I=P_1+\cdots+P_m.$$

这蕴涵着，对每个 (x, t)，$\mathscr{L}_1(x, t)$，…，$\mathscr{L}_m(x, t)$ 张成整个 $\mathbf{C}^m$ 空间．自然，对每个 j 我们有 $P_j^2=P_j$.

引理 16.2 $\Omega\times]-T, T[$ 的每个点 (x_0, t_0) 有一个开邻域 $\mathfrak{V}_0$ 包含在 $\Omega\times]-T, T[$ 中，在 $\mathfrak{V}_0$ 中确定了一个矩阵值函数 $\Gamma(x, t)$，有下述性质：

(16.2) 在 $\mathfrak{V}_0$ 中 $\Gamma(x, t)$ 是 C^1 的，且在 $\mathfrak{V}_0$ 的每个点处它是可逆的；

(16.3) 对每个 $(x, t)\in\mathfrak{V}_0$，我们有

$$\Gamma^{-1}(x, t)A(x, t)\Gamma(x, t)=\begin{pmatrix}\lambda_1(x, t) & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_m(x, t)\end{pmatrix}.$$

证明 对每个 j，我们在 $\mathscr{L}_j(x_0, t_0)$ 中任取一非零向量 $\mathbf{v}_j^0$，并令

$$\mathbf{v}_j(x, t)=P_j(x, t)\mathbf{v}_j^0.$$

当 $x=x_0$, $t=t_0$ 时我们有 $\mathbf{v}_j=\mathbf{v}_j^0$，因而此时 $\mathbf{v}_j$ 形成 $\mathbf{C}^m$ 的一个基，并且在 (x_0, t_0) 的一个小邻域中这事实仍然成立，我们就取此小邻域为 $\mathfrak{V}_0$．我们记

$$\mathbf{v}_j(x, t)=\sum_{k=1}^{m}\gamma_j^k(x, t)\mathbf{e}_k,$$

其中 $(\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_m)$ 是 $\mathbf{C}^m$ 的典则基；即，对每个 k，除了第 k 个分量等于 1 以外，$\mathbf{e}_k$ 的所有分量都等于零．矩阵 $(\gamma_j^k(x, t))_{1\leq j,k\leq m}$ 就是我们要求的矩阵 $\Gamma(x, t)$．我们把验证留给读者，即它具有性质 (16.2) 和 (16.3)． 证毕．

现在能够研究下述局部的 Cauchy 问题．在下面的叙述中，U 是 Ω 的一个小的开子集，δ 是使得 $0<\delta<T$ 的一个小的数．如下地提出 Cauchy 问题：

(16.4) $$Lu=f(x, t),\quad x\in U,\quad |t|<\delta,$$

(16.5) $$u(x, 0)=u_0(x),\quad x\in U.$$

关于这些数据，我们假设，在 $\Omega\times]-T, T[$ 中 $f(x, t)$ 是 (x, t) 的 C^1 函数，同时 $u_0(x)$ 是 Ω 中的 C^1 函数．

令

(16.6) $u(x, t)=\Gamma(x, t)v(x, t), \quad f(x, t)=\Gamma(x, t)g(x, t),$
$$u_0(x)=\Gamma(x, 0)v_0(x),$$
来变化此问题，这里 $\Gamma(x, t)$ 是引理 16.2 中的矩阵，把引理 16.2 应用于 (x_0, t_0)，这里 x_0 是 U 中的一点，$t_0=0$. 此后，除了有相反的说明，总是假设 U 和 δ 是充分小，使得 $U\times]-\delta, \delta[$ 包含在 $\mathfrak{V}_0$ 中. 我们有
$$Lu=\Gamma v_t+\Gamma_t v-A\Gamma v_x-A\Gamma_x v-B\Gamma v$$
$$=\Gamma(v_t-\Gamma^{-1}A\Gamma v_x-B_{\#}v),$$
其中我们已经令

(16.7) $$B_{\#}=\Gamma^{-1}B\Gamma-\Gamma^{-1}\Gamma_t+\Gamma^{-1}A\Gamma_x.$$

这样，问题 (16.4)—(16.5) 变为

(16.8) $v_t-\Gamma^{-1}A\Gamma v_x-B_{\#}v=g(x, t), \quad x\in U, \quad |t|<\delta,$

(16.9) $v(x, 0)=v_0(x), \quad x\in U.$

这个新的方程组的方便之处在于 $\Gamma^{-1}A\Gamma$ 是对角型的[参阅 (16.3)]. 这个便利在解此 Cauchy 问题时将充分利用. 首先考虑 $m=1$ 的情形，即 L 是一个一阶纯量线性偏微分算子的情形，是有益的.

纯量的情形

在这个情形，A 和 B 是复值函数. 我们用 $\lambda(x, t)$ 来代替 $A(x, t)$. 假设 (16.1) 要求 λ 是实的. 我们注意到，通过变量变换，能容易地把 L 的主部
$$L_0=\frac{\partial}{\partial t}-\lambda(x, t)\frac{\partial}{\partial x}$$
变为 $\partial/\partial t$. 然而，必须强调，这个变换仅仅是局部的，即在一个小的开集中这个变换是有效的(不妨把此小开集等同于上面说到的集合 $\mathfrak{V}_0$). 事实上，我们解非线性常微分方程

(16.10) $$\frac{dx}{ds}=-\lambda(x, s),$$

带有初始条件

(16.11) $$x|_{s=0}=y,$$

其中 y 是充分接近 x_0 的一点. 对于小的 s, (16.10)—(16.11) 有唯一解, 用 $x=x(y, s)$ 表示. 然后考虑变量变换

(16.12) $$x=x(y, s), \quad t=s.$$

由于(16.11), 当 s 接近于零时, x 关于 y 的导数不等于零(对于 $s=0$, 此导数等于 1). 因而, (16.12)是一名副其实的 C^1 变量变换. 我们有

$$\frac{\partial}{\partial s}=\frac{\partial}{\partial t}-\lambda(x, t)\frac{\partial}{\partial x}=L_0.$$

算子 L 被变为

$$L^{\#}=\frac{\partial}{\partial s}-B(x(y, s), s)$$

(说得更确切一些, 应该说这是 L 在新坐标 y, s 中的表达式). 因为线 $s=0$ 和线 $t=0$ 一致, 且有(16.11), 所以问题(16.4)—(16.5)变为

(16.13) $$L^{\#}u=f(x(y, s), s), \quad x(y, s)\in U, \quad |s|<\delta,$$

(16.14) $$u(y, 0)=u_0(y), \quad y\in U.$$

由于 $L^{\#}$ 的表达式, 这后一问题可看作一阶线性常微分方程的 Cauchy 问题(依赖于参数 y), 我们知道如何求解它. 这只需回忆一下 § 11 开头处的讨论. 我们有

(16.15)

$$u(y, s)=u_0(y)e^{\beta(y,s)}+\int_0^s \exp[\beta(y, s)-\beta(y, s')]f(x(y, s'), s')ds',$$

其中我们已令

(16.16) $$\beta(y, s)=\int_0^s B(x(y, s'), s')ds'.$$

可以用有趣的几何方式来解释公式(16.15). 首先注意, y, s 是点 (x, t) 的新坐标. 特别, $s=t$. 另一方面, 当 s' 从零改变到 $s=t$ 时, 点 $(x(y, s'), s')$ 在连接 $(y, 0)$ 到 (x, t) 的曲线的弧上变动. 在问题中此曲线是(16.10)—(16.11)的积分曲线. 如果它通过点

(x, t)，我们就用 $C(x, t)$ 表示它. 在点 (x, t) 处，L_0 是沿着 $C(x, t)$ 的切线方向的偏导数. 这就决定了 $C(x, t)$ 上的方向. 此方向与我们取时间作为参数所确定的方向相同（当时间增加时我们亦向前）. 将常微分方程的基本定理应用于(16.10)—(16.11)，我们得到，通过每个点 (x, t)，存在(16.10)—(16.11)的积分曲线的一段且仅存在一段弧. 自然，$C(x, t)=C(x_1, t_1)$ 意味着 (x, t) 和 (x_1, t_1) 位于一条且位于同一条这样的积分曲线上. 如果 U 和 δ 充分地小，则 $U\times]-\delta, \delta[$ 将被这些曲线 $C(x, t)$——事实上，当 x 跑遍 U 时，被曲线 $C(x, 0)$——"纤维化". 这意味着(16.12)的效能是"拉直"曲线 $C(x, 0)$ 并把它们变成铅垂直线段 $y=$ 常数. 现在，在这个图像中，y 由下述事实完全确定：$(y, 0)$ 是 $C(x, t)$ 与直线 $t=0$ 的交点. 至于 $\beta(y, s)$，它等于 B 关于测度 dt 沿着 $C(x, t)$ 从 $(y, 0)$ 到 (x, t) 的积分. 我们将记 $B_1(x, t)$ 以代替 $\beta(y, s)$. 我们有

$$B_1(x, t)=\int_{C(x,t)} B(x', t')dt',$$

记住，积分的限是 0 和 t；(x', t') 是 $C(x, t)$ 上的变动点. 至于(16.15)，它为

(16.17)

$$u(x, t)=u_0(y)\exp[B_1(x, t)] + \int_{C(x,t)} \exp[B_1(x, t)-B_1(x', t')]f(x', t')dt',$$

记住，$(y, 0)$ 是 $C(x, t)$ 与轴 $t=0$ 的交点，这一事实确定了 y；这里的积分是从 $t'=0$ 到 $t'=t$ 施行的，即使 $t<0$.

注 16.2 假设 $f\equiv 0$. 则 u 在 (x, t) 处的值仅仅依赖于 u_0 在 y 处的值. 在某种意义上，我们不妨说，初始数据的"影响"沿着曲线 $C(x, t)$ 传播.

一般的情形

现在转到一般的（但是"对角化的"）问题(16.8)—(16.9). 为

此将纯量情形的考察与 Picard 迭代法组合起来．但是首先用 $v(x, t)-v_0(x)$ 代替 $v(x, t)$ 来简化(16.8)—(16.9)．这相当于假设 $v_0\equiv 0$(注意，此时必须用 $g+\Gamma^{-1}A\Gamma v_{0x}+B_\# v_0$ 代替 g)．

接着，定义函数序列 $v^{(k)}(k=0, 1, 2, \cdots)$ 如下：

(16.18) $$v_t^{(k)}-\Gamma^{-1}A\Gamma v_x^{(k)}=B_\# v^{(k-1)}+g, \quad v^{(k)}|_{t=0}=0,$$

我们约定 $v^{(-1)}\equiv 0$．我们将证明，若 U 和 δ 充分小，则函数 $v^{(k)}$ 在 $U\times]-\delta, \delta[$ 中一致收敛于一 C^1 函数 $v(x, t)$，它是(16.8)—(16.9)的解；grad $v^{(k)}$ 一致收敛于 grad v．令

$$w^{(k)}=v^{(k)}-v^{(k-1)}, \quad k=0, 1, \cdots.$$

然后定义
$$v=\sum_{k=0}^{+\infty} w^{(k)},$$

我们将证明序列 $\{w^{(k)}\}$ 是可和的．通过减法，从(16.18)我们得到

(16.19) $$w_t^{(0)}-\Gamma^{-1}A\Gamma w_x^{(0)}=g, \quad w^{(0)}(x, 0)=0,$$

(16.20) $$w_t^{(k)}-\Gamma^{-1}A\Gamma w_x^{(k)}=B_\# w^{(k-1)}, \quad w^{(k)}(x, 0)=0, \quad k>0.$$

方程(16.19)和(16.20)是容易解的．本质上它们是 m 个纯量方程的联合．事实上，若记 $w^{(k)j}$ 为 $w^{(k)}$ 的第 j 个分量，$\{B_\# w^{(k)}\}^j$ 为 $B_\# w^{(k)}$ 的第 j 个分量，g^j 为 g 的第 j 个分量；则方程(16.19)即为下述 m 个方程的联合(当 $j=1, \cdots, m$ 时)：

$(16.21)_j$ $$L_j w^{(0)j}=g^j, \quad w^{(0)j}(x, 0)=0,$$

其中 $L_j=\partial/\partial t-\lambda_j(x, t)\partial/\partial x$，而(16.20)是下述方程的联合：

$(16.22)_j$ $$L_j w^{(k)j}=\{B_\# w^{(k-1)}\}^j, \quad w^{(k)j}(x, 0)=0, \quad k>0.$$

我们用 $C_j(x, t)$ 记向量场 L_j 的积分曲线的一段，它连接轴 $t=0$ 和点 (x, t)．应用公式(16.17)：

(16.23) $$w^{(k)j}(x, t)=\int_{C_j(x,t)}\{B_\# w^{(k-1)}\}^j(x', t')dt', \quad k>0,$$

而

(16.24) $$w^{(0)j}(x, t)=\int_{C_j(x,t)} g^j(x', t')dt'.$$

现在我们引入下述记号：

记号 16.1 用 $\mathscr{D}(x, t)$ 表示包含点 (x, t) 并有下述性质的最小紧集：若 $(x', t')\in\mathscr{D}(x, t)$，则每个曲线段 $C_j(x', t')$ $(j=1, \cdots,$

$m)$ 也包含在 $\mathscr{D}(x, t)$ 中.

然后, 对任意向量值连续函数 $\varphi(x, t)$, 令

$$\|\varphi(x, t)\| = \sup_{\mathscr{D}(x,t)} |\varphi(x', t')|.$$

从 (16.23) 立刻得到

$$\|w^{(k)}(x, t)\| \leqslant C|t| \|w^{(k-1)}(x, t)\|, \quad k>0,$$

因而, 通过迭代,

$$\|w^{(k)}(x, t)\| \leqslant (C|t|)^k \|w^{(0)}(x, t)\|, \quad k>0.$$

另一方面, 因为 (16.24) 蕴涵着

$$\|w^{(0)}(x, t)\| \leqslant C|t| \|g(x, t)\|,$$

因此最后我们得到

(16.25) $\quad \|w^{(k)}(x, t)\| \leqslant (C|t|)^{k+1} \|g(x, t)\|, \quad k=0, 1, \cdots.$

因而, 当 $|t|<C^{-1}$ 时, 级数 $\sum w^{(k)}$ 一致收敛. 也能得到用 $\operatorname{grad} w^{(k)}$ 代替 $w^{(k)}$ 的类似于 (16.25) 的不等式 (这时要相应地改变 g). 为此, 首先用公式 (16.23) 估计 $w_x^{(k)}$. 这也许不是困难的, 若我们先弄直曲线 C_j, 如在纯量情形中所指出的那样. 为了估计 $w_t^{(k)}$, 我们用 $w^{(k)}$ 和 $w_x^{(k)}$ 的估计并结合 (16.21) 和 (16.22) (用其它量表示 $w_t^{(k)}$). 在作这些估计时, 必须利用特征值 $\lambda_j(x, t)$ 是 (x, t) 的 C^1 函数 [此时, 对于曲线 $C_j(x, t)$, 这是对的] 这一事实和初始数据 $f(x, t)$, $u_0(x)$ 也是一次连续可微的这一假设. 我们把细节留给读者.

最后, 我们得到了 v 的一个形如

$$v=(I-T)^{-1}g$$

的表达式, 其中 T 是一个积分算子. 如公式 (16.25) 所指出, 这个积分算子 T 使得 v 在点 (x, t) 的值仅依赖于 g 在集合 $\mathscr{D}(x, t)$ 中的值 (在这里假设着 $v_0=0$). 我们再一次遇到了"影响域"现象 (参阅定理 14.1): 在目前这个情形, 此影响沿着曲线 $C_j(x, t)$ 传播.

例 **16.1** 考虑一个空间变量的波动方程的 Cauchy 问题:

(16.26) $\quad u_{tt}-u_{xx}=f, \quad u(0, x)=u_0(x), \quad u_t(0, x)=u_1(x).$

令 $u^1=u$, $u^2=u_t-u_x$, 并把 $\mathbf{u}$ 看作具有分量 u^1, u^2 的向量, $\mathbf{f}$ 为具有分量 0, f 的向量, $\mathbf{u}_0$ 为具有分量 u_0, u_1-u_{0x} 的向量. 这时, 问

题(16.26)变为下述 Cauchy 问题:

$$(16.27)\qquad \mathbf{u}_t=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\mathbf{u}_x+\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\mathbf{u}+\mathbf{f},\qquad \mathbf{u}|_{t=0}=\mathbf{u}_0.$$

这里 $L_1=\partial/\partial t-\partial/\partial x$, $L_2=\partial/\partial t+\partial/\partial x$; $C_1(x, t)$是曲线 $x'=-t'+(x+t)$, $C_2(x, t)$是曲线 $x'=t'+(x-t)$. 例如假设 t 大于零,则集合 $\mathscr{D}(x, t)$为顶点在(x, t)处的(闭)后向光锥在半平面 $t\geqslant 0$ 中的那一部分.

习 题

16.1 这里 $x=(x^1, \cdots, x^n)$, $n\geqslant 1$, 且

$$(16.28)\qquad L=\frac{\partial}{\partial t}-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(x, t)\frac{\partial}{\partial x^j},$$

其中系数 α_j 是 $\mathbf{R}^{n+1}$ 的一开子集 Ω 中的实值 C^∞ 函数.

证明, Ω 的每一个点(x_0, t_0)有一个开邻域 $\mathfrak{V}_0\subset\Omega$, 在 $\mathfrak{V}_0$ 中常微分方程组

$$(16.29)\qquad \frac{dx^j}{ds}=-\alpha_j(x, s),\quad j=1, \cdots, n,$$

有一个唯一解 $x=x(y, s)$, 使得

$$(16.30)\qquad x^j|_{s=t_0}=y^j,\quad j=1, \cdots, n,$$

其中 y 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个接近 x_0 的点. 再证明,

$$(16.31)\qquad x=x(y, s),\quad t=s$$

确定了(x_0, t_0)邻近的一个 C^∞ 变量变换.

应用这些事实解 Cauchy 问题

$$(16.32)\qquad Lu=0,\ u|_{t=t_0}=u_0(x)\quad [\text{在}(x_0, t_0)\text{邻近}],$$

其中 u_0 是 x_0 在 $\mathbf{R}^n$ 的一邻域中的 x 的一个充分正规的函数. 对于 $Lu=f$ (代替 $Lu=0$)解相同的问题, f 是(x_0, t_0)在 $\mathbf{R}^{n+1}$ 的一开邻域中的一个光滑函数. 特别, 令 u^j 是当 $u_0(x)=x^j$ 时的(16.32)的解. 叙述 $u=(u^1, \cdots, u^n)$ 和变换(16.31)的关系.

16.2 用习题 16.1 的记号. 现在我们假设 $\alpha_j(x, s)=\alpha_j(x)$不依赖于 s $(j=1, \cdots, n)$. 用 $y(x, t)$表示(16.31)中的函数 $x=x(y, t)$关于 y 求逆所得到的函数. 令

$$(16.33)\qquad y(x, t)=T_t x.$$

证明，对于充分小的$|t|$，$|t'|$和在x_0的一个适当小的邻域中的x，我们有

(16.34) $$T_0=I,\ \text{恒等映射};\ T_tT_{t'}=T_{t+t'}.$$

在下述各情形计算T_t:

(16.35) 所有α_j都是常数;

(16.36) $$L=\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\quad(n=1);$$

(16.37) $$L=\frac{\partial}{\partial t}-\left(x^1\frac{\partial}{\partial x^2}-x^2\frac{\partial}{\partial x^1}\right)\quad(n=2).$$

16.3 用与习题 16.2 中相同的记号与假设，在$n=1$的情形给出一个例子，使对于所有的实值t，在(16.33)中定义的算子T_t都不存在.

16.4 用习题 16.1 中的记号，但$\Omega=\mathbf{R}^{n+1}$. 这里我们假设，存在一个常数$K>0$，使得

(16.38) $$|\mathrm{grad}_x\alpha_j|\leqslant K\quad \text{在整个 } \mathbf{R}^{n+1} \text{ 中},\ j=1,\cdots,n.$$

证明，对所有$y\in\mathbf{R}^n$和所有$t\in\mathbf{R}$，(16.29)—(16.30)的解存在.

16.5 考虑$L=I\partial/\partial t-A$，其中I是$m\times m$单位矩阵，而

(16.39) $$A=\sum_{j=1}^{n}A_j(x)\frac{\partial}{\partial x^j},$$

这里$A_j(x)$是$m\times m$矩阵，其元素是$\mathbf{R}^n$中原点的某个开邻域中x的解析函数. 令$\mathbf{h}$是$\mathbf{R}^n$中的任意函数，取值于$\mathbf{C}^m$中，它可被延拓到$\mathbf{C}^n$上成为一整函数. 证明，当$|x|$和$|t|$充分小时，

(16.40) $$(e^{tA}\mathbf{h})(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k}{k!}(A^k\mathbf{h})(x)$$

的右端的级数收敛，并且在原点的一个适当小的开邻域中确定x的一个解析函数.

16.6 用与习题 16.5 中相同的记号，但是现在假设$m=1$(这样，系数A_j就是纯量函数). 在(16.35)，(16.36)，(16.37)的每一情形和在情形

(16.41) $$L=\frac{\partial}{\partial t}-x^2\frac{\partial}{\partial x}\quad(n=1),$$

计算(16.40)中定义的算子e^{tA}. 与(16.33)中定义的算子T_t比较.

16.7 考虑$L=\partial/\partial t-\lambda(x)\partial/\partial x$(这是一个空间变量$x$的情形，即$n=1$)，并假设$\lambda$在零的一邻域中是$x$的解析函数. 在这个情形，给出算子(16.40)的一种解释，把它作为复平面中的(在原点附近的)一个"运动"，并由此得到，L的 Cauchy 问题是适定的，当且仅当λ是实值的.

17. Cauchy-Kovalevska 定理. 经典的和抽象的叙述

我们已经看到, 对于双曲方程和双曲方程组, 并且, 仅仅对于双曲方程和双曲组, Cauchy 问题才是适定的. 所谓适定的 Cauchy 问题, 我们的定义包含着数据——Cauchy 数据和方程的右端——都是任意的广义函数(或任意的 C^∞ 函数)这一假设. 在实际中, 我们宁愿希望要求得少一点, 并且满足于有限制的数据——或是从光滑性的观点的限制, 或是从在无穷远处增长的阶的观点的限制. 在这个情形, 使 Cauchy 问题的解存在和唯一(在所选取的框架中)的方程类可以大大超过双曲方程类. 这个现象的大多数经典例子由 Cauchy-Kovalevska 定理所提供. 在它的最一般的形式中, 它适用于*局部的* Cauchy 问题: 其数据要求是*解析函数*, 我们要找解析解. 可能找到这样一个解——这时解是唯一的——的方程类本质上包括了有解析系数的所有方程(我们将要看到, 有一个与时间变量 t 的选择有关的限制条件).

迄今, 我们是通过关于空间变量的 Fourier 变换, 把所论的偏微分方程化归为常微分方程来处理的. 这个方法可以修改一下以包括更多的情形, 假如我们把常微分方程类推广到我们乐于研究的类的话: 我们不仅必须允许常微分方程的系数是复值的或矩阵值的函数, 如以前所作的那样, 而且还必须允许它们是作用在某些*函数空间上的线性算子*. 例如, 我们不妨把热导算子 $\partial/\partial t-\Delta_x$ 视作一常微分算子(关于时间 t 的); 这时 $-\Delta_x$ 是其零阶项的系数. 我们知道它是作用在以 x 为变元的函数和广义函数上的线性算子. 对于在 §§ 15, 16 和许多别的情形中所考虑的所有的一阶方程组, 类似的解释也适用. 一般地讲, 它们具有形式

$$L=\frac{\partial}{\partial t}-A(t), \tag{17.1}$$

其中 $A(t)$ 是 t 的算子值函数. 注意, 这也包含我们经常用 $\tilde{L}$ 表示

的算子的情形, $\tilde{L}$ 是从关于 x 的 Fourier 变换而得到的. 在算子 $\tilde{L}$ 中, 其系数是作用在变量 $\xi\in\mathbf{R}_n$ 的函数的空间上的线性算子, 它是作为乘子出现的: 乘以 ξ 的光滑函数. 其好处在于乘子特别易于处理. 现在转向着眼于 Cauchy-Kovalevska 定理的另外一个方向, 考虑形如

$$\sum_{j=1}^{n} A_j(x,\ t)\frac{\partial}{\partial x^j}+A_0(x,\ t) \tag{17.2}$$

的算子 $A(t)$, 它作用在 x 的解析函数的空间上; 系数 $A_j(x, t)$ 是 $m\times m$ 矩阵, 它的元素是 x 的解析函数, 关于 t 连续(我们将较此更明确地叙述). 这里, x 在 $\mathbf{R}^n$ 的一个开集 Ω 中变动, 而 T 在一开区间 $]-T,\ T[\ (T>0)$ 中变动. 我们给出两个在 Ω 中关于 x 是解析的函数 $f(x,\ t)$, $u_0(x)$; 此外, 假设关于 t, $|t|<T$, $f(x,\ t)$ 是连续的. 现在来考察 Cauchy 问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{j=1}^{n} A_j(x,\ t)\frac{\partial u}{\partial x^j}+A_0(x,\ t)u+f(x,\ t), \tag{17.3}$$

$$u|_{t=0}=u_0(x). \tag{17.4}$$

我们的 Cauchy-Kovalevska 定理的叙述提出(粗略地讲), 若 Ω' 是 Ω 的任一相对紧的开子集, 且若 T', $0<T'\leqslant T$, 充分小(依赖于 Ω' 的选择), 则存在唯一的函数 $u(x,\ t)$, 关于 x 解析, 关于 t 一次连续可微, 当 $x\in\Omega'$ 和 $|t|<T'$ 时它满足(17.3), 当 $x\in\Omega'$ 时它满足(17.4).

必须指出, 在 Cauchy-Kovalevska 定理通常的叙述中, 系数 $A_j(x,\ t)$ 和右端 $f(x,\ t)$ 都假定关于所有变量, 包括 t, 是解析的; 此时, 解 u 被证明是关于 x 和 t 的解析函数. 这个叙述, 虽然弱于我们所强调的那个叙述, 但是它有把所有变量以几乎同等地位处理的好处, 这样, 保持了问题的某种不变性. 这个不变性在应用于微分几何时是有意义的. 总而言之, 我们还将得到解析的叙述.

我们必须用明确的和严格的术语来叙述这些不同的结论. 为此, 必须更专门一些. 把变量 $x=(x^1,\ \cdots,\ x^n)$ 延拓到复域中是方便的——在复域中我们用 $z=(z^1,\ \cdots,\ z^n)$ 表示变量——并且, 处处

用"全纯的"代替"解析的". $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 中的一个解析函数是这样一个函数，它能全纯地延拓到 Ω 在 $\mathbf{C}^n$ 中的某个开邻域(依赖于此函数)中. 就我们的目的而言，考虑下述那些函数是方便的：它们能全纯地延拓到 Ω 在 $\mathbf{C}^n$ 中的一个固定的开邻域 $\mathscr{O}$ 中，并且，实际上，它们能延拓为 $\mathscr{O}$(假定它是有界的)的闭包 $\overline{\mathscr{O}}$ 上的连续函数. 下面，我们可以忘掉 $\mathscr{O}$ 原来是作为 Ω 的一个开邻域，而只是简单地把它看作是 $\mathbf{C}^n$ 的一个任意的有界开子集.

定义 17.1　令 $\mathscr{O}$ 是 $\mathbf{C}^n$ 的一个有界开子集. 用 $H(\overline{\mathscr{O}})$ 表示 $\overline{\mathscr{O}}$ 中的连续函数的空间，这些函数在集合 $\mathscr{O}$ 中全纯、赋予 $H(\overline{\mathscr{O}})$ 最大模范数：

$$f\mapsto|f|_{\mathscr{O}}=\sup_{x\in\mathscr{O}}|f(z)|, \tag{17.5}$$

我们把 $H(\overline{\mathscr{O}})$ 做成一赋范空间.

命题 17.1　赋范空间 $H(\overline{\mathscr{O}})$ 是完备的，即，$H(\overline{\mathscr{O}})$ 是一Banach空间.

证明　$H(\overline{\mathscr{O}})$ 中的一 Cauchy 列 $\{u_j\}$ ($j=1, 2, \cdots$) 在 $\overline{\mathscr{O}}$ 上一致收敛于 $\overline{\mathscr{O}}$ 中的一连续函数 u. 在 $\mathscr{O}$ 中，我们有 $(\partial/\partial\bar{z}^k)u_j=0$, $k=1, \cdots, n$, 对每个 $j=1, 2, \cdots$; 因而 $(\partial/\partial\bar{z}^k)u=0$, 因为 u_j 在广义函数意义下收敛于 u. 这样 u 在 $\mathscr{O}$ 中是全纯的.　　证毕.

我们还可以考察取值于 $\mathbf{C}^m$ 中的、在 $\mathscr{O}$ 中全纯的、$\overline{\mathscr{O}}$ 中的连续函数. 我们用 $H(\overline{\mathscr{O}};\ \mathbf{C}^m)$ 表示这样的函数的空间，并且也赋予最大模范数(这就把 $H(\overline{\mathscr{O}};\ \mathbf{C}^m)$ 变成一 Banach 空间).

现在来研究(17.2)型的算子(用 z 代替 x)在 $H(\overline{\mathscr{O}};\ \mathbf{C}^m)$ 的元素上的作用. 显然，假如我们考察这个作用在 $\mathscr{O}$ 的边界处的效果而不去考察在非边界处的效果的话，我们就会遇到困难. 我们较细致地来看一看这个事实.

令 $\mathscr{O}_1$ 是 $\mathbf{C}^n$ 的另一个有界开子集，使得

$$\overline{\mathscr{O}}\subset\mathscr{O}_1.$$

令 d 表示从 $\mathscr{O}$ 到 $\mathscr{O}_1$ 的边界的距离. 此时注意，偏导数 $\partial/\partial z^j$ 是从 $H(\overline{\mathscr{O}_1};\ \mathbf{C}^m)$ 到 $H(\overline{\mathscr{O}};\ \mathbf{C}^m)$ 中的一个线性算子.

命题 17.2 偏导数$\partial/\partial z^j(1\leqslant j\leqslant n)$确定了一个有界线性算子$H(\overline{\mathcal{O}_1};\ \mathbf{C}^m)\to H(\overline{\mathcal{O}};\ \mathbf{C}^m)$，它的范数$\leqslant d^{-1}$.

证明 令z_0是$\overline{\mathcal{O}}$的任意一点，f是$H(\overline{\mathcal{O}_1};\ \mathbf{C}^m)$的任一元素. 我们有(Cauchy 不等式)

$$\left|\frac{\partial f}{\partial z^j}(z_0)\right|\leqslant\frac{1}{d}\sup_{|z^j-z_0^j|<d}|f(z_0^1,\ \cdots,\ z_0^{j-1},\ z^j,\ z_0^{j+1},\ \cdots,\ z_0^n)|,$$

这蕴涵着
$$\left|\frac{\partial f}{\partial z^j}\right|_{\mathcal{O}}\leqslant d^{-1}|f|_{\mathcal{O}_1},$$

从它我们就得到命题 17.2. 证毕.

令$\mathbf{M}_m(\mathbf{C})$表示赋予矩阵范数$\|\ \ \|$的具有复元素的$m\times m$矩阵的 Banach 空间.

命题 17.3 令$M(z)$属于$H(\overline{\mathcal{O}};\ \mathbf{M}_m(\mathbf{C}))$. 则映射$f\mapsto Mf$是从$H(\overline{\mathcal{O}};\ \mathbf{C}^m)$到其自身中的一个有界线性算子，它有范数

(17.6) $$\|M\|_{\mathcal{O}}=\sup_{z\in\mathcal{O}}\|M(z)\|.$$

命题 17.3 的证明是非常容易的，我们把它留给读者.

现在来考察一个矩阵值函数$M(z,\ t)$，它满足下述条件:

(17.7) $t\mapsto M(x,\ t)$是t的连续函数($|t|<T,\ T>0$)，取值于$H(\overline{\mathcal{O}};\ \mathbf{M}_m(\mathbf{C}))$中.

这意味着，对每个t，$|t|<T$，$M(z,\ t)$属于$H(\overline{\mathcal{O}};\ \mathbf{M}_m(\mathbf{C}))$[即，它的元素属于$H(\overline{\mathcal{O}})$]，而且

(17.8) 对每个$\varepsilon>0$，存在一个$\eta>0$，使得对每个$t'(|t'|<T)$，$|t-t'|<\eta$蕴涵着
$$\|M(\cdot,\ t)-M(\cdot,\ t')\|_{\mathcal{O}}<\varepsilon.$$

(自然，一般地η依赖于t).

命题 17.4 若(17.7)成立，则$t\mapsto(f\mapsto M(\cdot,\ t)f)$是$t(|t|<T)$的连续函数，取值于从$H(\overline{\mathcal{O}};\ \mathbf{C}^m)$到其自身中的有界线性算子的 Banach 空间中. 对于每个t，$|t|<T$，$f\mapsto M(\cdot,\ t)f$的算子范数$\leqslant\|M(\cdot,\ t)\|_{\mathcal{O}}$.

从命题 17.3, (17.7)和(17.8) 立刻得到此命题.

现在来考察已经用z代替了x的算子(17.2). 结合命题

17.2 和 17.4, 导致

命题 17.5 令 $A_j(z, t)$ $(j=0, 1, \cdots, n)$ 是 $t(|t|<T)$ 的 $n+1$ 个连续函数, 取值于 $H(\overline{\mathscr{O}}; \mathbf{M}_m(\mathbf{C}))$ 中. 令

$$A(t)=\sum_{j=1}^{n} A_j(z, t)\frac{\partial}{\partial z^j}+A_0(z, t).$$

则 $A(t)$ 是 $t(|t|<T)$ 的连续函数, 取值于从 $H(\overline{\mathscr{O}}_1; \mathbf{C}^m)$ 到 $H(\overline{\mathscr{O}}; \mathbf{C}^m)$ 中的有界线性算子的空间中. 对于每个 t, $|t|<T$, $A(t)$ 的范数不大于

$$\frac{1}{d}\sum_{j=1}^{n}\|A_j(\cdot, t)\|_{\mathscr{O}}+\|A_0(\cdot, t)\|_{\mathscr{O}}.$$

这样, 当 $d\to+0$ 时, $A(t)$ 的范数的这个上界就象 $1/d$ 那样增长. 在 Cauchy-Kovalevska 定理的证明中, 这个注意是决定性的. 在这个重要的定理的叙述中, 我们将论及下述对象:

(17.9) 取值于 $H(\overline{\mathscr{O}}_1; \mathbf{M}_m(\mathbf{C}))$ 中的、$t(|t|<T)$ 的 $n+1$ 个连续函数 $A_j(z, t)$ $(j=0, 1, \cdots, n)$;

(17.10) 取值于 $H(\overline{\mathscr{O}}_1; \mathbf{C}^m)$ 中的、$t(|t|<T)$ 的连续函数 $f(z, t)$;

(17.11) $H(\overline{\mathscr{O}}_1; \mathbf{C}^m)$ 中的一个任意元素 $u_0(z)$.

现在我们将研究下述 Cauchy 问题:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{j=1}^{n} A_j(z, t)\frac{\partial u}{\partial z^j}+A_0(z, t)u+f(z, t), \tag{17.12}$$

$$u|_{t=0}=u_0(z). \tag{17.13}$$

我们不能要求对所有的 $z\in\mathscr{O}_1$ 和 $|t|<T$, (17.12) 都被满足, 以及对所有的 $z\in\mathscr{O}_1$, (17.13) 成立. 说得更确切一些, 有

定理 17.1 (Cauchy-Kovalevska) 令 $\mathscr{O}_0$ 是 $\mathbf{C}^n$ 的一个非空连通开子集, 它的闭包包含在 $\mathscr{O}_1$ 中. 则存在一数 δ_0, $0<\delta_0\leqslant T$, 使得下面的结论是正确的:

存在 $t(|t|<\delta_0)$ 的唯一的 C^1 函数 $u(z, t)$, 取值于 $H(\overline{\mathscr{O}}_0; \mathbf{C}^m)$ 中. 对于所有的 $z\in\mathscr{O}_0$, t, $|t|<\delta_0$, 它满足 (17.12), 对于所有的 $z\in\mathscr{O}_0$, 它满足 (17.13).

令 d_0 是 $\mathscr{O}_0$ 与 $\mathscr{O}_1$ 的边界之间的距离. 不失一般性——若我

们缩小 $\mathscr{O}_1$——我们假定

$$\mathscr{O}_1=\{z\in \mathbf{C}^n;\ \mathrm{dist}(z,\ \mathscr{O}_0)<d_0\}.$$

我们引入介于 $\mathscr{O}_0$ 和 $\mathscr{O}_1$ 之间的一个单参数开集族，它们都是连通的：

$$\mathscr{O}_s=\{z\in \mathbf{C}^n;\ \mathrm{dist}(z,\ \mathscr{O}_0)<sd_0\},\quad 0\leqslant s\leqslant 1.$$ [1]

注意，

(17.14) $\quad \mathrm{dist}(\mathscr{O}_{s'},\ \mathbf{C}^n\backslash\mathscr{O}_s)=(s-s')d_0,\quad 0\leqslant s'<s\leqslant 1.$

我们将把(17.14)应用于命题 17.5. 把 Cauchy 问题(17.12)—(17.13)变为抽象的问题：

(17.15) $$u_t=A(t)u+f(t),$$

(17.16) $$u|_{t=0}=u_0.$$

我们将 u_0 视作 Banach 空间 $E_1=H(\overline{\mathscr{O}}_1;\ \mathbf{C}^m)$ 的一元素，视 $f(t)$ 为 $t(|t|<T)$ 的连续函数，取值于 E_1 中——u_0 和 $f(t)$ 都在 E_1 中. 更一般地，我们记

(17.17) $$E_s=H(\overline{\mathscr{O}}_s;\ \mathbf{C}^m),\quad 0\leqslant s\leqslant 1.$$

显然，我们有

(17.18) 若 $s'<s$，则 $E_s\subset E_{s'}$，并且，E_s 中的范数不小于由 $E_{s'}$ 在 E_s 上所诱导的范数.

自然，通过取属于 $H(\overline{\mathscr{O}}_s;\ \mathbf{C}^m)$ 的函数，并把它们限制于 $\overline{\mathscr{O}}_{s'}$ 上，我们得到自然内射映射 $E_s\subsetneq E_{s'}$. 我们还可以用下述方式重新叙述命题 17.5[用 $\mathscr{O}_s$ 代替 $\mathscr{O}_1$，用 $\mathscr{O}_{s'}$ 代替 $\mathscr{O}$，并且用到(17.14)]：

(17.19) 若 $s'<s$，则 $A(t)$ 是取值于有界线性算子 $E_s\to E_{s'}$ 的 Banach 空间中的、$t(|t|<T)$ 的连续函数.

对于每个 t，$|t|<T$，$A(t):E_s\to E_{s'}$ 的算子范数不大于 $C(t)/(s-s')$，这里

$$C(t)=\frac{1}{d_0}\sum_{j=1}^{n}\|A_j(\cdot,\ t)\|_{\mathscr{O}_1}+\|A_0(\cdot,\ t)\|_{\mathscr{O}_1}.$$

---

1) 译者注：当 $s=0$ 时的开集族 $\{\mathscr{O}_s\}$ 中的元素 $\mathscr{O}_0$ 应理解为原来的开集 $\mathscr{O}_0$，而不能由当 $s=0$ 时的 $\mathscr{O}_s$ 的定义来理解.

关于 $C(t)$，重要的是它在 $]-T, T[$ 的任一闭子区间上是有界的。这样，如果稍微缩小 $T>0$，我们就可以假设 $C(t)$ 界于一常数 $C>0$，因而可以假设

(17.20) 对每个 t, $|t|<T$, $A(t): E_s \to E_{s'}$ $(0 \leqslant s' < s \leqslant 1)$ 的算子范数不大于 $C/(s-s')$，这里正常数 C 不依赖于 s, s'，也不依赖于 t.

还注意，当我们一旦缩小 T（然而是稍微缩小）时，我们就能假设 f 是取值于 E_1 中的、闭区间 $[-T, T]$ 中的连续函数。我们还注意，当我们增大 C 时，不用修改 (17.20)。由于技术的原因，假设

(17.21) $$(Ce)^{-1} \leqslant T$$

是方便的.

现在我们能够致力于下述结果，它可以看作 Cauchy-Kovalevska 定理的抽象的叙述.

定理 17.2 在上述这些假设下，给定任何 $u_0 \in E_1$ 和取值于 E_1 中的、t $(|t| \leqslant T)$ 的任何连续函数 f，下述结论成立：

（I） 存在区间 $|t| < (Ce)^{-1}$ 中一个函数 u，取值于 E_0 中，对于任何 s, $0 \leqslant s < 1$，它是 t $(|t| < (Ce)^{-1}(1-s))$ 的 C^1 函数，取值于 E_s 中，并且，在满足 (17.16) 的同时，当 $|t| < (Ce)^{-1}$ 时，它也满足 (17.15).

(II) 若对于某数 T', $0 < T' \leqslant T$，对于某个 s, $0 < s \leqslant 1$，存在两个取值于 E_s 中的、t $(|t| < T')$ 的 C^1 函数，在区间 $|t| < T'$ 中它们满足 (17.15)，同时满足 (17.16)，则它们必定相等.

证明 (I) *解的存在性*. 我们定义一个取值于 E_s 中（对于任何 s 值，$0 \leqslant s < 1$）的、t $(|t| < T)$ 的连续函数序列 $v_k(t)$ $(k=0, 1, \cdots)$ 如下：

$$v_0(t) = u_0 + \int_0^t f(t')dt',$$

$$v_{k+1}(t) = u_0 + \int_0^t f(t')dt' + \int_0^t A(t')v_k(t')dt', \quad k=0, 1, \cdots.$$

由 (17.19) 我们知道，若 $v_k(t)$ 是取值于 E_s 中的、t $(|t| < T)$ 的连续

函数，则对任何 $s'<s$，$A(t)v_k(t)$ 是取值于 $E_{s'}$ 中的、在同一个区间中的连续函数，对于 $v_{k+1}(t)$，相同的结论亦真．因为 s 任意地接近于 1，因而对于 s'，相同的结论亦真，由此得到我们的论断，即每个 v_k 是取值于任何 $E_s(0\leqslant s<1)$ 中的、$t(|t|<T)$ 的连续函数．其次，我们令

$$w_0=v_0, \quad w_k=v_k-v_{k-1} \quad 若\ k>0.$$

我们有 $$w_{k+1}(t)=\int A(t')w_k(t')dt', \quad k=0,\ 1,\ \cdots.$$

每一 w_k 是取值于任何 $E_s(s<1)$ 中的、$t(|t|<T)$ 的连续函数．通过对于 $k=0,\ 1,\ \cdots$ 的归纳法，我们将证明下述不等式：

$$N_s(w_k(t))\leqslant M(t)\left(\frac{Ce|t|}{1-s}\right)^k, \quad |t|<T, \tag{17.22}$$

其中 N_s 表示 E_s 中的范数，而

$$M(t)=N_1(u_0)+\left|\int_0^t N_1(f(t'))dt'\right|.$$

注意，$M(t)$ 分别地为半区间 $[0,\ T]$ 上和 $[-T,\ 0]$ 上 $|t|$ 的非减函数．

当 $k=0$ 时不等式(17.22)显然成立．假设它对于 k 成立，我们来证明对于 $k+1$ 它成立．我们回到 w_{k+1} 的定义并应用(17.20)．若 $0\leqslant s'<s<1$，则

$$\begin{aligned} N_{s'}(w_{k+1}(t)) &\leqslant \frac{C}{s-s'}\left|\int_0^t N_s(w_k(t'))dt'\right| \\ &\leqslant M(t)\frac{C}{s-s'}\left(\frac{Ce}{1-s}\right)^k\frac{|t|^{k+1}}{k+1} \quad [由(17.22)]. \end{aligned}$$

现在取 $s=s'+(1-s')/(k+1)$，因此 $1-s=[k/(k+1)](1-s')$．我们得到

$$N_{s'}(w_{k+1}(t))\leqslant M(t)\left(\frac{C|t|}{1-s'}\right)^{k+1}e^k\left(1+\frac{1}{k}\right)^k,$$

此时只需注意到 $(1+1/k)^k\leqslant e$ 即可．

回想到在闭区间 $|t|\leqslant T$ 上 f 是连续的，我们就看到 $M(t)\leqslant M<+\infty$．从(17.22)我们推得，级数

$$\sum_{k=0}^{+\infty} w_k(t)$$

在 E_s 中绝对收敛，在开区间 $|t|<(Ce)^{-1}(1-s)$ 的每个闭子区间中这个收敛是一致的：其和 $u(t)$ 即为 (17.15)—(17.16) 的所求的解。自然，u 是 v_k 当 $k\to+\infty$ 时的极限[在 E_s 中的极限，在区间 $|t|<(Ce)^{-1}(1-s)$ 的紧子集上是一致的]，并且，从 v_k 的定义我们直接得到

$$u(t)=u_0+\int_0^t f(t')dt'+\int_0^t A(t')u(t')dt'. \tag{17.23}$$

现令 ε 是使 $0<\varepsilon<1-s$ 成立的一数. 我们知道，u 是区间 $|t|<(Ce)^{-1}(1-s-\varepsilon)$ 中的连续函数，取值于 $E_{s+\varepsilon}$ 中. 因而，由 (17.19)，$A(t)u(t)$ 即为同一个区间中的、然而是取值于 E_s 中的连续函数. 由 (17.23) 我们推得，u 是取值于 E_s 中的、同一个区间中的 C^1 函数. 令 $\varepsilon\to+0$，我们得到 u 是取值于 E_s 中的、$t(|t|<(Ce)^{-1}(1-s))$ 的 C^1 函数. 由 (17.23)，它满足 (17.15)—(17.16) 是显然的.

(II) **解的唯一性.** 我们必须证明，若一个取值于 E_s 中 $(0<s\leqslant 1)$ 的、$t(|t|<T')$ 的 C^1 函数 h 满足

$$h_t=A(t)h,\quad h|_{t=0}=0, \tag{17.24}$$

则在区间 $|t|<T'$ 中，它必须恒等于零. 使得 h 等于零的点的集合是非空的，因为此集合包含 $t=0$ 这一点，并且，它显然是闭的；我们要证明它在 $]-T, T[$ 中是开的，而这就蕴涵着我们想证明的事情. 令 t_0 是使得 $h(t_0)=0$ 的任一点. 注意，我们有

$$h(t)=\int_{t_0}^t A(t')h(t')dt'. \tag{17.25}$$

令 s' 是使得 $0\leqslant s'<s$ 的任一数. 对 $k=0, 1, \cdots$ 用归纳法，我们将证明

$$N_{s'}(h(t))\leqslant M_1(t)\,(s-s')^{-k}(Ce)^k|t-t_0|^k, \tag{17.26}$$

其中
$$M_1(t)=\sup N_s(h(t')),$$

上确界取在联接 t 和 t_0 的线段上. 当 $k=0$ 时不等式 (17.26) 是平凡的. 由 (17.20) 和 (17.25)，我们有

$$N_{s'}(h(t)) \leqslant M_1(t) C s^{-1} (Ce)^k (s-s'-\varepsilon)^{-k} \frac{|t-t_0|^{k+1}}{k+1},$$

其中 $\varepsilon=(s-s')/(k+1)$. 这就直接导致了用 $k+1$ 代替 k 的(17.26).

(17.26)指出,若 $|t-t_0|<(Ce)^{-1}(s-s')$,则 $N_{s'}(h(t))=0$. 但因 E_s 内射于 $E_{s'}$ 中,所以这蕴涵着 $N_s(h(t))=0$. 证毕.

我们在这里指出,定理 17.2 的"全纯的叙述"也成立. 在这个叙述中, t 是一复变量, 它在圆盘 $|t|\leqslant T$ 中变动. 假设(17.19)换成

(17.27) 若 $s'<s$, 则 $A(t)$ 是 $t(|t|<T)$ 的全纯函数,取值于有界线性算子 $E_s\to E_{s'}$ 的 Banach 空间中.

自然, 假设(17.20)保持不变. 现在假设 f 是 $t(|t|\leqslant T)$ 的连续函数, 取值于 E_1 中, 当 $|t|<T$ 时它是全纯的. 定理 17.2 的证明仍然有效: 我们只需记住 t 现在是复变量; 而积分是施行在联接积分限的直线段上. 因为全纯函数(在开集上)的一致极限是全纯的, 所以定理 17.2 中的(I)部分和(II)部分的叙述可以保持不变, 除了这时必须在复的意义下来解释 C^1, 它与全纯是一致的.

从定理 17.2 的这个全纯的叙述立刻得到 Cauchy-Kovalevska 定理的经典的全纯的叙述.

习 题

17.1 用 $\mathfrak{A}_R(R>0)$表示 $\mathbf{R}^n$ 中使得

$$\sup_{\alpha\in\mathbf{Z}_+^n}\sup_{x\in\mathbf{R}^n}\frac{R^{|\alpha|}}{\alpha!}|\partial_x^\alpha f(x)|<+\infty \tag{17.28}$$

成立的 C^∞ 函数 $f(x)$的空间, 在 $\mathfrak{A}_R$ 中赋予由(17.28)的左端所定义的范数. 证明, $\mathfrak{A}_R$ 是一个 Banach 空间, 并且, $\mathfrak{A}_R$ 的每个元素 f 都能延拓为带域$\{z\in\mathbf{C}^n;\ x\in\mathbf{R}^n,\ |y|<R\}$ 中 $z=x+iy$ 的全纯函数.

令 $0<R_0<R_1<+\infty$,并令 $E_s=\mathfrak{A}_{(1-s)R_0+sR_1}$, $0\leqslant s\leqslant 1$. 证明,当

$$A(t)=\sum_{j=1}^n A_j(x,\ t)\frac{\partial}{\partial x^j}+A_0(x,\ t) \tag{17.29}$$

时, 条件(17.18), (17.19)和(17.20)被满足, 这里系数 $A_j(j=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$

是 $t(|t|<T)$ 的连续函数，取值于 $\mathfrak{A}_{R_1}$ 中.

17.2 令 $g(\xi)$ 是 $\mathbf{R}_n$ 中实值的连续函数，用 $\hat{K}^g$ 表示 $\mathbf{R}_n$ 中使得

(17.30) $$e^g f \in L^2$$

的可测函数 f 的空间.

证明，赋予范数

$$\|f\|_{\hat{K}^g}=\left\{\int|e^g f|^2 \frac{d\xi}{(2\pi)^n}\right\}^{1/2}$$

的 $\hat{K}^g$ 是一 Hilbert 空间，而 $C_c^\infty(\mathbf{R}_n)$ 在其中稠.

令 $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ 表示 $\mathbf{R}^n$ 中的函数的空间，其 Fourier 变换属于 $C_c^\infty(\mathbf{R}_n)$（由 Paley-Wiener 定理，$\mathscr{D}=\mathscr{S}\cap \mathrm{Exp}$，它是在无穷远处速降的 C^∞ 函数的空间，这些函数可延拓到 $\mathbf{C}^n$ 上成为指数型的整函数）. 用 K^g 表示 $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ 关于范数

(17.31) $$\|u\|_{K^g}=\|\hat{u}\|_{\hat{K}^g}$$

的完备化. 证明，K^{-g} 典则地等同于 K^g 的对偶空间. 从 Hilbert 空间 K^g 到其对偶空间 K^{-g} 上的典则反线性等距变换是什么？再证明，若对于某个常数 $C>0$，有

(17.32) $$-g(\xi)\leqslant C\log(1+|\xi|), \quad \forall \xi\in\mathbf{R}_n,$$

则对于某个适当的实数 s，K^g 能被连续地嵌入于 Sobolev 空间 H^s（参看定义 13.1）.

证明，若

(17.33) $$g(\xi)/\log(1+|\xi|) \text{ 趋于} +\infty, \quad \text{当} |\xi|\to+\infty \text{ 时},$$

则 K^g 被连续地嵌入 $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ 中，并且所有 Sobolev 空间 H^s，$s\in\mathbf{R}$，被连续地嵌入 K^g 的对偶空间 K^{-g} 中.

17.3 令 K^g 是习题 17.2 中定义的空间. 证明下述结果:

命题 17.6 假设

(17.34) $$\sum_{j=1}^n|\xi_j|^{1/d}\leqslant g(\xi)+a, \quad \forall\xi\in\mathbf{R}_n,$$

其中 d 是一个严格大于零的数，a 是一个实数.

则 K^g 的任何一个元素 u 可等同于 $\mathbf{R}^n$ 中使得

(17.35) $$\sup_{\alpha\in\mathbf{Z}_+^n}\sup_{x\in\mathbf{R}^n}\left\{\frac{R^{|\alpha|}}{(\alpha!)^d}|\partial_x^\alpha u(x)|\right\}<+\infty$$

成立的 C^∞ 函数.

17.4 令 K^g 是习题 17.2 中定义的空间 我们取

(17.36) $$g(\xi)=sp(\xi), \quad s\in\mathbf{R},$$

其中 p 是 $\mathbf{R}_n$ 中的一个连续函数，$p>0$. 再令 $A(\xi)$ 是 $\mathbf{R}_n$ 中的一个任意的连

续函数,并令

(17.37) $$A(D_x)u(x)=(2\pi)^{-n}\int e^{i\langle x,\xi\rangle}A(\xi)\hat{u}(\xi)d\xi.$$

证明下述结果:

命题 17.7 假设对于某个常数 $C_0>0$ 有

(17.38) $$|A(\xi)|\leqslant C_0 p(\xi),\quad \xi\in\mathbf{R}_n.$$

则, 对于任何一对实数 $s'<s$, 算子 $A(D_x)$[在(17.37)中]确定一个有界线性算子 $K^{sg}\to K^{s'g}$, 它的范数 $\leqslant C_0 e^{-1}(s-s')^{-1}$.

从这个命题推得, Cauchy 问题

(17.39) $$\frac{\partial u}{\partial t}-A(D_x)u=f,$$

(17.40) $$u|_{t=0}=u_0$$

有唯一解 u, 其中 $u_0\in K^{s_0p}$, $f\in C^0([-T,T];K^{s_0p})$, u 在某个区间 $|t|<\delta_0\leqslant T$ 中是 t 的 C^1 函数, 取值于 K^{s_1p} 中, 这里 $s_1<s_0$. 你能用 C_0 和 (s_0-s_1) 给出区间半径 δ_0 的一个上界吗?

17.5 证明热导方程的 Cauchy 问题

(17.41) $$\frac{\partial u}{\partial t}=\Delta_x u+f,\quad u|_{t=0}=u_0$$

是适定的, 若我们限定, 对于某个合适的 d 值(和 $a=0$), 数据和解属于某个适当的空间 K^g, 这里的 g 满足(17.34). d 的这个值是什么? [提示: 用在习题 17.4 中证明了的结果.]

17.6 考虑 Cauchy 问题(一个空间变量)

(17.41′) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial u}{\partial x}+f,\quad u|_{t=0}=u_0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=u_1.$$

证明, 若数据 f, u_0, u_1 关于变量 x 取值于某个适当的 Gevrey 类(定义 3.3)中, 则问题(17.41′)有也取值于这样的类中的唯一解. [提示: 应用习题 17.3 和 17.4 的结果.]

17.7 令 $\phi(r)$ 是 $r>0$ 的非减连续函数, 对于所有的 r, $\phi(r)>0$, B 是一复 Banach 空间. 我们记得, $\mathbf{C}$ 中的函数 h 称为取值于 B 中的整解析函数, 若它是处处满足 Cauchy-Riemann 方程的 $\mathbf{R}^2\to B$ 的 C^1 函数. 用 $\mathfrak{A}_\phi(B)$ 表示满足

(17.42) $$\sup_{z\in\mathbf{C}} e^{-\phi(|z|)}\|h(z)\|_B<+\infty$$

的整解析函数的空间, 这里 $\|\ \|_B$ 是 B 中的范数. 证明, 若赋予 $\mathfrak{A}_\phi(B)$ 以(17.42)左端所定义的范数, 则它变为一 Banach 空间.

当 $0\leqslant s\leqslant 1$ 时，令 $E_s=\mathfrak{A}_\phi(B)$，这里，对于给定的 ϕ_0（连续，大于零和非减的），$\phi(r)=\phi_0((1-s/2)r)$. 证明下述命题：

命题 17.8　给定 $0\leqslant s'<s\leqslant 1$，则 $\partial/\partial z$ 确定一个范数不超过 $[\exp\phi_0(1)]/(s-s')$ 的 $E_s\to E_{s'}$ 的有界线性算子.

把这个命题应用于 Cauchy 问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}=A\frac{\partial u}{\partial z}+f(t,z),\quad u|_{t=0}=u_0(z), \tag{17.43}$$

这里 A 是 B 上的一个有界线性算子，而数据 f 和 u_0，对于某个适当选取的 ϕ，取值于 $\mathfrak{A}_\phi(B)$ 中（并且，在 $[-T,T]$ 中 f 连续地依赖于 t）.

我们能否变更函数 ϕ 的选取以便对方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=A\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+f \tag{17.44}$$

得到与习题 17.5 中描述的那些结果类似的结果?

17.8　考虑具有常系数的一阶方程组：

$$L=I\frac{\partial}{\partial t}-\sum_{j=1}^{n}A_j\frac{\partial}{\partial z^j}-A_0; \tag{17.45}$$

系数 I, $A_j(0\leqslant j\leqslant n)$ 是 $m\times m$ 复矩阵（I 是单位矩阵）. 证明，可以选择任意开球 $B_R(z_0)=\{z\in\mathbf{C}^n;\ |z-z_0|<R\}$ $(R>0)$ 作为域 $\mathscr{O}_0$ 而应用定理 17.1. 求在 t 直线（或 t 平面）中的区间（或圆盘）的半径 δ_0 的上界，在此区间（或圆盘）中，下述 Cauchy 问题的解存在：

$$L\mathbf{u}=\mathbf{f}(t,z),\quad \mathbf{u}|_{t=0}=\mathbf{u}_0(z), \tag{17.46}$$

其中 $\mathbf{f}$ 是 $\mathbf{C}^{n+1}$ 中的整函数，$\mathbf{u}_0$ 是 $\mathbf{C}^n$ 中的整函数，它们都取值于 $\mathbf{C}^m$ 中. 证明，可以与 $z_0\in\mathbf{C}^n$ 无关地选取 δ_0. 从这个事实推得，问题(17.46)有唯一解 $\mathbf{u}(t,z)$，它是 $\mathbf{C}^{n+1}$ 中的整解析函数，取值于 $\mathbf{C}^m$ 中.

17.9　令 $u_0(z)$ 是复平面中的一个整函数（取值于 $\mathbf{C}$ 中）. 证明，若 $u=u(t,z)$ 是满足

$$\frac{\partial u}{\partial t}=z^2\frac{\partial u}{\partial z}\quad \text{在 } \mathbf{C}^2 \text{ 中},\quad u|_{t=0}=u_0(z) \tag{17.47}$$

的 $\mathbf{C}^2$ 中的一个整函数，则必须有 $u(t,z)=u_0(z/(1-zt))$. 由此推得，一般地，Cauchy 问题(17.47)没有整函数作为它的解（参阅习题 17.8 的结论）.

17.10　令 H^0, H^1 是两个复 Hilbert 空间，$H^1\hookrightarrow H^0$，具有连续的内射. 令 A 是 $H^1\to H^0$ 的一有界线性算子，使得对于某个常数 $C_0>0$，有

$$C_0\|u\|_0^2\leqslant(Au,u)_0,\quad \forall u\in H^1. \tag{17.48}$$

[H^0 中的内积用 $(\ ,\ )_0$ 表示，范数用 $\|\ \|_0$ 表示.] 证明，对于任何数 $t\geqslant 0$,

$(I+tA/m)^{-m}$ 确定 H^0 上的一个有界算子，当 $m\to+\infty$ 时，在 H^0 上有界线性算子强收敛的意义下它有极限. 我们用 e^{-tA} 表示这个极限. 证明，它有半群性质

(17.49) $$e^{-sA}e^{-tA}=e^{-(s+t)A}, \quad e^{-tA}|_{t=0}=I.$$

当 $s\geqslant 0$ 时，令 E_s 是 $H^0=E_0$ 在映射 e^{-sA} 下的像，赋予范数

(17.50) $$\|e^{-sA}h\|_s=\|h\|_0.$$

证明，对于这个范数，E_s 是一 Hilbert 空间，并且，对所有的 $s\geqslant 0$，E_s 在 H^0 中稠.

当 $s<0$ 时，定义 E_s 为 H^0 关于范数 $\|e^{sA}h\|_0$ 的完备化. 证明下述论断:

(17.51) 给定任两实数 $s>s'$，则 E_s 可等同于 $E_{s'}$ 的一个稠线性子空间；自然内射 $E_s\hookrightarrow E_{s'}$ 是连续的并有范数 $\leqslant 1$.

(17.52) 若 $s>s'$，则 A 确定 $E_s\to E_{s'}$ 的一个有界线性算子，它具有范数 $\leqslant e^{-1}/(s-s')$.

利用这些事实去解 Cauchy 问题

(17.53) $$\frac{du}{dt}-\lambda(t)Au=f, \quad u|_{t=0}=u_0,$$

其中 λ 是区间 $|t|<T$ 上的一个任意的复值连续函数，f 是在同一区间中的连续函数，取值于 E_{s_0} 中，u_0 是 E_{s_0} 的一个元素（s_0 是一个任意实数）.

还证明，对于任何实数 s，E_s"典则地"等同于 E_{-s} 的对偶空间. 从 E_s 到它的对偶空间 E_{-s} 上的典则反线性等距变换是什么?

18. 把高阶组化为一阶组

我们已经对于一阶线性偏微分方程组证明了 Cauchy-Kovalevska 定理，但这似乎还不够一般. 然而，现在我们要证明事情并非如此——确切一些，即，任意阶的线性偏微分方程的每个确定组，其中时间变量起着特殊的作用，都可按下述方式把它变为 (17.3) 型的方程组：使得与前者的 Cauchy 问题有关的任何重要命题都等价于有关后者的类似命题（例如，就解的存在性和唯一性而言）. 这里，我们注意，很容易修改抽象的 Cauchy-Kovalevska 定理（定理 17.2）的证明，以便对于 t 的阶数 $\geqslant 1$ 的抽象的微分方程得到类似的结果. 要求作的这个修改是不难的，我们建议读者

试着去完成它.

我们来研究 $m(>1)$ 阶的线性偏微分方程组, 它的形式为

$$(18.1) \qquad D_t^m u = \sum_{\substack{\alpha_0+|\alpha|\leqslant m \\ \alpha_0<m}} c_{\alpha_0,\alpha}(x, t) D_t^{\alpha_0} D_x^\alpha u + f(x, t),$$

附有 Cauchy 条件

$$(18.2) \qquad D_t^k u|_{t=0} = v^k(x), \quad k=0, \cdots, m-1.$$

每个线性偏微分方程组可以变成(18.1)型这一论断是不正确的. 在(18.1)右端的求和号中, $|\alpha_0|<m$ 这一限制给 t 变量规定了一种特殊的作用. 今后, 在单个(即纯量)方程的情形, 我们还要回到这个问题上来. 目前, 我们先指出, 方程组关于 t 的阶数正好等于 m, 并且, 方程组中 D_t^m 的系数是 $N\times N$ 单位矩阵, 其它的系数 $c_{\alpha_0,\alpha}(x, t)$ 是 $N\times N$ 矩阵; N 是某一正整数. 这些矩阵的元素在 $\mathbf{R}^{n+1}$(或 $\mathbf{C}^{n+1}$, 或 $\mathbf{C}^n\times\mathbf{R}^1$, 假如我们要考虑复变量的话)的某个开子集 Ω 中是 (x, t) 的函数. 为了简单起见, 我们总假定它们是 Ω 中的 C^∞ 函数. 我们还假定 $f(x, t)$ 是取值于 $\mathbf{C}^N$ 中的、Ω 中 (x, t) 的 C^∞ 函数, $v^k(x)$ 是 Ω 的 x 投影中 x 的 C^∞ 函数, 也取值于 $\mathbf{C}^N$ 中.

我们将在(18.1)—(18.2)中施行"未知函数"的变换. 令

$$(18.3) \qquad u_0=u, \quad u_j=D_{x_j}u \quad (1\leqslant j\leqslant n), \quad u_{n+1}=D_t u,$$

并以 U 记向量$(u_0, u_1, \cdots, u_n, u_{n+1})$, 它取值于 $\mathbf{C}^{N'}$ 中, 这里 $N'=N(n+2)$. 在(18.1)中我们作变换(18.3), 得到一个形如

$$(18.4) \qquad D_t^{m-1}u_{n+1} = \sum_{j=0}^{n+1} \sum_{\substack{\alpha_0+|\alpha|\leqslant m-1 \\ \alpha_0\leqslant m-2}} c_{\alpha_0,\alpha}^{j}(x, t) D_t^{\alpha_0} D_x^\alpha u_j + f$$

的方程. 不难看到, 要完成这种手续, 有几种不同的方法. 我们选取这些方法中的任何一种. 另一方面, 注意到, 通过对(18.3)的前面 $n+1$ 个方程微商 $m-1$ 次, 得到

$$(18.5) \qquad D_t^{m-1}u_0 = D_t^{m-2}u_{n+1},$$

$$(18.6) \qquad D_t^{m-1}u_j = D_t^{m-2}D_{x_j}u_{n+1}, \quad j=1, \cdots, n.$$

我们可以组合方程(18.4), (18.5)和(18.6), 并写为

$$(18.7) \qquad D_t^{m-1}U = \sum_{\substack{\alpha_0+|\alpha|\leqslant m-1 \\ \alpha_0\leqslant m-2}} C_{\alpha_0,\alpha}(x, t) D_t^{\alpha_0} D_x^\alpha U + F,$$

其中 $C_{\alpha_0,\alpha}$ 是 $N'\times N'$ 矩阵，F 是 N' 向量，它的分量中，除了最后 N 个分量等于 f 外，其余都是零．限制 $\alpha_0\leqslant m-2$（它是很重要的）成为可能，因为：在(18.4)，(18.5)和(18.6)的右端，同一个限制成立．

最后，我们必须变换 Cauchy 条件(18.2)．我们有

(18.8) $\quad D_t^k u_0|_{t=0}=v^k(x),\quad k=0,\cdots,m-2,$

(18.9) $\quad D_t^k u_j|_{t=0}=D_{x_j}v^k(x),\quad k=0,\cdots,m-2,\quad j=1,\cdots,n,$

(18.10) $\quad D_t^k u_{n+1}|_{t=0}=v^{k+1}(x),\quad k=0,\cdots,m-2.$

把这些方程综合为

(18.11) $\quad D_t^k U|_{t=0}=V^k(x),\quad k=0,\cdots,m-2.$

我们已经把 m 阶的方程组的 Cauchy 问题(18.1)—(18.2)变为 $m-1$ 阶组的 Cauchy 问题(18.7)—(18.11)．我们能够一步一步地继续这个化法直至得到一个一阶组的 Cauchy 问题(除此之外，我们不能进一步继续这个化法)．

现在我们来提出关于原来问题(18.1)—(18.2)的解的唯一性和(或)存在性的叙述同关于变换后问题(18.7)—(18.11)的类似叙述的等价性问题．然而后者必须按高度的一般性重新说明；这就是说，必须允许数据 F，V^k 取 $\mathbf{C}^{N'}$ 中的一切值而不仅仅是源于(18.1)—(18.2)中的特殊类型的值．

(1) 首先假设，给定任意选取的 F 和 $V^k(0\leqslant k\leqslant m-2)$，Cauchy 问题(18.7)—(18.11)至少有一个解(关于这个解的正规性，我们不想也不需要说得更明确一些)．那么，特别地，当

(18.12)
$$F=(0,\cdots,0,f),\quad V^k=(v^k,D_{x^1}v^k,\cdots,D_{x^n}v^k,v^{k+1})$$
$$(0\leqslant k\leqslant m-2)$$

时这个假设也成立．令 u 等于当情形(18.12)成立时(18.7)—(18.11)的任一解 U 的前 N 个分量，我们就得到了(18.1)—(18.2)的一个解(上面我们已用 u_0 表示)．

(2) 再假设，对于数据的某个选择［不一定满足(18.12)］，问题(18.7)—(18.11)容许有两个不同的解．通过减法，我们看到，

齐次问题(18.7)—(18.11)(此时所有数据, F 和 V^k, 都恒等于零)容许有非平凡解 U. 由(1)中所用的论证, U 的前 N 个分量 u_0 构成齐次问题(18.1)—(18.2)的一个解. 假设 u_0 恒等于零. 则由方程(18.5)我们可以推得 $D_t^{m-2}u_{n+1}\equiv 0$, 因而, 关于 t, u_{n+1} 是次数 $\leqslant m-3$ 的多项式. 但是从(18.10), 那里 $v^{k+1}\equiv 0$, 我们推得, u_{n+1} 关于 t 的阶数 $\leqslant m-2$ 的所有导数在 $t=0$ 处等于零. 这样, $u_{n+1}\equiv 0$. 还有, 由(18.6)我们看到 $D_t^{m-1}u_j\equiv 0\,(1\leqslant j\leqslant n)$, 因而, 关于 t, u_j 是一次数 $\leqslant m-2$ 的多项式; 由(18.9), 这个多项式的阶数 $\leqslant m-2$ 的导数在 $t=0$ 处都等于零, 因而这个多项式本身恒等于零. 我们已经得到了 U 的所有分量都等于零的结论, 这与我们的假设矛盾. 这样, $u=u_0$ 不能恒等于零, 因而齐次问题(18.1)—(18.2)有非平凡解.

(3) 若齐次问题(18.1)—(18.2)(即当 f 和 v^k 恒等于零时)有非平凡解 u, 显然, 齐次问题(18.7)—(18.11)也有非平凡解.

(4) 最后我们假设, 对于任意选取的数据 f, v^k, 问题(18.1)—(18.2)有解, 我们证明, 对于问题(18.7)—(18.11), 相同的结论也正确[没有限制(18.12)].

首先注意, 我们不妨假定 Cauchy 数据 V^k 都恒等于零. 事实上, 只需用

$$U(x,\ t)-\sum_{k=0}^{m-2}\frac{t^k}{k!}V^k(x)$$

代替 $U(x,\ t)$ 即可. 自然, 这就要求重新定义 F. 此事一旦完成, 我们就用下述方式在"未知函数"U 上施行进一步的变换. 记 $F=(F_0,\ F_1,\ \cdots,\ F_n,\ F_{n+1})$, 这里每个 $F_j\,(0\leqslant j\leqslant n+1)$ 取值于 $\mathbf{C}^N$ 中. 对于 $j\leqslant n$, 我们用 w_j 记问题

$$D_t^{m-1}w_j=F_j,\qquad D_t^k w_j|_{t=0}=0,\qquad k=0,\ \cdots,\ m-2$$

的(唯一)解. 然后, 用 $\widetilde{U}=U-(w_0,\ w_1,\ \cdots,\ w_n,\ 0)$ 代替 U. 我们留给读者去验证

$$D_t^{m-1}\widetilde{U}=\sum_{\substack{\alpha_0+|\alpha|\leqslant m-1\\ \alpha_0\leqslant m-2}}C_{\alpha_0,\alpha}(x,\ t)D_t^{\alpha_0}D_x^{\alpha}\widetilde{U}+\widetilde{F},\tag{18.13}$$

$$D_t^k\widetilde{U}|_{t=0}=0,\qquad k=0,\ \cdots,\ m-2,\tag{18.14}$$

其中 $\tilde{F}=(0, \cdots, 0, F_{n+1})$. 但是问题(18.13)—(18.14)是问题(18.1)—(18.2)——我们选取 $f=F_{n+1}, v^k=0$, 对于所有的 k——的变形. 我们知道它有解. 我们能够重复我们的步骤并重新构造问题(18.7)—(18.11)的解 U.

所要求的等价性已被完全证明了.

注 18.1 如果我们通过未知函数的变换从 u 变到 U 和反之, 我们就注意到一些基本的特性被保持了: 例如, 当原来的组(18.1)有常数(或者多项式的, 解析的, C^∞, 等)系数, 则对于"最后的"组(18.7), 同样的事实成立; 如果关于(x, t), u 是 C^∞ 的(或者解析的, 一多项式, 等), 则对于"最终产品" U, 同样的事实成立; 当我们从 U 变到 u 时这也正确.

习　　题

18.1 应用约化手续, 把二阶方程——n 个变量的 Laplace 方程和 n 个空间变量的波动方程$(n\geqslant 1)$——化为一阶方程组.

18.2 令方程组(18.1)的系数 $c_{\alpha_0, \alpha}$ 是常数. 此时可以定义它的算符的行列式为矩阵

$$(18.15)\qquad I\tau^m-\sum_{\substack{\alpha_0+|\alpha|\leqslant m\\ \alpha_0<m}} c_{\alpha_0,\alpha}\tau^{\alpha_0}\xi^\alpha$$

的行列式. 证明, 变换后的方程组(18.7)的算符的行列式等于(18.15)乘以 τ 的某一幂后的行列式.

18.3 令 $P(\xi, \tau)$是 $n+1$ 个变量 $\xi=(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ 和 τ 的 m 次的复系数的多项式, 形为

$$(18.16)\qquad P(\xi, \tau)=\tau^m-\sum_{\substack{\alpha_0+|\alpha|\leqslant m\\ \alpha_0<m}} c_{\alpha_0,\alpha}\tau^{\alpha_0}\xi^\alpha \quad (c_{\alpha_0,\alpha}\in\mathbf{C}).$$

利用习题 18.2 中的结果证明下面的结果:

为了通过在 § 18 中所描述的手续能把算子 $P(D_x, D_t)$变为一阶双曲组(定义 15.2), 必要和充分的条件是它具有性质

(18.17) 存在一个正常数 C, 使得对每个 $\xi\in\mathbf{R}_n$ 和每个 $\tau\in\mathbf{C}$, 若 $P(\xi, \tau)=0$, 则必须有 $|\operatorname{Im}\tau|\leqslant C$.

(与此相关, 我们叙述下面的重要的定义:

定义 18.1 算子 $P(D_x, D_t)$称为关于 t 是双曲的, 假若(18.17)成立[假设

$P(\xi, \tau)$有(18.16)形式; 参阅定义 15.2].)

18.4 证明习题18.3中的多项式 $P(\xi, \tau)$有性质(18.17), 若其主算符(定义 19.1)有下述性质:

(18.18) $\forall \xi \in \mathbf{R}_n$, $\xi \neq 0$, $P_m(\xi, \cdot)$的根实而互异.

[若(18.18)成立, 则 $P(D_x, D_t)$称为强双曲, 或者严格双曲的; 参阅定义 15.3.]

19. 特征. Cauchy-Kovalevska 定理的不变形式

我们已经说过,并非每个线性偏微分方程组,甚至并非每个单个的方程,都能变为(18.1)形式. 我们当然希望了解变成(18.1)可以意味着什么. 显然,这是方程的主部(即它的 m 阶的项)的特性. 我们写,

$$P(x, t, D_x, D_t) = D_t^m - \sum_{\substack{\alpha_0+|\alpha|\leq m\\ \alpha_0<m}} c_{\alpha_0,\alpha}(x, t) D_t^{\alpha_0} D_x^{\alpha},$$

$$P_m(x, t, D_x, D_t) = D_t^m - \sum_{\substack{\alpha_0+|\alpha|=m\\ \alpha_0<m}} c_{\alpha_0,\alpha}(x, t) D_t^{\alpha_0} D_x^{\alpha}.$$

我们只限于纯量的情形, 即系数 $c_{\alpha_0,\alpha}$ 是复值的情形. 方程组的一般情形较难于分析. 我们注意到, 在我们研究方程所处的区域中给定任一点(x, t),我们有

$$P_m(x, t, 0, 1) = 1.$$

更一般地,假定我们研究具有主部

$$P_m(x, t, D_x, D_t) = \sum_{\alpha_0+|\alpha|=m} a_{\alpha_0,\alpha}(x, t) D_t^{\alpha_0} D_x^{\alpha}$$

的微分算子

$$P(x, t, D_x, D_t) = \sum_{\alpha_0+|\alpha|\leq m} a_{\alpha_0,\alpha}(x, t) D_t^{\alpha_0} D_x^{\alpha}.$$

假设其系数是一开集 $\Omega \subset \mathbf{R}^{n+1}$ 中的光滑复值函数. 我们可以"化"方程

(19.1) $$P(x, t, D_x, D_t)u = g$$

为(18.1)形式,若已知

(19.2) $\quad P_m(x,\ t,\ 0,\ 1)\neq 0, \quad (x,\ t)\in\Omega.$

事实上, (19.2)意味着系数 $a_{m,0}$ 在 Ω 的任一点处都不等于零, 因而只需在(18.1)中取

$$c_{\alpha_0,\alpha}=-a_{\alpha_0,\alpha}/a_{m,0}, \quad f=g/a_{m,0}$$

即可. 我们用下述说法来表达条件(19.2), 即, 余向量(0, 1), 或者等价地, t 方向, 在 Ω 的任何点处对于 $P(x,\ t,\ D_x,\ D_t)$ 都不是特征的. 我们在稍微更"不变"的框架中引进特征余向量这一概念. 假定我们考虑的是 Euclid 空间 $\mathbf{R}^N$ 的一个开子集 $\mathscr{O}$, 变量用 y 表示; 我们用 η 表示 $\mathbf{R}^N$ 的对偶空间 $\mathbf{R}_N$ 中的变量. 考虑线性偏微分算子

$$P(y,\ D_y)=\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha(y)D_y^\alpha, \quad D_y=-\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y},$$

其系数是 $\mathscr{O}$ 中的复值 C^∞ 函数(它们是 C^∞ 这一要求显然太苛刻了; 目前, 它们同样也可以仅是连续的). 令

$$P_m(y,\ \eta)=\sum_{|\alpha|=m}a_\alpha(y)\eta^\alpha,$$

其中 η 是 $\mathbf{R}_N$ 中的变量. 注意, $P_m(y,\ \eta)$ 是 η 的 m 次齐次多项式, 它的系数在 $\mathscr{O}$ 中是 η 的 C^∞ 函数.

定义 19.1 $\mathscr{O}\times\mathbf{R}_N$ 上的函数 $P_m(y,\ \eta)$ 称为微分算子 $P(y,\ D_y)$ 的主算符.

自然, 相应于 $P_m(y,\ \eta)$ 的微分算子 $P_m(y,\ D_y)$ 是 $P(y,\ D_y)$ 的主部.

在 $\mathscr{O}$ 中固定 y, 我们考虑作为 η 的函数的 $P_m(y,\ \eta)$ 的零点的集合:

$$C_P(y)=\{\eta\in\mathbf{R}_N;\ P_m(y,\ \eta)=0\}.$$

因为 $P_m(y,\ \eta)$ 关于 η 是(m 次)齐次的, 因而对每个 y, 集合 $C_P(y)$ 是顶点在原点的一个锥.

定义 19.2 集合 $C_P(y)$ 称为 $P(y,\ D_y)$ 在点 $y\in\mathscr{O}$ 处的特征锥. 每个异于零的余向量 $\eta\in C_P(y)$, 关于 $P(y,\ D_y)$, 称为在点 y 处是特征的.

在上面考虑的微分算子 $P(x,\ t,\ D_x,\ D_t)$ 的情形中, 我们看

到，对于任何的$(x, t)\in\Omega$，余向量$(0, 1)$都不属于(x, t)处的特征锥.

现在我们考虑一个C^1超曲面$S\subset\mathscr{O}$. 这是指$\mathscr{O}$的这样的一个子集S，它定义如下：S的每个点y_0有一个开邻域U_0，使得在U_0中存在一个C^1函数$\varphi(y)$，它有下述性质：在U_0中$\mathrm{grad}\,\varphi$处处不等于零；$S\cap U_0$正是使$\varphi(y)=0$的点$y\in U_0$的集合. 我们可以考虑S在任何点$y\in S\cap U_0$处的法方向：它是$\mathbf{R}_N$中通过原点的、由$(\mathrm{grad}\,\varphi)(y)$生成的直线. 属于这条直线的任何非零余向量$\eta$将称为$S$*在点*$y$*处的余法向量*.

定义 19.3　如果超曲面S在点$y\in S$处的任何余法向量η关于$P(y, D_y)$在该点处是特征的，即它属于$C_P(y)$，则$S\in\mathscr{O}$称为关于$P(y, D_y)$在y处是特征的.

自然，若S在y处的某一余法向量η属于$C_P(y)$，则其它余法向量亦然. 一个超曲面S称为是*特征的*，假如在它的每个点处，它是特征的（这个术语多少有点含糊不清，但是一般地是容许的）. 在我们上面的例中，超曲面$\{(x, t)\in\Omega;\ t=常数\}$关于$P(x, t, D_x, D_t)$处处都不是特征的. 而且，如果一个超曲面$S\subset\mathscr{O}$在某个点$y_0$处[关于$P(y, D_y)$]是非特征的，我们就能在$y_0$的一个开邻域$U_0$中选取新坐标$x=(x^1, \cdots, x^n)$，$t$（现在，在这里$n=N-1$），使得$S\cap U_0$恰为点$(x, 0)$的集合. 再者，如果$P(x, t, D_x, D_t)$是算子$P(y, D_y)$在新坐标中的表达式，而$U_0$充分小，则对每个$(x, t)\in U_0$，我们将有$P_m(x, t, 0, 1)\neq 0$. 方程$P(y, D_y)u=g$将能变为(18.1).

例 19.1　$\mathbf{R}^2$上 Cauchy-Riemann 算子$(\partial/\partial x+i\partial/\partial y)/2$的主算符是$(\xi-i\eta)/2$. $\mathbf{R}^n$上 Laplace 算子$\Delta_x=(\partial/\partial x^1)^2+\cdots+(\partial/\partial x^n)^2$的主算符是$-|\xi|^2$. 这些算子中无论哪个都没有任何（非零）特征余向量.

与例 19.1 有关，我们引进下面的重要定义：

定义 19.4　$\mathscr{O}$中的微分算子$P(y, D_y)$称为在点$y_0\in\mathscr{O}$处是*椭圆的*，若$C_P(y_0)=\{0\}$，即若在y_0处不存在特征余向量. 在$\mathscr{O}$的一子

集 $\mathscr{O}_1$ 中算子 $P(y, D_y)$ 称为是椭圆的，若在 $\mathscr{O}_1$ 的每一点处它是椭圆的.

使一个给定的算子是椭圆的那些点所成的集合显然是开的. $\mathbf{R}^2$ 上的 Cauchy-Riemann 算子和 $\mathbf{R}^n$ 上的 Laplace 算子处处是椭圆的.

例 19.2 $\mathbf{R}^{n+1}$ 上热导算子 $\partial/\partial t-\Delta_x$ 的主算符是 $|\xi|^2$. 它(在任何点处)的特征锥是 (ξ, τ) 空间 $\mathbf{R}_{n+1}$ 的一维线性子空间，它由 $\xi=0$ 确定. 对于 Schrödinger 方程(关于特征锥的)相同的事实也成立.

例 19.3 $\mathbf{R}^{n+1}$ 上波动算子 $\partial^2/\partial t^2-\Delta_x$ 的(主)算符是 $|\xi|^2-\tau^2$. 它(在任何一点处)的特征锥是光锥曲面 $|\xi|^2=\tau^2$. 然而要注意，如果代替上述波动算子的形式，我们考虑下面的形式

$$\frac{1}{V^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta_x,$$

这里 $V>0$ 但是不一定 $V=1$，则它的特征锥由方程

$$V^2|\xi|^2=\tau^2 \tag{19.3}$$

确定. 因而，除非 $V=1$，这不是光锥曲面的方程. 我们更愿意把光锥视作 $\mathbf{R}^{n+1}$ 的子集，而不把它认为是对偶空间 $\mathbf{R}_{n+1}$ 的子集(总之，我们要记住，光锥意味着包含波动方程的值得注意的基本解 E_+ 和 E_-——它们是 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的广义函数，而不是 $\mathbf{R}_{n+1}$ 中的广义函数——的支集). 此时，光锥曲面的方程是

$$|x|^2=V^2t^2. \tag{19.4}$$

不难发现(19.3)和(19.4)之间的联系：特征锥[由(19.3)给出]的任一法方向——在特征锥的除顶点以外的每一点处都能确定这样的方向——可认为是 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中通过原点的一条直线；所有这些直线的并集即为光锥曲面[由(19.4)给出].

注意，由 $\xi=0, \tau=1$ 给出的余向量不属于波动算子的特征锥. 这意味着超平面 $t=\text{const}$ 处处不是特征的.

例 19.4 在 $\mathbf{R}^2$ 中考虑一阶算子

$$L=\partial/\partial t-a(x, t)\partial/\partial x,$$

其中 $a(x, t)$ 是实值 C^∞ 函数. L 在点 (x_0, t_0) 处的特征锥是变量 (ξ, τ) 的平面 $\mathbf{R}_2$ 中的直线, 由 $\tau=a(x_0, t_0)\xi$ 确定. 现在考虑 (x, t) 空间中由方程

$$\frac{dx}{dt}=-a(x, t), \quad x|_{t=t_0}=x_0 \tag{19.5}$$

所确定的曲线 $x=x(t)$. 此曲线在点 (x_0, t_0) 处的切方向由 $(-a(x_0, t_0), 1)$ 生成. 因而, 此曲线在 (x_0, t_0) 处的法方向关于 L 就是特征的. 自然, 在曲线的每一点处这都是对的. 这样, 我们得到结论: 由条件(19.5)(可能具有不同的 x_0, t_0)所确定的任何曲线关于 L 是特征的(在它的每一点处; 这里, 我们把 $\mathbf{R}^2$ 中的 C^1 曲线看作为 $\mathbf{R}^2$ 中的超曲面). 反之, 令 γ 是 $\mathbf{R}^2$ 中关于 L 处处是特征的任一 C^1 曲线. 令 (x_0, t_0) 是它的任一点, 并令 $\varphi(x, t)=0$ 是 γ 在 (x_0, t_0) 的一个邻域 U_0 中的方程. 我们知道, $\operatorname{grad}\varphi=(\varphi_x, \varphi_t)$ 在 (x_0, t_0) 附近, 譬如说在 U_0 中, 不等于零, 并且, 在 $U_0\cap\gamma$ 中 $\varphi_t=a\varphi_x$. 特别, 这就要求在 $U_0\cap\gamma$ 的一邻域中 φ_x 不等于零, 我们可以把这个邻域取为 U_0 本身. 在 $U_0\cap\gamma$ 的每一点处, 向量场 $(-\varphi_t/\varphi_x, 1)$ 与其相切, 我们刚才已经看到, 此向量场等于 $(-a, 1)$. 这意味着条件(19.5)在 U_0 中确定了 γ. 这样, L 的每个特征曲线由条件(19.5)(局部地)确定. 我们可以把这按下述方式概括为: L(视作微分算子)的特征曲线与 L(视作向量场)的积分曲线一致.

必须指出, 这个叙述只当自变量的数目等于 2 时才有意义; 否则, "特征曲线"必须用"特征超曲面"代替, 而后者不能与"积分曲线"(对所有维数都有意义的概念)等同. 然而, 有一个补救上面叙述的方法, 不过这需要次特征(bicharacteristic)曲线的概念(参阅本节的附录).

我们用叙述 Cauchy-Kovalevska 定理的不变的提法来结束本节. 在这里, 所谓"不变的"意味着"坐标无关的": 换句话说, 不再存在时间变量或空间变量, 而超平面(例如超平面 $t=0$)不应该有任何特别的作用. 我们考虑 $\mathbf{R}^N$ 的一个开子集 $\mathscr{U}$ 和 $\mathscr{U}$ 中一个 $m(>0)$ 阶的线性偏微分算子 $P(y, D_y)$, 它的系数是 $\mathscr{U}$ 中的解析

函数. 此外, 还给了 $\mathscr{U}$ 中一个解析超曲面 Σ, 关于 $P(y, D_y)$, 它处处不是特征的, 它在每一点处的外法线都是明确定义的.

定理 19.1 令 f 是 $\mathscr{U}$ 中的解析函数, $u_j(0\leqslant j\leqslant m-1)$ 是 Σ 中 m 个解析函数. 则在 $\mathscr{U}$ 中存在 Σ 的一个开邻域 $\mathscr{V}$ 和 $\mathscr{V}$ 中唯一的解析函数 u, 使得

(19.6) $$P(y, D_y)u=f \quad 在 \mathscr{V} 中,$$

(19.7) $$对每个 j=0, \cdots, m-1, \quad (\partial/\partial\nu)^j u=u_j \quad 在 \Sigma 中.$$

这里我们已用 $\partial/\partial\nu$ 表示在 Σ 的外法线方向的偏导数.

证明 只需证明, Σ 的每个点 y_0 有一开邻域 $\mathscr{V}(y_0)$, 在其中存在唯一的解析函数 $u(y; y_0)$, 它在 $\mathscr{V}(y_0)$ 中满足 $P(y, D_y)u=0$ 和在 $\mathscr{V}(y_0)\cap\Sigma$ 中满足 $(\partial/\partial\nu)^j u=u_j(0\leqslant j<m)$. 事实上, 如果 $\mathscr{V}(y_0)\cap\mathscr{V}(y_1)\neq\emptyset$, 由唯一性, 在这个交集中我们应该有 $u(y; y_0)=u(y; y_1)$, 因而在所有 $\mathscr{V}(y_0)$ $(y_0\in\Sigma)$ 的并集 $\mathscr{V}$ 中存在一个解析函数 u, 它在每个 $\mathscr{V}(y_0)$ 上的限制等于 $u(y; y_0)$.

如果邻域 $\mathscr{V}(y_0)$ 充分地小, 那么我们可以施行变量变换把超曲面 $\Sigma\cap\mathscr{V}(y_0)$"拉平": 在新坐标中——用 $x^1, \cdots, x^n, t(n=N-1)$ 表示——超曲面片变为超平面 $t=0$ 的一片. 正如在本节开始时所指出的, Σ 处处不是特征的这一事实蕴涵着 $P(y, D_y)$ 在新坐标中的表达式具有下述形式:

$$a(x, t)D_t^m+\sum_{j=1}^{m}Q_j(x, t, D_x)D_t^{m-j},$$

其中 $a(x, t)$ 和 $Q_j(x, t, D_x)$ 的系数是 $\mathscr{V}(y_0)$ 中的解析函数, $a(x, t)$ 在 $\mathscr{V}(y_0)$ 的每一点处都不等于零, 而 $Q_j(x, t, \xi)$ 关于 ξ 的次数不大于 j. 在除以 $a(x, t)$ 之后, 可以把我们的方程变为(17.3)型的一阶组, 而 Cauchy 条件变为(17.4)型的条件. 在把系数和数据延拓到复域后, 我们可以应用定理 17.1(更确切地说, 是应用定理 17.1 的这样的说法: 其中假定了系数和数据关于 t 是全纯的;—参阅 § 17 之末). 我们容易得到所希望的结论, 即我们的局部 Cauchy 问题有唯一解析解. 证毕.

注 19.1 我们可以把定理 19.1 称为 Cauchy-Kovalevska

定理的"实解析"的叙述. Cauchy-Kovalevska 定理还有一种"全纯的"说法,在某种意义上,与实解析说法相比较,我们宁可采取全纯的说法. 在全纯的说法中,我们必须假定 $\mathscr{U}$ 是 $\mathbf{C}^n$ 的一个开子集,Σ 是 $\mathscr{U}$ 的余维数为 1 的一个解析子流形:这意味着 Σ 的每个点 z_0 有一个开邻域 U_0,在那里确定了一个全纯函数 $\varphi_0(z)$,使得 $\Sigma \cap U_0$ 恰为 U_0 中满足方程 $\varphi_0(z)=0$ 的点 z 的集合,并使得 $\operatorname{grad}\varphi_0$ 在 U_0 的任一点处都不等于零. 我们考虑一个 m 阶的微分算子 $P(z, \partial/\partial z)$,它的系数在 $\mathscr{U}$ 中是全纯的. 假设 Σ 关于 $P(z, \partial/\partial z)$ 处处不是特征的,这意味着,在任何一个如同上面所叙述的邻域 U_0 中,

$$P_m(z, \operatorname{grad}\varphi_0(z)) \neq 0, \quad 若 z \in U_0,$$

其中 φ_0 是在上面确定 $U_0 \cap \Sigma$ 的一个全纯函数.

我们还假定,在 Σ 的一个开邻域 $\mathscr{U}'(\subset \mathscr{U})$ 中给出了一个全纯向量场 $\partial/\partial\nu$,在 Σ 的每一点处它都是 Σ 的法向,即是线性组合

$$\frac{\partial}{\partial\nu} = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j(z)\frac{\partial}{\partial z^j},$$

系数 γ_j 是 $\mathscr{U}'$ 中的全纯函数. 并且,在 $U_0 \cap \Sigma$ 上,这里 U_0 是上面考虑的 z_0 的邻域,我们有

$$\gamma_j(z) = \lambda(z)\frac{\partial\varphi_0}{\partial z^j}(z), \qquad j=1, \cdots, n,$$

其中 λ 是一全纯函数,在 $U_0 \cap \Sigma$ 中处处不等于零(λ 不依赖于 j). 于是我们可以叙述

定理 19.2 在 $\mathscr{U}$ 中存在 Σ 的一个开邻域 $\mathscr{V}$,使得对 $\mathscr{U}$ 中每个全纯函数 f 和对 Σ 上 m 个全纯函数 $u_0, \cdots, u_{m-1}$ 的每个集合,在 $\mathscr{V}$ 中存在唯一的全纯函数 u,使得

$$P\left(z, \frac{\partial}{\partial z}\right)u = f \quad 在 \mathscr{V} 中, \tag{19.8}$$

$$对每个 j=0, \cdots, m-1, \qquad (\partial/\partial\nu)^j u = u_j \quad 在 \Sigma 中. \tag{19.9}$$

定理 19.2 不仅(显然地)蕴涵着定理 19.1,而且也使它更明确了:事实上,定理 19.1 的缺陷是在其叙述中 Σ 的邻域 $\mathscr{V}$ 不仅依赖于超曲面 Σ 和算子 $P(y, D_y)$,而且也依赖于数据 f, u_j. 定

理 19.2 不是这样的! 从而, 定理 19.2 使我们能够说明定理 19.1 中 $\mathscr{V}$ 的选择依赖于数据 f, u_j 的什么性质. 它依赖于复空间的这样一些子集的"大小", 对这些子集, 这些数据可全纯地延拓到其上.

附录 次特征和特征方程的积分

在这个附录中我们考虑 m 阶线性偏微分算子 $P(y, D_y)$, 它的系数在 $\mathbf{R}^N$ 的一开子集 $\mathscr{O}$ 中被定义并为 C^∞. 假设其主算符 $P_m(y, \eta)$ 是实的. 我们把这个主算符与下述 $2N$ 个方程的方程组联系起来:

(19.10) $$\frac{dy}{dt}=\operatorname{grad}_\eta P_m(y, \eta), \quad \frac{d\eta}{dt}=-\operatorname{grad}_y P_m(y, \eta),$$

对此方程组我们给以"初始"条件:

(19.11) $$y=y_0, \quad \eta=\eta^0, \quad \text{当 } t=0 \text{ 时.}$$

这里 y_0 是 $\mathscr{O}$ 的任意一点, η^0 是 $\mathbf{R}_N\backslash\{0\}$ 的任意一点. 由常微分方程的基本定理, 至少对于小的 $|t|$ 值, 问题 (19.10)—(19.11) 有唯一解. 此解

(19.12) $$y=f(y_0, \eta^0, t), \quad \eta=g(y_0, \eta^0, t)$$

关于其所有变元是光滑的; 对于充分接近于零的固定的 t, 在 $\mathscr{O}\times(\mathbf{R}_N\backslash\{0\})$ 的充分小的子集中, 它确定了一个 C^∞ 微分同胚 (diffeomorphism) $(y_0, \eta^0)\mapsto(y, \eta)$.

方程 (19.10)—(19.11) 通称为 P_m 的 *Hamilton-Jacobi* 方程. 如果 P_m 的 (总) 梯度在 (y_0, η^0) 的一个整邻域中不等于零, 则由 (19.12) 给出的解 (y, η) 描绘出一条通过 (y_0, η^0) 的真正的曲线. 沿着这条曲线的切微商由 P_m 的 *Hamilton* 场

(19.13) $$H_{P_m}=\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial P_m}{\partial\eta_j}\frac{\partial}{\partial y^j}-\frac{\partial P_m}{\partial y^j}\frac{\partial}{\partial\eta_j}\right)$$

给出. 这是 $\mathscr{O}\times\mathbf{R}_N$ 上的一个向量场, 必须指出, 即使 (19.10)—(19.11) 的解不是一条曲线 (即, 是单个一点), 或对于那样的情形, 即当 P_m 是复的时候 (此时根本不应该有任何解) 此向量场也是明

确定义的. H_{P_m} 的积分曲线显然是这样的曲线, 在此曲线上, 函数 P_m 保持常数值, 因为 $H_{P_m}P_m=0$. 因而, H_{P_m} 的任何一条积分曲线如果与 $P(y, D_y)$ 的特征集合, 即集合

(19.14) $$\{(y, \eta)\in\mathscr{O}\times(\mathbf{R}_N\backslash\{0\});\ P_m(y, \eta)=0\},$$

相交, 则它整个地包含于这个集合中. H_{P_m} 的包含于(19.14)中的这样的积分曲线称为 P_m 的*次特征带*; 它在 y 空间的投影, 即在 $\mathscr{O}$ 中的投影, 称为*次特征曲线*(或者简单地称为次特征). 自然它可以退缩为一点. 当 $\text{grad}_\eta P_m$ 在 $\mathscr{O}$ 上不等于零时, 它在 $\mathscr{O}$ 中是一条真正的曲线.

上面的概念在偏微分方程理论的各个方面都是重要的, 特别是关于在 y_0 的某个开邻域 U 中解*特征方程*

(19.15) $$P_m(y, \text{grad}\, w)=0.$$

通常, 我们要找一个在 U 中定义并为 C^∞ 的实值解 w, 还满足条件

(19.16) $$\text{grad}\, w|_{y=y_0}=\eta^0.$$

为了使(19.15)和(19.16)是相容的, 我们必须有

(19.17) $$P_m(y_0, \eta^0)=0,$$

换句话说, (y_0, η^0) 必须属于特征集合(19.14)

(19.15)—(19.16)的(光滑)解 w 不是总能找到的. 我们将证明, 在某些顺利的情况下, 能找到光滑解. 我们作下述假定:

(19.18) $$(\text{grad}_\eta P_m)(y_0, \eta^0)\neq 0.$$

再令 θ 是($\mathbf{R}^N$ 中)不正交于 $\text{grad}_\eta P_m(y_0, \eta^0)$ 的一向量. 我们可以这样地在 $\mathbf{R}^N$ 中选取坐标, 使 θ 变为 y^N 轴的单位向量. 这立刻就得到

(19.19)　在 (y_0, η^0) 的某个邻域 $\mathscr{N}$ 中 $\dfrac{\partial P_m}{\partial \eta_N}$ 不等于零.

因而, 如果 $\mathscr{N}$ 足够小, 则可以应用隐函数定理, 并写出

(19.20)
$$P_m(y, \eta)=Q(y, \eta)[\eta_N-\lambda(y, \eta_1, \cdots, \eta_{N-1})]\quad 在\ \mathscr{N}\ 中.$$

Q 和 λ 都是 $\mathscr{N}$ 中的 C^∞ 函数, 并且, 在 $\mathscr{N}$ 的任何点处 Q 不等于零. 因而, 方程

(19.21) $$\eta_N=\lambda(y,\ \eta_1,\ \cdots,\ \eta_{N-1})$$

就在 $\mathcal{N}$ 中确定了特征集合(19.14). 在这个集合上[它是 $\mathcal{O}\times(\mathbf{R}_N\backslash\{0\})$ 中超曲面的一片], P_m 的 Hamilton 向量场等于因子 $\eta_N-\lambda(y,\ \eta_1,\ \cdots,\ \eta_{N-1})$ 的 Hamilton 向量场乘以 Q; 因而它的积分曲线, 即 P_m 的次特征带, 可由因子 $\eta_N-\lambda(y,\ \eta_1,\ \cdots,\ \eta_{N-1})$ 的 Hamilton-Jacobi 方程确定; 这就是[1)]

(19.22) $$\frac{dy^j}{dt}=-\frac{\partial\lambda}{\partial\eta_j},\quad j=1,\ \cdots,\ N-1;\quad \frac{dy^N}{dt}=1;$$

(19.23) $$\frac{d\eta_j}{dt}=\frac{\partial\lambda}{\partial y^j},\quad j=1,\ \cdots,\ N.$$

对于这些方程, 可以作若干注记: 首先, (19.22) 中的最后一个方程指出, 我们可以把变量 y^N 取作沿着次特征带的参数. 第二, 所有右端的函数与 η_N 无关(η_N 必由(19.21)给出), 因为次特征带整个地位于由(19.21)所确定的超曲面上——正如我们在前面已经看到的那样. 因而, 改变一下记号, 用 t 代替 y^N 将是方便的; 并且, 当 $j<N$ 时我们还将用 x^j 代替 y^j, 用 ξ_j 代替 η_j. 事实上, 为了进一步强调与空间 $\mathbf{R}^N$ 分解为一个空间超平面(那里 x 是变元)和一个时间轴(那里 t 是变元)这样的分解的类似性, 我们将记 $n=N-1$. 在新记号下, 方程组(19.22)—(19.23)成为

(19.24) $$\frac{dx}{dt}=-\lambda_\xi(x,\ t,\ \xi),\qquad \frac{d\xi}{dt}=\lambda_x(x,\ t,\ \xi),$$

其中下标意味着微商. 通过在 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中选取坐标 $(x,\ t)$, 使得在点 y_0 处有 $t=0$, 并在对偶空间 $\mathbf{R}_{n+1}$ 中选取坐标, 使得在点 η^0 处有 $\tau=0$(τ 是相应于 t 的"余变量"; 在新坐标中, η^0 将由 $(\xi^0,\ 0)$ 表示; 我们不能有 $\xi^0=0$, 因为我们绝没有 $\eta^0=0$), 这样就可以进一步简化图象. 如果解出

(19.25) $$w_t=\lambda(x,\ t,\ w_x),\qquad w_x|_{t=0}=\xi^0,$$

则得到(19.15)—(19.16)的一个解.

---

1) 译者注: 原文将(19.22), (19.23)的左端 $\frac{dy^j}{dt}$, $\frac{dy^N}{dt}$ 和 $\frac{d\eta_j}{dt}$ 误为 $\frac{\partial y^j}{\partial t}$, $\frac{\partial y^N}{\partial t}$ 和 $\frac{\partial\eta_j}{\partial t}$.

定理 19.3 如果主算符 $P_m(y, \eta)$ 是实的，并且如果(19.17)和(19.18)成立，则问题(19.15)—(19.16)在 y_0 的一个充分小的邻域中有光滑解.

这解不可能是唯一的(除非 $N=1$，并且，此时即使有唯一性，也只能在相差一个常数的意义上来理解)，因为(19.25)(它是我们准备解的问题)的每一个解都是(19.15)—(19.16)的解，并且可以用另外的方式选取时间方向 t. 还注意，在(19.25)中的"初始"条件可被不同地选取，例如，

$$w_x|_{t=0}=\xi^0+O(|x-x_0|^2).$$

证明 此证明基于下述考察. 令

$$x=F(x_1, t, \xi^1), \quad \xi=G(x_1, t, \xi^1) \tag{19.26}$$

表示(19.24)的解，它当 $t=0$ 时等于 (x_1, ξ^1). 我们来考察 $w_x(x, t)$ 对于 P_m 的次特征的限制，也就是对于由下述方式得到的次特征的限制：把由(19.26)所确定的曲线投影到 x 空间. 在 (x, t) 空间中(即在 $\mathscr{O}$ 中)，这条次特征通过点 $x=x_1$, $t=0$. 记

$$\theta(t)=w_x(F(x_1, t, \xi^1), t).$$

则有

$$\frac{d\theta}{dt}=w_{xx}F_t+w_{xt}=w_{xx}F_t+\lambda_x(x, t, \theta)+\lambda_\xi(x, t, \theta)w_{xx}$$

$$=\lambda_x(x, t, \theta)+w_{xx}\{\lambda_\xi(x, t, \theta)-\lambda_\xi(x, t, G)\}.$$

由(19.24)的第二个方程，我们注意到，当 $\theta(t)=G(x_1, t, \xi^1)$ 时它被满足. 但是因为 $\theta(0)=\xi^0$，我们必须有 $\xi^1=\xi^0$. 这样

$$w_x(F(x_1, t, \xi^0), t)=G(x_1, t, \xi^0). \tag{19.27}$$

很容易从(19.27)就得到我们问题的解. 我们对 $w_x(x, t)$ 有兴趣，因而必须从 $x=F(x_1, t, \xi^0)$ 来得到 x_1 的表达式：$x_1=x_1(x, t, \xi^0)$，所以

$$w_x(x, t)=G(x_1(x, t, \xi^0), t, \xi^0). \tag{19.28}$$

如果把此式代入(19.25)，就得到

$$w(x, t)=\langle x, \xi^0\rangle+\int_0^t\lambda(x, s, G(x_1(x, s, \xi^0), s, \xi^0))ds. \tag{19.29}$$

为了验证(19.29)确实确定(19.25)的一个解,只需证明(19.28)成立,为此,只需证明

$$\frac{d}{dt}\{w_x(x, t)-G(x_1(x, t, \xi^0), t, \xi^0)\}$$

$$=\lambda_x(x, t, G(x_1, t, \xi^0))+\lambda_\xi(x, t, G(x_1, t, \xi^0))G_{x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x}$$

$$-G_t(x_1, t, \xi^0)-G_{x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t}$$

$$=G_{x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x}\left\{\lambda_\xi(x, t, G)-\frac{\partial x}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t}\right\}$$

等于零,而这从 $F(x_1(x, t, \xi^0), t, \xi^0)=x$ 这一事实即得,也就是从

$$0=F_t(x_1, t, \xi^0)+F_{x_1}(x_1, t, \xi^0)\frac{\partial x_1}{\partial t}$$

$$=-\lambda_\xi(F, t, G)+\frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t}$$

即得. 证毕.

在假设(19.18)之下,如果在 y_0 的一个开邻域 U 中,w 是(19.15)—(19.16)的一解,则视作 $U\times\mathbf{R}_N$ 中一点的 $(y, \operatorname{grad} w(y))$ 就在一光滑超曲面——P_m 的特征集合(19.14)——上变动. 这个集合被 Hamilton 场 H_{P_m}, (19.13)的积分曲线纤维化了. 当 y 沿着 P_m 的包含于 U 中的一条次特征线变动时,$(y, \operatorname{grad} w(y))$ 就沿着 P_m 的包含于 $U\times\mathbf{R}_N$ 中的一条次特征带变动.

习　　题

19.1 考虑 $\mathbf{R}^N(N\geqslant 2)$中的算子

$$\left(\frac{\partial}{\partial y^N}\right)^2-V^2\sum_{j=1}^{N-1}\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)^2, \quad V\neq 0. \tag{19.30}$$

描述它的特征集合[参阅(19.14)],它的次特征带和它的通过 $\mathbf{R}^N$ 中原点的次特征(参阅本节的附录).

19.2 考虑 $\mathbf{R}^N$ 中的一阶算子

$$L=\sum_{j=1}^{N}\alpha^j(y)\frac{\partial}{\partial y^j},$$

它有在 $\mathbf{R}^N$ 的开子集 $\mathcal{O}$ 中定义并为 C^∞ 的实系数 α^j,并假设

(19.31) $$\sum_{j=1}^{N}|a^j(y)|\neq 0, \quad \forall y\in\mathcal{O}.$$

证明向量场 L 的积分曲线和 L 的次特征是一致的. 在 $P_m(y, D_y)=-\sqrt{-1}\,L$ 的情形重新完成定理19.3的证明,并指出与习题16.1类似的结果.

19.3 假设(在 $\mathbf{R}^N$ 的某个开子集 $\mathcal{O}$ 中)主算符 $P_m(y, \eta)$ 有解析系数,并可把它延拓为 $\tilde{\mathcal{O}}\times\mathbf{C}_N$ 中 (y, η) 的全纯函数, 这里 $\tilde{\mathcal{O}}$ 是 $\mathcal{O}$ 在 $\mathbf{C}_N$ 中的一个开邻域. 证明,可以在复的意义下积分特征方程(19.15),即可以找到一个在 $y_0\in\tilde{\mathcal{O}}$ 的(复)邻域中全纯的、满足(19.16)的解 w, 这里 η^0 是任一非零的复 N 向量——如果我们作了假设(19.18).

描述 N 个变元的 Laplace 算子的复特征集合和它的复次特征. 当 $P_m(y, \eta)=-|\eta|^2$ 和 η^0 是 $\mathbf{C}_N\backslash\{0\}$ 的一个元素(取 $y_0=0$)时解(19.15)—(19.16).

19.4 假设主算符 P_m 有常系数, 此时记 $P_m=P_m(\eta)$. 在假定(19.18)下,证明(19.20)中的 Q 和 λ 可以与 y 无关地被选取. 在这个情形,先直接地解问题(19.25), 然后再如定理19.3的证明,一步一步地解(19.25).

19.5 令 S 是 $\mathbf{R}^N$ 中通过原点的一个 C^∞ 超曲面,并且关于算子(19.30),在原点处 S 是特征的(定义19.3). 令 Γ_0 表示这个算子的通过 $(0, \eta^0)$ 的次特征带, 其中 η^0 是 S 在0处的余法向量. 证明, 相应的次特征(即次特征带 Γ_0 在 $\mathbf{R}^N$ 中的投影)必定与 S 在原点相切.

给出一个这样的超曲面 S 的例子, 它与(19.30)的多于一条的次特征在原点相切.

19.6 考虑下述 $\mathbf{C}^2$ 中的算子:

(19.32) $$L=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z^1}+\sqrt{-1}\,\frac{\partial}{\partial z^2}\right).$$

描述齐次方程

(19.33) $$Lh=0$$

的所有的解 $h=h(z^1, z^2)$, 这些解在多圆柱

(19.34) $$\{(z^1, z^2)\in\mathbf{C}^2;\ |z^1|<r_1,\ |z^2|<r_2\}, \qquad r_1, r_2>0$$

中是全纯的. 如果 $h(z^1, z^2)$ 是这样一个解, 证明 $h_0(z^1)=h(z^1, 0)$ 可被延拓为圆盘

(19.35) $$\{z^1\in\mathbf{C}^1;\ |z^1|<r_1+r_2\}$$

中的全纯函数. 由此推得,(19.33)的具有 Cauchy 条件

(19.36) $$h=h_0(z^1) \quad 当\ |z^1|<r_1,\ z^2=0\ 时$$

的 Cauchy 问题在(19.34)中一般地是没有全纯解的.

描述可把在多圆柱(19.34)中定义和全纯的、(19.33)的所有解全纯地延拓到其中的最大的集合.

19.7 令 $P(D_y)$表示微分算子(19.30), 并考虑 Cauchy 问题

$$P(D_y)h=0, \tag{19.37}$$

$$h(y',0)=h_0(y'),\quad \frac{\partial h}{\partial y^N}(y',0)=h_1(y'),\quad y'=(y^1,\cdots,y^{N-1}). \tag{19.38}$$

令 B' 是 $\mathbf{R}^{N-1}$ 中的单位开球. 描述可把(19.37)—(19.38)的解 h 延拓到其中为 C^∞ 函数——无论 Cauchy 数据 h_0, h_1 为 $C^\infty(B')$中的什么元素——的 $\mathbf{R}^N$ 的最大的开子集 S. S 与 $P(D_y)$的次特征的关系是什么?

19.8 令 $P(y, D_y)$是 $m(\geqslant 0)$阶线性偏微分算子, 其系数在 $\mathbf{R}^N$ 的一开子集 $\mathcal{O}$ 中定义并为 C^∞. 令 $P_m(y,\eta)$是它的主算符. 令 $y\mapsto y'=\phi(y)$是从 $\mathcal{O}$ 到 $\mathbf{R}^N$ 的另一开子集 $\mathcal{O}'$ 上的一个 C^∞ 映射, 它是双满的(bijective)(即, 为映上的,一对一的——译者注), 并且, 它的 Jacobi 行列式在 O 的每一点处都不为零. 用公式

$$P^\phi(y',D_{y'})u(y')=[P(y,D_y)u(\phi(y))]_{y=\phi^{-1}(y')},\quad u\in C^\infty(\mathcal{O}') \tag{19.39}$$

定义 $P(y, D_y)$的变形 $P^\phi(y', D_{y'})$. 证明, $P^\phi(y', D_{y'})$是 m 阶线性偏微分算子, 其系数在 $\mathcal{O}'$ 中定义并为 C^∞, 它的主算符与 $P(y, D_y)$的主算符由公式

$$P^\phi_m(y',\eta')=P_m(\overset{-1}{\phi}(y'),\ {}^tJ_\phi(y')\eta'),\quad y'\in\mathcal{O}',\ \eta'\in\mathbf{R}_N \tag{19.40}$$

所联系, 其中 ${}^tJ_\phi(y')$是 ϕ 的在点 $\overset{-1}{\phi}(y')$处计算的 Jacobi 矩阵的转置.

19.9 在下述情形应用公式(19.40): 其中 $\mathcal{O}=\mathcal{O}'=\mathbf{R}^2$, 微分同胚 ϕ 用坐标变换

$$y=x,\quad s=t+\frac{1}{2}x^2 \tag{19.41}$$

表示, 所研究的算子是 $P=\partial^2/\partial x^2-\partial/\partial t$. 给出变换后的算子 P^ϕ 的整体表达式, 并由此推得低阶项不是“不变的”[而在根据规则(19.40)变换的意义下, 主算符是不变的].

20. Holmgren 定理的抽象叙述

在这一节中我们研究从抽象 Cauchy–Kovalevska 定理(定理 17.2)的对偶形式得到的某些唯一性结果, 并且准备用它(在 § 21 中)来推得 Holmgren 定理.

我们考虑在 § 17 中出现的 Banach 空间族 $\{E_s\}$ $(0\leqslant s\leqslant 1)$; 它

们满足条件(17.18). 我们给出一个满足(17.19)和(17.20)的算子 $A(t)$, 但现在添加下述假设:

(20.1) 如果 $0\leqslant s'<s\leqslant 1$, 则 E_s 在 $E_{s'}$ 中稠.

它蕴涵着从 E_s 到 $E_{s'}$ 中的自然内射映射的转置是从 $E_{s'}$ 的对偶空间 $E'_{s'}$ 到 E_s 的对偶空间 E'_s 中的一个内射的连续线性映射. 我们把后面的映射叫做从 $E'_{s'}$ 到 E'_s 中的自然内射. 因为转置保持算子的范数, 所以这个内射映射有范数$\leqslant 1$. 事实上, 令

$$F_s=(E_{1-s})', \quad 0\leqslant s\leqslant 1,$$

则我们看到, Banach 空间 F_s 形成一个与族 $\{E_s\}$ 类似的族.

令 ${}^tA(t)$ 表示算子 $A(t)$ 的转置; 我们立刻看到, 如果用 F_s 代替 E_s(对每个 s), 并用 ${}^tA(t)$ 代替 $A(t)$ (对每个 t), 则性质(17.19)和(17.20)有效. 这意味着, 作了这些代替后, 定理 17.2 是对的. 因为我们将要用唯一性的结论, 让我们来强调其唯一性部分.

引理 20.1 假设(17.18), (17.19)和(17.20)成立. 还假设(17.21)成立.

令 $v(t)$ 是 $t(|t|<T)$ 的一个 C^1 函数, 对于某个 $s>0$ 它取值于 E'_s 中, 且当 $|t|<T$ 时它满足齐次方程

(20.2) $$\frac{dv}{dt}={}^tA(t)v.$$

若 $v(0)=0$, 则函数 v 在区间 $]-T, T[$ 中恒等于零.

我们要考察一下(20.2)的广义函数解(这就是说, 它是变量 t 的广义函数: 这里不包含其它变量; 关于取值于 Banach 空间中的广义函数的问题, 建议读者看 § 39, 虽然在这里只需要——并提供了——最基本的事实). 为此我们必须加强算子 ${}^tA(t)$ 的光滑性要求, 也就是加强 $A(t)$ 的光滑性要求. 有时要用下述引理, 我们把其证明留给读者:

引理 20.2 假设下述事实成立:

(20.3) 若 $0\leqslant s'<s\leqslant 1$ 时, $A(t)$ 是 $t(|t|<T)$ 的 C^∞ 函数, 取值于有界线性算子 $E_s\to E_{s'}$ 的 Banach 空间中.

则其转置 ${}^tA(t)$ 也具有类似的性质:

(20.4) 当 $0\leqslant s'<s\leqslant 1$ 时, ${}^tA(t)$ 是 $t(|t|<T)$ 的 C^∞ 函数, 取值于有界线性算子 $E'_{s'}\to E'_s$ 的 Banach 空间中.

事实上, 当我们用 $C^m(m<+\infty)$ 或用解析的(或用全纯的, 当 t 是复变量时)来代替 C^∞ 时, 上述引理依然正确.

此后, 我们假设(20.4)成立.

注意, E'_0 是对偶空间 E'_s 之最小者(它有最大的范数).

如果 v 是区间 $]-T,T[$ 中的一个广义函数, 它取值于 E'_0 中, 则 ${}^tA(t)v$ 是同一区间中的广义函数, 对于任何的 $s>0$ 它取值于 E'_s 中. 我们将对这样的广义函数感兴趣: 它可写为下述形式

$$v=\partial_t^k g,\quad \partial_t=\frac{d}{dt},\tag{20.5}$$

其中 g 是 $t(|t|<T)$ 的一个连续函数, 取值于 E'_0 中, 并当 $t<0$ 时它等于零. 在这个简单的情形中, 确定乘积 ${}^tA(t)v$ 是特别地容易的(虽然在一般情形中这也是非常容易的; 参阅 § 39.4): 事实上, 由 Leibniz 公式, 我们有[1]

$${}^tA(t)\partial_t^k g=\sum_{l=0}^{k}(-1)^{k-l}\binom{k}{l}\partial_t^l\{[\partial_t^{k-l}({}^tA)]g\}.\tag{20.6}$$

因为 ${}^tA$ 满足(20.4), 因此[2], $g_l=(-1)^{k-l}\binom{k}{l}[\partial_t^{k-l}({}^tA)]g$ 是 $t(|t|<T)$ 的连续函数, 取值于 E'_s 中(对于某个 $s>0$).

我们将利用下述正规性结果:

引理 20.3 假设(17.18), (20.3)和(17.20)成立, 并且(20.1)也成立. 令 v 是由(20.5)给出的广义函数.

如果 $v_t-{}^tA(t)v$ 是 $t(|t|<T)$ 的一个 C^∞ 函数, 取值于 E'_0, 那么 v 本身也是 $t(|t|<T)$ 的 C^∞ 函数, 对于任何 $s>0$, 它取值于 E'_s 中.

---

1) 译者注: 原文将(20.6)的右端误为 $\sum_{l=0}^{k}(-1)^l\partial_t^l[A^{(k-l)}(t)g]$.

2) 译者注: 原文误为 $g_l=(-1)^l[\partial_t^{k-l}({}^tA)]g$.

证明　由(20.6)，我们有

$$f=v_t-{}^tA(t)v=\partial_t^{k+1}g-\sum_{l=0}^{k}\partial_t^l g_l.$$

但是我们可以写

$$g_l=\partial_t^{k-l+1}h_l,\qquad f=\partial_t^{k+1}f_1,$$

其中 $h_l(0\leqslant l\leqslant k)$ 和 f_1 当 $t<0$ 时等于零(这唯一确定了它们)．而且注意，f_1 是 $t(|t|<T)$ 的 C^∞ 函数，取值于 E_0' 中，并且，如果 g 是 $t(|t|<T)$ 的 C^μ 函数，取值于每个 E_s' 中，$s>0$，则 $h=\sum_{l=0}^{k}h_l$ 是一个属于 $C^{\mu+1}$ 的这样的函数(回忆 g_l 的定义)．我们有

$$\partial_t^{k+1}(g-h-f_1)=0,$$

这意味着 $g-h-f_1$ 是一个次数 $\leqslant k$ 的多项式(取值于 E_s' 中)．但是因为当 $t<0$ 时它必须恒等于零，就有

$$g=h+f_1.$$

我们知道 g 是 C^0 的(取值于 E_s' 中，$s>0$)，因而 h 是 C^1 的，因而 g 是 C^1 的，因而 h 是 C^2 的，等等．这样，我们就得到了结论：g 是取值于 $E_s'(s>0)$ 中的、$t(|t|<T)$ 的 C^∞ 函数；引理 20.3 得证．

推论 20.1　用如同引理 20.3 中的同样假定，令 v 由(20.5)给出．如果在 $]-T, T[$ 中 $v_t={}^tA(t)v$，则在同一区间中有 $v\equiv0$．

证明　由引理 20.3 我们知道 v 是 $t(|t|<T)$ 的一个 C^∞ 函数，对于任何 $s>0$ 它取值于 E_s' 中．则由引理 20.1，可以得到 $v\equiv0$．

证毕．

现在来描述下述情形，我们将把上述考察应用于其中．

在 $\mathbf{C}^n$ 中，我们引进多圆柱 $\mathscr{O}_s(0\leqslant s\leqslant1)$ 的单参数族：

$$\mathscr{O}_s=\{z\in\mathbf{C}^n;\ |z^j|<r_0+sd_0,\ j=1,\cdots,n\}\quad(r_0,\ d_0>0).$$

注意，

(20.7)　如果 $0\leqslant s'<s\leqslant1$，则 $\mathscr{O}_{s'}\subset\mathscr{O}_s$ 且 $\operatorname{dist}(\mathscr{O}_{s'},\ \partial\mathscr{O}_s)=d_0(s-s')$．

我们将选取

(20.8)　　$E_s=H(\overline{\mathscr{O}}_s;\ \mathbf{C}^m)$　(参阅定义 17.1)．

引理 20.4　在具有选择(20.8)时，条件(20.1)成立．

证明 如果我们一个分量一个分量地论证，则只需证明当 $s'<s$ 时，$H(\overline{\mathscr{O}}_s)$ 在 $H(\overline{\mathscr{O}}_{s'})$ 中稠即可．令 h 是 $H(\overline{\mathscr{O}}_{s'})$ 中的一个任意元素，并令 $h_\delta(z)=h[(1-\delta)z]$，$0<\delta<1$．因为 h 在 $\overline{\mathscr{O}}_{s'}$ 中一致连续，因而当 $\delta\to+0$ 时 h_δ 在 $\overline{\mathscr{O}}_{s'}$ 上一致收敛于 h．但是 h_δ 可延拓到 $(1+\delta)\overline{\mathscr{O}}_{s'}$ 上成为在此多圆柱内部全纯的连续函数．h_δ 的 Taylor 展式在这个多圆柱的内部的每一紧子集上，特别在 $\overline{\mathscr{O}}_{s'}$ 上一致收敛于 h_δ．通过对角线法，我们得到了 z 的一个多项式序列，在 $H(\overline{\mathscr{O}}_{s'})$ 中收敛于 h． 证毕．

我们将对(20.5)型的这样的广义函数 v 感兴趣：它由关于 (x, t) 的广义函数定义，其支集在 x 空间的投影包含于 $\mathscr{O}_0\cap\mathbf{R}^n$ 的一固定的紧子集 K 中．如何来作出这个定义呢？

通过尽可能地减小 T，我们可只限于考虑广义函数

$$u=\sum_{\alpha_0+|\alpha|\leqslant k}\partial_t^{\alpha_0}D_x^\alpha f_{\alpha_0,\alpha}(x, t),$$

其中 $f_{\alpha_0,\alpha}$ 是 (x, t) 的取值于 $\mathbf{C}^m$ 中的连续函数(k 是一不小于零的整数)．我们假设，当 $x\notin K\subset\subset\mathscr{O}_0\cap\mathbf{R}^n$ 时 u 恒等于零．这时可以选取当 $x\notin K'$ 时等于零的函数 $f_{\alpha_0,\alpha}$，其中 K' 是 K 的包含于 $\mathscr{O}_0\cap\mathbf{R}^n$ 中的一个任意的紧邻域．令

$$g_{\alpha_0}(x, t)=\sum_{|\alpha|\leqslant k-\alpha_0}D_x^\alpha f_{\alpha_0,\alpha}(x, t).$$

这个广义函数 g_{α_0} 定义 $t(|t|<T)$ 的一个连续函数，取值于 $H(\overline{\mathscr{O}}_0; \mathbf{C}^m)$ 的对偶空间中，由下式给出：

$$h\mapsto\sum_{|\alpha|\leqslant k-\alpha_0}(-1)^{|\alpha|}\int f_{\alpha_0,\alpha}(x, t)D_x^\alpha h(x)dx. \tag{20.9}$$

这是有意义的，因为其中的积分可被局限于 $\mathscr{O}_0\cap\mathbf{R}^n$ 的紧子集 K' 上．用 $G_{\alpha_0}(t)$ 表示线性泛函(20.9)．由 Cauchy 不等式，我们有

$$\sup_{x\in K'}|D_x^\alpha h(x)|\leqslant\alpha!d^{-|\alpha|}\sup_{z\in\overline{\mathscr{O}}_0}|h(z)|,$$

其中 $d=\mathrm{dist}(K', \partial\mathscr{O}_0)$．这指明(20.9)在 $H(\overline{\mathscr{O}}_0; \mathbf{C}^m)$ 上是连续的．而且，

$$|\langle G_{\alpha_0}(t)-G_{\alpha_0}(t'), h\rangle|$$
$$\leqslant\left\{\sum_{|\alpha|\leqslant k-\alpha_0}\alpha!d^{-|\alpha|}\int|f_{\alpha_0,\alpha}(x, t)-f_{\alpha_0,\alpha}(x, t')|dx\right\}|h|_{\mathscr{O}_0},$$

由此立即得到 $G_{\alpha_0}(t)$ 是 $t(|t|<T)$ 的取值于 $H(\overline{\mathscr{O}}_0;\ \mathbf{C}^m)'$ 中的连续函数. 记

$$v=\sum_{\alpha_0\leqslant k}\partial_t^{\alpha_0}G_{\alpha_0}(t).$$

注意, 如果当 $t\leqslant 0$ 时 G_{α_0} 等于零, 我们可以写

$$G_{\alpha_0}=\partial_t^{k-\alpha_0}G_{\alpha_0}^\natural,$$

其中 $G_{\alpha_0}^\natural$ 在 $]-T,\ T[$ 中也是连续的[取值于 $H(\overline{\mathscr{O}}_0;\ \mathbf{C}^m)'$ 中], 并当 $t<0$ 时它等于零. 再令

$$g=\sum_{\alpha_0=0}^{k}G_{\alpha_0}^\natural,$$

就得到表达式(20.5), 这样, 我们就把取值于 $H(\overline{\mathscr{O}}_0;\ \mathbf{C}^m)'$ 中的、关于 t 的广义函数 v 和 $(x,\ t)$ 变量的广义函数 u 联系起来了.

因为我们要探求唯一性定理, 因此想知道 v 恒等于零是否蕴涵着 u 也恒等于零. 不妨计算 v 作用在形为 $h\varphi(t)$ 的试验函数上的值, 这里 h 是 $H(\overline{\mathscr{O}}_0;\ \mathbf{C}^m)$ 的一个任意的元素, φ 是有紧支集包含于 $]-T,\ T[$ 中的一个任意的 C^∞(复值)函数. 从我们的定义, 有

$$\langle v,\ h\varphi(t)\rangle=\langle u,\ h(x)\varphi(t)\rangle,$$

其中括号表示相应的对偶性. 这样, 如果 $v=0$, 则 u 作用在所有形如 $h(x)\varphi(t)$ 的乘积上都等于零, 这里 $\varphi\in C_c^\infty(]-T,\ T[)$, h 是 $H(\overline{\mathscr{O}}_0;\ \mathbf{C}^m)$ 的一个任意的元素在 $\mathscr{O}_0\cap\mathbf{R}^n$ 的限制; 特别地, 当 h 是 $\mathbf{R}^n$ 上一任意的多项式时也对. 但是, 形为 $h(x)\varphi(t)$ 的乘积的线性组合的集合在 $C_c^\infty(\mathbf{R}^n\times]-T,\ T[)$ 中稠(这是 Stone-Weierstrass 定理的一个变种), 因而 u 必须恒等于零. 我们将此综括为

(20.10)　　对应 $u\mapsto v$ 是内射的.

注 20.1　我们已考虑了当 $t<0$ 时等于零的 $]-T, T[$ 中的广义函数; 但是显然可用开区间 $]-T,\ T[$ 中的任意别的点 t_0 代替原点. 关于当 $t>0$ 时等于零的广义函数, 我们也能得到类似的结果.

现在考虑微分算子

(20.11)　　$$\sum_{j=1}^{n}A_j(z,\ t)\frac{\partial}{\partial z^j}+A_0(z,\ t),$$

其中 $A_j(0\leqslant j\leqslant n)$ 是 $m\times m$ 矩阵，其元素是包含 $\mathscr{O}_0\times]-T, T[$ 的某个闭多圆柱(在 $\mathbf{C}^{n+1}$ 中)的一个开邻域中的((z, t)的)全纯函数(我们暂时把 t 看作一复变量). 很清楚，当 $z=x\in\mathbf{R}^n$ 和 t 是实的时候，(20.11)即作用在如上所考虑的 u 这样的广义函数上. 我们用 $A(t)$ 表示转移到与 u 相联系的、t 的广义函数 v 上的(20.11)的作用. 换句话说，用前面所述的途径把 $A(t)v$ 与 $\mathfrak{A}(t)u$ 联系起来，这里

$$\mathfrak{A}(t)=\sum_{j=1}^{n}A_j(x, t)\frac{\partial}{\partial x^j}+A_0(x, t).$$

如果 $\varphi\in C_c^\infty(]-T, T[)$ 和 $h\in H(\overline{\mathscr{O}}_0; \mathbf{C}^m)$ 是任意的，则有

$$\begin{aligned}(20.12)\qquad \langle A(t)v, h\varphi(t)\rangle&=\langle\mathfrak{A}(t)u, h\varphi\rangle=\langle u, {}^t\mathfrak{A}(t)(h\varphi)\rangle\\&=\langle u, \varphi A'(t)h\rangle,\end{aligned}$$

其中

$$(20.13)\qquad A'(t)=-\sum_{j=1}^{n}{}^tA_j(z,t)\frac{\partial}{\partial z^j}+{}^tA_0(z, t)-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\,{}^tA_j}{\partial z^j}(z, t)$$

(${}^tA_j$ 是矩阵 A_j 的转置). 这是通过分部积分得到的. 现在很清楚(参阅 § 17), $A'(t)$ 确定一个有界线性算子 $H(\overline{\mathscr{O}}_s; \mathbf{C}^m)\to H(\overline{\mathscr{O}}_{s'}; \mathbf{C}^m)$. 公式(20.12)告诉我们，$A(t)$ 等于 $A'(t)$ 的转置.

显然，如果用 A' 代替 A，并根据(20.8)选取 E_s，则(20.3)和(20.4)被满足. 由于(20.7)，我们有类似于命题 17.5 的结果，其中用 A' 代替了 A. 因而，(17.20)成立. 由于引理 20.4，所以引理 20.3 的所有假设被满足. 因而可以应用推论 20.1. 我们得到下述结论，即将要看出那是 Holmgren 定理的说法之一：

定理 20.1 令 u 是 $(\mathscr{O}_0\cap\mathbf{R}^n)\times]-T, T[$ 中的一个广义函数，当 x 不属于 $\mathscr{O}_0\cap\mathbf{R}^n$ 的某个紧子集 K 时等于零.

假设

$$(20.14)\qquad \frac{du}{dt}=\mathfrak{A}(t)u,$$

并设当 $t<0$ 时 $u=0$. 则在 $(\mathscr{O}_0\cap\mathbf{R}^n)\times]-T, T[$ 中 $u=0$.

读者可能对 u 一定是 $(\mathscr{O}_0\cap\mathbf{R}^n)\times]-T, T[$ 中的连续函数的

导数的有限和——如我们曾在上面论证中假设过——这一论断提出异议. 但是如果用任一子区间 $]-T', T'[$ $(T'<T)$ 代替 $]-T, T[$, 则 u 就等于这样的和式. 我们已经看到, 如果 $|t|<T'$, 则 $u=0$, 因而如果 $|t|<T$, 也有 $u=0$, 正如我们令 $T'\to T$ 时看到的那样.

习 题

20.1 (稍微)修改定理 17.2 中"唯一性"的证明, 证明定理 17.2 的(II)部分的下述较强的提法:

定理 20.2 令 $\{E_s\}(0\leqslant s\leqslant 1)$ 是一 Banach 空间族. 它满足下述条件:

(20.15) 如果 $0\leqslant s'<s\leqslant 1$, 则 $E_s\hookrightarrow E_{s'}$, 并且从 E_s 到 $E_{s'}$ 中的自然内射映射的范数 $\leqslant 1$.

再令 u 是 $t(|t|<T)$ 的取值于 E_1 中的任一 C^1 函数, 对于每对数 $0\leqslant s'<s\leqslant 1$, 它满足不等式

(20.16) $$\|u'(t)\|_{s'}\leqslant\frac{C}{s-s'}\|u(t)\|_s,\quad \forall t\in]-T, T[,$$

其中 C 是与 s, s', t 无关的正的常数.

如果 u 在区间 $]-T, T[$ 的某一点处等于零, 则它在整个这个区间中等于零.

20.2 用习题 17.10 中的记号和概念. 令 $u(t)$ 是取值于 H^1 中的连续函数, 把它看作取值于 H^0 中时, 它是一次连续可微的, 使得

(20.17) $$\|u'(t)\|_0\leqslant \text{const}\|Au(t)\|_0,\quad |t|<T.$$

证明, 如果 $u(0)=0$, 则对于所有的 t, $|t|<T$, 有 $u(t)=0$.

20.3 考虑 $\mathbf{R}^n$ 中的偏微分算子

(20.18) $$P(t, D_x)=\sum_{|p|\leqslant m}c_p(t)D_x^p,$$

其中系数 $c_p(t)$ 是 $t(|t|<T)$ 的取复值的连续函数.

证明, 如果 u 是 $t(|t|<T)$ 的取值于某个空间 $H^s(\mathbf{R}^n)(s\in\mathbf{R})$ 中的 C^1 函数, 满足

(20.19) $$\frac{\partial u}{\partial t}=P(t, D_x)u \quad 在\ \mathbf{R}^n\times]-T, T[\ 中,$$

(20.20) $$u|_{t=0}=0,$$

则在 $\mathbf{R}^n\times]-T, T[$ 中 u 恒等于零.

21. Holmgren 定 理

Holmgren 定理是定理 20.1 的一个较强的形式. 令 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个开子集. 考虑一阶线性偏微分方程组

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{j=1}^{n} A_j(x,\ t)\frac{\partial u}{\partial x^j}+A_0(x,\ t)u, \tag{21.1}$$

关于此方程组,我们假设

(21.2) $m\times m$ 矩阵 $A_j(x,\ t)\ (0\leqslant j\leqslant n)$ 的元素是 $\Omega\times\,]-T,\ T[$ 中 $(x,\ t)$ 的解析函数.

定理 21.1 假设(21.2)成立. 则存在 $\Omega\times\{0\}$ 在 $\Omega\times\,]-T,\ T[$ 中的一个开邻域 $\mathscr{U}$, 使得对于 $\Omega\times\,]-T,\ T[$ 中的每个广义函数 u, 假如它在 $\Omega\times\,]-T,\ T[$ 中满足(21.1), 并且当 $-T<t<0$ 时它等于零, 那么在 $\mathscr{U}$ 中它也必定等于零.

这个叙述和定理 20.1 之间的主要不同之处在于: 在定理 21.1 中, 关于 x, u 不需要有紧支集. 在证明定理 21.1 之前我们指出, 它如何蕴涵着 Holmgren 定理的下述"经典的"叙述:

推论 12.1 令 u 是在 $\Omega\times\,]-T,\ T[$ 中满足(21.1)的一个 C^1 函数. 如果对于所有的 $x\in\Omega$, $u(x,\ 0)=0$, 那么在 $\Omega\times\{0\}$ 的邻域 $\mathscr{U}$ 中 $u=0$.

证明 考虑函数 $\tilde{u}(x,\ t)=H(t)u(x,\ t)$, 其中 H 是 Heaviside 函数, 在正半直线上等于 1, 在负半直线上它等于 0, 因为 $u(x,\ 0)=0$, 我们就有 $(\partial/\partial t)\tilde{u}=H(t)(\partial/\partial t)u$, 因而 $\tilde{u}$ 也满足(21.1), 自然, 当 $t<0$ 时它等于零. 然后只需应用定理 21.1 即可. 证毕.

定理 21.1 的证明 只需证明, 在任意一点 $(x_0,\ 0)\ (x_0\in\Omega)$ 的一开邻域中——它不依赖于 u——有 $u=0$. 为了简单起见, 我们取 $x_0=0$. 这样, 不妨假设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中原点的某个邻域, 必要时我们可以有限次地缩小它; 需要时也将减小 T. 作下述变量变换

$$x=y,\quad t=s-|y|^2,$$

即

$$y=x,\quad s=t+|x|^2.$$

我们有 $\dfrac{\partial}{\partial x^j}=\dfrac{\partial}{\partial y^j}+2y^j\dfrac{\partial}{\partial s}\quad(1\leqslant j\leqslant n)$, $\dfrac{\partial}{\partial t}=\dfrac{\partial}{\partial s}$.

方程组(21.1)变为

$$M(y,\ s)\frac{\partial u}{\partial s}=\sum_{j=1}^{n}B_j(y,\ s)\frac{\partial u}{\partial y^j}+B_0(y,\ s)u, \tag{21.3}$$

其中 $B_j(y,\ s)=A_j(y,\ s-|y|^2)\ (0\leqslant j\leqslant n)$ 和

$$M(y,\ s)=I-2\sum_{j=1}^{n}y^jB_j(y,\ s).$$

如果 Ω 足够小，且 $y\in\Omega$，则 $M(y,\ s)$ 是可逆的；自然，其逆关于 $(y,\ s)$ 也是解析的．方程组(21.3)等价于

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\sum_{j=1}^{n}C_j(y,\ s)\frac{\partial u}{\partial y^j}+C_0(y,\ s)u, \tag{21.4}$$

其中 $C_j\doteq M^{-1}B_j$．此方程组具有与(21.1)相同的形式．在我们的假设中唯一的不同之处，是解 u 现在当 $s<|y|^2$ 时等于零．首先我们可以做这个假定：回到(21.1)并回到 $(x,\ t)$ 坐标，可以假设当 $t<|x|^2$ 时 $u=0$．如果 T 充分小，则区域 $\{(x,\ t);\ x\in\Omega,\ |t|<T,\ |x|^2<t\}$——它包含 $\operatorname{supp}u$——在 x 空间中的投影包含在 Ω 的紧子集 K 中．最后，我们收缩整个图形，使得 Ω 包含于如定理 20.1 中的多圆柱一样的 $\mathbf{C}^n$ 的一个多圆柱 $\mathscr{O}_0$ 中，并且，这也是为了能够假设系数 A_j 可被延拓到多圆柱

$$\{(z,\ t)\in\mathbf{C}^{n+1};\ z\in\overline{\mathscr{O}}_0,\ |t|\leqslant T\}$$

的一开邻域中而成为一全纯函数．现在只需应用定理 20.1：我们得到，在 $\Omega\times]-T,\ T[$ 中 $u=0$．因为 Ω 和 $T>0$ 的选择与 u 无关，因而这就是所要求的结论． 证毕．

我们提出 Holmgren 定理的一个不变形式来结束这一节．正如对于 Cauchy-Kovalevska 定理我们曾做过的那样，现在我们仅在单个方程的情形，即在一个 $m(>0)$ 阶的纯量微分算子 $P(y,\ D_y)$ [$y=(y^1,\ \cdots,\ y^N)$ 是 $\mathbf{R}^N$ 的一开子集 $\mathscr{U}$ 中的变量]的情形中这样做．$P(y,\ D_y)$ 的主算符照例用 $P_m(y,\ \eta)$ 表示．

定理 21.2 假设微分算子 $P(y,\ D_y)$ 的系数在开集 $\mathscr{U}$ 中是解析的．令 Σ 是 $\mathscr{U}$ 中的一个 $\mathbf{C}^1$ 超曲面，它把 $\mathscr{U}$ 分成两部分，$\mathscr{U}_+$ 和

$\mathscr{U}_-$，并且关于 $P(y, D_y)$ 它处处都不是特征的.

则在 $\mathscr{U}$ 中，Σ 有一个开邻域 $\mathscr{N}$，使得在 $\mathscr{U}$ 中满足 $P(y, D_y)u=0$ 和在 Σ 的某一侧(即在 $\mathscr{U}_+$ 中或在 $\mathscr{U}_-$ 中)等于零的、$\mathscr{U}$ 中的每个广义函数 u，在 $\mathscr{N}$ 中也等于零.

所谓 Σ 是 $\mathscr{U}$ 中的一个 $\mathbf{C}^1$ 超曲面意味着 Σ 的每个点都有一个开邻域 $\mathscr{O}$，在其中确定一个实值 C^1 函数 $\varphi(y)$，(在 $\mathscr{O}$ 中)它的梯度处处不等于零，并使得 $\Sigma\cap\mathscr{O}$ 恰为 $\mathscr{O}$ 中使 $\varphi=0$ 的点的集合.

所谓 Σ 把 $\mathscr{U}$ 分成两部分 $\mathscr{U}_+$，$\mathscr{U}_-$，即意味着 $\mathscr{U}=\Sigma\cup\mathscr{U}_+\cup\mathscr{U}_-$，其中 $\mathscr{U}_+$ 和 $\mathscr{U}_-$ 是与 Σ 不相交的两个不相交的连通开集. 关于特征的含义，参阅定义 19.3.

定理 21.2 的证明 只需在 Σ 的一个任意点的邻域中讨论即可，我们将此任意点取为 $\mathbf{R}^N$ 中的原点. 令 φ 是 0 的开邻域 $\mathscr{V}$ 中的一个 $\mathbf{C}^1$ 函数，使得 $\Sigma\cap\mathscr{V}$ 是使 $\varphi(y)=0$ 的 $y\in\mathscr{V}$ 的集合；自然，我们假定在 $\mathscr{V}$ 的任何点处 $\operatorname{grad}\varphi$ 不等于零. 假定，为了在 $\mathscr{V}$ 中有 $\varphi(y)=y^N+o(|y|)$，我们已经选取了坐标 y^j. 令 $y'=(y^1, \cdots, y^{N-1})$，则存在一个数 $\delta>0$，使得 $\mathscr{V}_+=\{y\in\mathscr{V};\ \varphi(y)>0\}$ 包含于集合

$$y\in\mathscr{V},\quad y^N>-\delta|y'| \tag{21.5}$$

中. 还注意，当我们围绕着原点缩小 $\mathscr{V}$ 时，我们可以减小 $\delta>0$. 令 ε 是一大于零的数，并把由

$$|y'|<2\varepsilon\delta,\quad |y^N|<4\delta^2\varepsilon$$

所确定的 $\mathbf{R}^N$ 的开子集称为 $\mathscr{W}_\varepsilon$. 当 ε 充分小时，有 $\mathscr{W}_\varepsilon\subset\mathscr{V}$. 再令

$$\psi(y)=y^N+\frac{1}{\varepsilon}|y'|^2.$$

用 $\mathscr{T}_\varepsilon$ 表示抛物面 $\psi(y)=0$ 与 $\mathscr{W}_\varepsilon$ 的交集. 我们作出下面三个论断(假设 δ 充分小)：

(21.6) $P_m(y, \operatorname{grad}\psi)$ 在 $\mathscr{W}_\varepsilon$ 中处处不等于零；特别地，$\mathscr{T}_\varepsilon$ 处处不是特征；

(21.7) 如果 y 属于 $\mathscr{T}_\varepsilon$ 的边界，则 $y^N<-\delta|y'|$；

(21.8)　$x=y'$, $t=\psi(y)$ 确定出从 $\mathscr{W}_\varepsilon$ 到 $\mathbf{R}^N$ 的原点的一个邻域上的一个微分同胚[通常，我们取 $n=N-1$, $x=(x^1, \cdots, x^n)$].

从下述事实

$$|\operatorname{grad}\psi-(0, \cdots, 0, 1)|<4\delta$$

和 $P_m[0, (0, \cdots, 0, 1)]\neq 0$ 即得第一个论断(21.6)．如果 y 属于 $\mathscr{T}_\varepsilon$ 的边界，则 $|y'|=2\varepsilon\delta$ 和

$$y^N=-4\varepsilon\delta^2=-2\delta|y'|,$$

从这一事实我们就得到论断(21.7)．论断(21.8)是显然的．现在，我们就处于如图 21.1 中所描述的情形中．

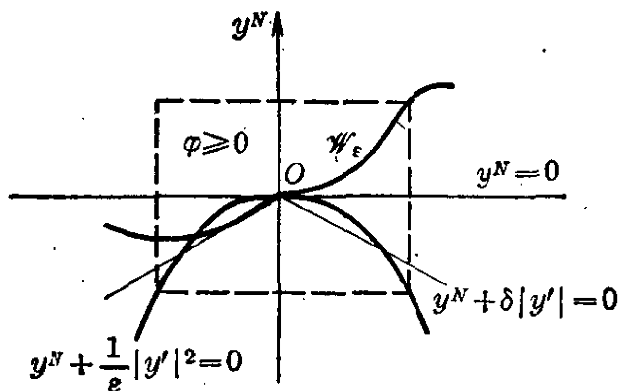


图　21.1

如果我们作(21.8)中的变量变换，则算子的表达式就变为

$$P(x, t, D_x, D_t)=a(x, t)D_t^m+\sum_{j=1}^{m}Q_j(x, t, D_x)D_t^{m-j},$$

其中 $a(x, t)$ 和 Q_j 的系数在原点的一邻域中是 (x, t) 的解析函数；并且，在原点附近 $a(x, t)$ 处处不等于零，$Q_j(x, t, \xi)$ 是 ξ 的次数 $\leqslant j$ 的多项式($j=1, \cdots, m$)．

令 u 是 $\mathscr{W}_\varepsilon$ 中的一广义函数，它在 $\mathscr{W}_\varepsilon$ 中满足齐次方程 $P(y, D_y)u=0$，并且当 $\varphi(y)<0$ 时它等于零．在新坐标 (x, t) 中，这就蕴涵着下述事实：在集合 $\mathscr{W}=\{(x, t)\in\mathbf{R}^{n+1};\ |x|<r, -t_0<t<t_1\}$ (这里 t_0 和 t_1 大于零)中有 $P(x, t, D_x, D_t)u=0$；存在 r', $0<r'<r$，使得当 $|x|>r'$, $-t_0<t<t_1$ 时 $u=0$；最后，存在 t_2, $0<t_2<t_0$，使得当 $|x|<r$, $-t_0<t<-t_2$ 时 $u=0$．在把方程 $P(x, t, D_x,$

$D_t)u=0$ 变为一阶组后(根据 § 18 中所述的方法)，我们就能够应用定理 20.1. 这样就得到了结论，即在整个集合 $\mathscr{W}$ 中 $u=0$.

习　题

21.1　令 $P(x, D)$ 是一个 m 阶椭圆微分算子，其系数在 $\mathbf{R}^n$ 的一个连通开子集 Ω 中是解析的(参阅定义 19.4). 令 S 是包含于 Ω 中的一个 C^∞ 超曲面片，h 是在 Ω 中满足 $P(x, D)h=0$ 的一解析函数. 证明，如果 h 的所有阶数 $<m$ 的导数在 S 上都等于零，则在 Ω 中必须 $h\equiv 0$.

21.2　令 $P(D)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上有常系数的一个微分算子，μ 是 $\mathbf{R}^n$ 中有紧支集的一个任意的广义函数. 应用 Holmgren 定理来证明，μ 的支集必定包含在 $P(D)\mu$ 的支集的凸包(即，包含 $\operatorname{supp} P(D)\mu$ 的最小的凸集)中.

21.3　应用 Holmgren 定理，证明波动算子的当 $t<0$ 时等于零的基本解，其支集必定包含于前向光锥中.

21.4　令 $P(\xi)$ 是 n 个变量的(具有复系数的)、次数 $m\geqslant 1$ 的一个齐次多项式. 假设，对于某个 $\xi^0\in\mathbf{R}_n$, $\xi^0\neq 0$, 有 $P(\xi^0)=0$. 构造 $\mathbf{R}^n$ 中的一个 C^∞ 函数 $h(x)$，当 $\langle x, \xi^0\rangle\leqslant 0$ 时 $h(x)=0$ 和当 $\langle x, \xi^0\rangle>0$ 时 $h(x)\neq 0$，并使得在 $\mathbf{R}^n$ 中 $P(D_x)h=0$.

21.5　令 $P(\xi)$ 是 $\mathbf{R}_n$ 上次数 $m\geqslant 1$ 的一个多项式，$P_m(\xi)$ 是其 m 次齐次部分. 用习题 12.5 中的结果证明，如果 $\xi^0\neq 0$ 满足 $P_m(\xi^0)=0$，则在 $\mathbf{R}^n$ 中存在一个 C^∞ 函数 h，使得 $P(D_x)h=0$，并且使得当 $\langle x, \xi^0\rangle\leqslant 0$ 时 $h(x)=0$ 和当 $\langle x, \xi^0\rangle>0$ 时 $h(x)\neq 0$.

21.6　令 $P(D)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中有常系数的一个微分算子. 证明，在 $\mathbf{R}^n$ 中使得 $P(D)u=0$ 的每个广义函数 u，其支集包含在一个半空间——它的边界($\mathbf{R}^n$ 中的一个超平面)关于 $P(D)$ 不是特征的——中，在 $\mathbf{R}^n$ 中必须恒等于零.

21.7　令 Γ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个开凸锥，顶点为 x_0，$P(D)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中一个常系数微分算子，有下列性质：通过原点的每个特征超平面都与 Γ 相交. 证明，Γ 中的每个广义函数 u，如果它在 Γ 的一个有界子集之外等于零，并在 Γ 中满足 $P(D)u=0$，则它在 Γ 中恒等于零.

21.8　考虑 $\mathbf{R}^2$ 中的算子 $L=\partial/\partial t+t\partial/\partial x$. 证明，直线 $x=0$ 在原点处(关于 L)是特征的，并证明，每个广义函数 u，如果它在中心为原点的某个开圆盘 Ω 中满足 $Lu=0$，它的支集包含在半圆盘 $\{(x, t)\in\Omega;\ x\leqslant 0\}$ 中，则它在 Ω 中恒等于零.

21.9　令

$$L=\sum_{j=1}^{n}a^{j}(x)\frac{\partial}{\partial x^{j}}+a^{0}(x)$$

是在 $\mathbf{R}^n$ 的开子集 Ω 中具有 C^∞ 系数的一个一阶微分算子. 假设, L 的主部的系数 a^j, $j=1, \cdots, n$, 是实的, 并且在 Ω 的任何一点处它们不同时为零. 令 S 是包含于 Ω 中的一个 C^∞ 超曲面, 在 S 的每一点处, 关于 L 它是特征的. 令 x_0 是 S 的一个任意的点. 证明, 在 Ω 中存在 x_0 的一个被 S 分成两部分的开邻域 U, 且存在 U 中的 C^∞ 函数 h, 它在 U 中满足 $Lh=0$, 在 S 的某一侧恒等于零, 但在 S 的另一侧处处不等于零(自然, 它在 $S\cap U$ 上等于零).

第 III 章

边值问题

22. Dirichlet 问题．变分形式

我们用多少有点不严格的语言描述某类问题来开始讲述这一节，这一章的大部分都涉及到这类问题．它们适用于一大类椭圆(定义 19.4)线性偏微分方程，这一类方程的代表是 Laplace 方程或者(在某种意义上更好一些，是)*无调和方程* $(-\lambda+\Delta)u=f$, $\lambda>0$．我们大部分是考虑后一方程，但也经常探求把所得结果推广到更一般的二阶(椭圆)算子

$$(22.1)\qquad L=\sum_{j,k=1}^{n} a^{jk}(x)\frac{\partial^2}{\partial x^j\partial x^k}+\sum_{j=1}^{n} b^j(x)\frac{\partial}{\partial x^j}+c(x)^{\dagger}$$

上去的可能性．上述算子的系数是定义于 $\mathbf{R}^n$ 的一开子集 Ω 中的复函数，通常具有某种程度的正规性(这取决于研究的目的：在某些理论中，只假设系数是可测的和有界的)．求解方程

$$(22.2)\qquad Lu=f \quad 在\ \Omega\ 中$$

是问题的一部分．但是我们不满足于随便一个解；我们要求的解是满足确定的边界条件的．因此，Ω 的边界将起着一种重要的作用．我们用 $\partial\Omega$ 表示 Ω 的边界．在本章所研究的那类很重要的问题中，边界条件为

$$(22.3)\qquad u=g \quad 在\ \partial\Omega\ 上.$$

我们把这问题称为 *Dirichlet 问题*(经常称它为*非齐次 Dirichlet 问题*，有些人喜欢保留 Dirichlet 问题这个名称，而这是对于(22.2)中的右端为零的情形而言的)．显然，此问题的这样的叙述是很含糊的．特别，条件(22.3)的含义是不清楚的．它与解 u 在边界 $\partial\Omega$

† 在这一章的末尾 § 36 和 § 38 中，我们将对于高阶椭圆方程考察边值问题．

处的值有关系，因而就要想象 u 可被延拓到 Ω 的闭包 $\bar{\Omega}$ 上。用自然的方式把 u 延拓到边界上的可能性极大地依赖于边界的性状，自然也依赖于数据 f 和 g 的正规性性质，同时依赖于 L 的系数 a^{jk}，$b^j(1\leqslant j,\ k\leqslant n)$ 和 c.

本节几乎只是一篇导言.因而我们将作若干简化的假设，以便得到有关这个问题的某些线索．过些时候我们将指出如何放松这里硬加的一些限制.

首先，我们(暂时)限于算子

(22.4) $$L=-\Delta+\lambda,\quad \lambda\geqslant 0,\quad \Delta=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)^2.$$

在整个这一节中，我们将假设

(22.5) 开集 Ω 是有界的.

在以下几节中将会看到，当零阶系数 λ 大于零时，而不是当 $\lambda=0$ 时——即在 Laplace 方程这一极重要的情形中——条件(22.5)完全是多余的．在许多应用中，Ω 不是一个有界集：例如，Ω 或许是一有界集的余集(例如，当研究一带电体外围的区域中静电位势的分布时)．在这个情形，在无穷远处需要有额外的条件．这里，我们不研究这样的问题.

暂时，我们还将假设

(22.6) Ω 的边界是一(紧的)连通的 C^1 超曲面.

我们将此与下述要求联系起来：$\partial\Omega$ 把整个空间 $\mathbf{R}^n$ 分成两个区域(*Jordan* 曲线定理的推广)，而 Ω 是 $\partial\Omega$ 的余集的有界连通分支．这样，我们就可以谈论 $\partial\Omega$ 在其每一点处的法线，并给其以定向，即取外法线为正方向.

我们应该考虑什么类型的右端 f 呢？我们的选择应相当严格，足以蕴涵对于边界条件(22.3)的合理解释所需要的解的正规性；但又不是如此拘束，以致把在应用中感兴趣的情形排除在外．实际情况是，从这两个观点，

(22.7) $$f\in L^2(\Omega)$$

是一极好的要求.

我们再加一个限制,它涉及边界值 g. 假设

(22.8) $$g\in C^1(\partial\Omega).$$

g 仅在 $\partial\Omega$ 上有定义这一事实多少有点麻烦. 为了把 g 从 $\partial\Omega$ 上延拓出去, 我们将利用性质(22.6)和(22.8). 可以用几种方法做到此事. 一个简单的过程如下. 用 $\mathbf{R}^n$ 的有限个开子集 $\mathcal{O}_1, \cdots, \mathcal{O}_r$ 覆盖 $\partial\Omega$, 使得对每个 j, 存在一个从 $\mathcal{O}_j$ 到 $\mathbf{R}^n$ 的开单位球 B 上的 C^1 微分同胚 φ_j, 它把 $\mathcal{O}_j\cap\Omega$ 映到开半球 $B^+=\{y\in B;\ y^n>0\}$ 上. 由于(22.6),这是可能的. 对于每个 $j=1, \cdots, r$, 令

$$h_j(y)=g(\overset{-1}{\varphi_j}(y^1, \cdots, y^{n-1}, 0)),\quad y\in B$$

和
$$g_j(y)=h_j(\varphi_j(x)),\quad x\in\mathcal{O}_j.$$

显然, $g_j\in C^1(\mathcal{O}_j)$, 在 $\mathcal{O}_j\cap\partial\Omega$ 上 $g_j=g$. 再令 $\zeta_1, \cdots, \zeta_r$ 是 r 个函数,使得对每个 j 有 $\zeta_j\in C_c^\infty(\mathcal{O}_j)$ 和

$$\sum_{j=1}^r\zeta_j\equiv1\quad 在\ \partial\Omega\ 的一个领域中.$$

最后, 令 $g^\#=\sum_{j=1}^r\zeta_jg_j$. 我们看到, $g^\#\in C_c^1(\mathbf{R}^n)$, 在 $\partial\Omega$ 上 $g^\#=g$, 事实上我们将只用到 $g^\#$ 在 $\bar{\Omega}$ 上的限制,用 $\tilde{g}$ 表示它. 条件(22.3)可改写为

(22.9) $$u-\tilde{g}=0\quad 在\ \partial\Omega\ 上.$$

这就提示我们要变换未知函数(或广义函数),而考虑

$$U=u-\tilde{g}.$$

现在,我们的问题变为寻求 U 的问题,使得

(22.10) $$(-\Delta+\lambda)U=F\quad 在\ \Omega\ 中,$$

(22.11) $$U=0\quad 在\ \partial\Omega\ 上.$$

其中我们已用了记号

$$F=f+\Delta\tilde{g}-\lambda\tilde{g}.$$

注意,如果只作假设(22.8),我们就不能断言 $\Delta\tilde{g}$ 是(Ω 中)一函数. 我们只知道它是连续函数——事实上是在 $\bar{\Omega}$ 上连续的函数——的一阶导数的一个和式:

$$\Delta\tilde{g}=\sum_{j=1}^n\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial\tilde{g}}{\partial x^j}\right).$$

因而，我们不能期望解 U 将是非常光滑的，如果它存在的话．然而，我们仍然可以希望 U 将是充分光滑的，足以使我们能够给(22.11)以合理的意义．

现在回到(22.10)．因为其右端 F 现在是一广义函数，所以要在广义函数的意义下来解(22.10)．这意味着，给定任何 $\varphi\in C_c^\infty(\Omega)$，我们要求

(22.12)　$$\langle U, (-\Delta+\lambda)\varphi\rangle=\langle F, \varphi\rangle.$$

自然，F 不是一个任意的广义函数：对于某些特别的半范数(或范数)，它在 $C_c^\infty(\Omega)$ 上是连续的．事实上，

$$\langle F, \varphi\rangle=\int(f-\lambda\tilde{g})\varphi\,dx-\int(\operatorname{grad}\tilde{g})\cdot(\operatorname{grad}\varphi)\,dx.$$

由于加在 f 上的假设(22.7)和 $\tilde{g}$ 的性质(即，$\tilde{g}$ 和 $\operatorname{grad}\tilde{g}$ 在 $\bar{\Omega}$ 中是连续的)，我们立刻得到

(22.13)　$$|\langle F, \varphi\rangle|\leqslant\text{const}\|\varphi\|_1,$$

其中　$$\|\varphi\|_1=\left\{\int_\Omega|\varphi|^2dx+\int_\Omega|\operatorname{grad}\varphi|^2dx\right\}^{1/2}.$$

$\|\ \|_1$ 在 $C_c^\infty(\Omega)$ 上确定了一个范数，在以后的章节中它将起着非常重要的作用[注意，由于 *Plancherel* 定理，它等于当 $s=1$ 时的范数(13.20)]．为了得到这个作用的一些体现，首先研究 $\lambda=1$ 的情形是有益的．先假设对于方程(22.12)，存在一个解 U，它属于 $L^2(\Omega)$，并且其一阶导数(在广义函数的意义下)也属于 $L^2(\Omega)$．在这个情形，在(22.12)的左端我们可以分部积分一次．在把 φ 和 $\bar{\varphi}$ 交换以后，我们的结果可写为

(22.14)　$$(U, \varphi)_1=\langle F, \bar{\varphi}\rangle,\quad \varphi\in C_c^\infty(\Omega),$$

其中，$(,)_1$ 是相应于范数 $\|\ \|_1$ 的 Hermite 积：

$$(U, V)_1=\int_\Omega U\bar{V}dx+\sum_{j=1}^n\int_\Omega\frac{\partial U}{\partial x^j}\frac{\partial\bar{V}}{\partial x^j}dx.$$

新方程(22.14)明显地提示我们试用 *Riesz* 表示定理．事实上，其右端对于范数 $\|\ \|_1$ 而言，在 $C_c^\infty(\Omega)$ 上确定了一个连续反线性泛函．范数 $\|\ \|_1$ 显然是一个 Hilbert 空间范数．我们暂时把 $C_c^\infty(\Omega)$ 关于此范数的完备化称为 $\mathscr{H}$．由一 Hilbert 空间到它的反对偶空间

上的典则同构，我们知道，在 $\mathscr{H}$ 中存在满足 (22.14) 的唯一元素 U. 在某种意义下，我们已经解决了这个问题，但是，我们的方法的缺陷是，所得的解是在一抽象空间——$C_c^\infty(\Omega)$ 对于某个范数的完备化——中. 如果能把解 U"具体化"为一函数，换句话说，如果能把 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 和一函数空间等同起来，这将是有好处的. 由于 U 和 $\operatorname{grad} U$ 在 Ω 中是平方可积的这一假设，我们已从 (22.12) 推得 (22.14). 这提示我们必须做什么，并导致下述非常重要的定义：

定义 22.1 用 $H^1(\Omega)$ 表示函数 $w \in L^2(\Omega)$ 的空间，这些函数 w 的一阶导数（在广义函数的意义下）属于 $L^2(\Omega)$.

$H^1(\Omega)$ 是 *Sobolev* 空间的第一个例子，也许是最重要的例子. 它与研究 Cauchy 问题（定义 13.1）时遇到的空间 H^s 密切有关. 它被赋予 Hermite 积 $(,)_1$ 和范数 $\| \ \|_1$.

命题 22.1 $H^1(\Omega)$ 是一 Hilbert 空间.

证明 令 $\{w^\nu\}$ 是 $H^1(\Omega)$ 中的一个 Cauchy 列. 事实上，它是 $L^2(\Omega)$ 中的一个 Cauchy 列，并且，$\{\partial w^\nu/\partial x^j\}$ $(j=1, \cdots, n)$ 也是 $L^2(\Omega)$ 中的一个 Cauchy 列. 这些 Cauchy 列在 $L^2(\Omega)$ 中分别有极限——w 和 w_j. 但是，$(\partial/\partial x^j)$ 是 $\mathscr{D}'(\Omega)$（Ω 中的广义函数空间）上的一个连续线性算子，因而 $(\partial/\partial x^j)w^\nu$ 在 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 中收敛于 $(\partial/\partial x^j)w$；但是它在 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 中也收敛于 w_j，因此这两个极限必须相等. 证毕.

现在，$C_c^\infty(\Omega)$ 对于范数 $\| \ \|_1$ 的完备化 $\mathscr{H}$ 可等同于 $C_c^\infty(\Omega)$ 在 $H^1(\Omega)$ 中的闭包.

定义 22.2 $C_c^\infty(\Omega)$ 在 $H^1(\Omega)$ 中的闭包用 $H_0^1(\Omega)$ 表示.

我们已经看到，方程 (22.14) 有唯一解 $U \in \mathscr{H}$. 现在不妨把 U 解释为 $H_0^1(\Omega)$ 的一个元素. 注意，这意味着 U 是在 Ω 的边界的邻域中恒等于零的 C^∞ 函数关于范数 $\| \ \|_1$ 的极限. 在某种意义下，可以把这个事实解释为 U 在 $\partial\Omega$ 上等于零. 自然，其含义与适用于连续函数的、在 $\partial\Omega$ 上的值的含义有点不同. 但是，正如下面的结果所指出的，此两者被联系起来了.

命题 22.2 假设 (22.5) 和 (22.6) 成立. 如果 $U \in C^0(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$,

则下述两个性质是等价的:

(a) $U=0$　在 $\partial\Omega$ 上;

(b) $U\in H_0^1(\Omega)$.

证明　我们将只说个大意, 而把细节留给读者作为关于 Sobolev 空间的一个练习.

首先, 令 U 在 Ω 的余集中等于零, 这样来把 U 延拓到整个空间 $\mathbf{R}^n$. 利用第 179 页介绍的 $\partial\Omega$ 的覆盖 $\{\mathscr{O}_j\}_{1\leqslant j\leqslant r}$ 和函数 $\zeta_j(1\leqslant j\leqslant r)$. 稍微缩小每个集合 $\mathscr{O}_j$, 我们可以假设微分同胚 φ_j 的 Jacobi 矩阵和其逆 $\overset{-1}{\varphi_j}$ 的 Jacobi 矩阵在它们的定义域中都是一致有界的. 这就保证了 $w\mapsto w\circ\varphi_j$ 是从 $H^1(B^+)$ 到 $H^1(\mathscr{O}_j\cap\Omega)$ 上的一个同构(对于拓扑向量空间的结构而言), 它的逆是 $v\mapsto v\circ\overset{-1}{\varphi_j}$.

显然, 在 $\partial\Omega$ 上 $U=0$, 当且仅当每个 ζ_jU 在 $\mathscr{O}_j\cap\partial\Omega$ 上等于零. 另一方面, 如果 $U\in H_0^1(\Omega)$, 那么每个 ζ_jU 属于 $H_0^1(\mathscr{O}_j\cap\Omega)$: 事实上, 只需考虑在范数 $\|\ \|_1$ 的意义下收敛于 U 的一个序列 $f_\nu\in C_c^\infty(\Omega)$; 此时 $\zeta_jf_\nu\in C_c^\infty(\mathscr{O}_j\cap\Omega)$, 并且在 $H^1(\mathscr{O}_j\cap\Omega)$ 中它收敛于 ζ_jU. 反之, 假设每个 ζ_jU 属于 $H_0^1(\Omega)$. 那么 U 亦然. 事实上, 容易验证 $U_0=(1-\zeta_1-\cdots-\zeta_r)U$ 属于 $H_0^1(\Omega)$, 因为 $U\in H^1(\Omega)$ 和 U_0 的支集是 Ω 的一紧子集. 我们利用标准软化子 ρ_ε:

$$\rho_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-n}\rho(x/\varepsilon),\ \rho\in C_c^\infty(\mathbf{R}^n),\ \rho\geqslant 0,\ \int_{\mathbf{R}^n}\rho(x)dx=1.$$

那么, 对于充分小的 $\varepsilon>0$, $\rho_\varepsilon*U_0\in C_c^\infty(\Omega)$. 容易验证 $\rho*U_0$ 在 $H^1(\Omega)$ 中收敛于 U_0, 或者, 在空间 $H^1(\mathbf{R}^n)$ 中 (参阅定义 13.1) 收敛于 U_0.

扼要地讲, 只需证明当用 $\mathscr{O}_j\cap\Omega$ 代替 Ω 和用 ζ_jU 代替 $U(j=1,\cdots,r)$ 时的等价性即可. 我们干脆固定 j. 令

$$V(y)=(\zeta_jU)(\overset{-1}{\varphi_j}(y)),\ y\in B\ (\mathbf{R}^n\ \text{中的开单位球}).$$

我们知道, $V\in C^0(\overline{B^+})\cap H^1(B^+)$, 并且, V 的支集是 B 的一紧子集. 我们必须证明下述两个性质的等价性:

(a′) $V=0$　当 $y^n=0$ 时,

(b′) $V\in H_0^1(B^+)$.

(I) (a′)⇒(b′). 只需证明, 如果(a′)成立, 则 V 不仅属于 $H^1(B^+)$, 甚至于还属于 $H^1(\mathbf{R}^n)$(记住在 B 的余集中 $V=0$). 因此, 平移 $V^\varepsilon(y)=V(y^1,\cdots,y^{n-1},y^n-\varepsilon)$ 也属于 $H^1(\mathbf{R}^n)$. 但是对于充分小的 $\varepsilon>0$, 它们有紧支集并包含在 B^+ 中, 因而它们属于 $H_0^1(B^+)$ (如我们用正则化所看到的; 参看上面关于 U_0 的论证). 我们知道, V 属于 $L^2(\mathbf{R}^n)$. 必须证明, 在 $\mathbf{R}^n$ 上广义函数的意义下, V 的梯度也属于 L^2. 当 $j<n$ 时, 对于每个 $(\partial/\partial x^j)V$, 此论断是平凡的, 因而只需证明当 $j=n$ 时的情形即可. 令 $\varphi\in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ 是任意的. 我们有

$$
\begin{aligned}
\left\langle\frac{\partial V}{\partial y^n},\ \varphi\right\rangle &= -\int V(y)\frac{\partial\varphi}{\partial y^n}(y)dy \\
&= -\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{y^n>\varepsilon} V(y)\frac{\partial\varphi}{\partial y^n}(y)dy \\
&= \lim_{\varepsilon\to+0}\left\{\iint (V\varphi)(y^1,\ \cdots,\ y^{n-1},\ \varepsilon)dy^1\cdots dy^{n-1}\right\} \\
&\quad+\lim_{\varepsilon\to+0}\left\{\int_{y^n>\varepsilon}\frac{\partial V}{\partial y^n}(y)\varphi(y)dy\right\}.
\end{aligned}
$$

在最后一部分中, 第一个极限等于零, 因为当 $\varepsilon\to+0$ 时, $V(y^1,\ \cdots,\ y^{n-1},\ \varepsilon)$ 关于 $y^1,\ \cdots,\ y^{n-1}$ 一致地收敛于零. 第二个极限等于

$$
\int_{y^n>0}\frac{\partial V}{\partial y^n}\varphi dy,
$$

这就证明了我们想证明的事情.

(II) (b′)⇒(a′). 在关于 V 的种种假设下, 对于几乎所有的 $y'=(y^1,\ \cdots,\ y^{n-1})$ 和每个 ε, $0<\varepsilon<1$, 我们有

$$
V(y',\ \varepsilon)=-\int_\varepsilon^1\frac{\partial V}{\partial y^n}(y)dy^n.
$$

令 $\{w^\nu\}$ 是 $C_c^\infty(B^+)$ 中的一个序列, 它在 $H^1(B^+)$ 中收敛于 V. 我们有

$$
\begin{aligned}
&\left\{\iint |V(y',\ \varepsilon)-w^\nu(y',\ \varepsilon)|^2dy'\right\}^{1/2} \\
&\quad\leqslant\int_\varepsilon^1\left\{\iint\left|\frac{\partial V}{\partial y^n}(y',\ y^n)-\frac{\partial w^\nu}{\partial y^n}(y',\ y^n)\right|^2dy'\right\}^{1/2}dy^n,
\end{aligned}
$$

因为积分的范数不超过范数的积分[这里，范数是 $L^2(\mathbf{R}^{n-1})$ 中的范数]. 如果对于不等式右端应用 Cauchy-Schwarz 不等式，则我们看到，它最多等于 $\|V-w^\nu\|_1$. 我们可以选取这样大的 ν，使得最后这个量不超过一个任意预先给定的数 $\eta>0$. 固定 ν 于此值，并选取如此小的 $\varepsilon>0$，使得对所有的 y'，有 $w^\nu(y',\varepsilon)=0$. 这样，我们得到

$$\int |V(y',\varepsilon)|^2 dy' \leqslant \eta^2.$$

取极限后，我们看到 $\int |V(y',+0)|^2 dy'=0$. 因为 $V(y',+0)$ 是 y' 的连续函数，这就意味着它必须恒等于零. 证毕.

命题 22.2 明显地指示我们用

$$U \in H_0^1(\Omega) \tag{22.15}$$

代替(22.11)，并试图寻求满足(22.10)的这样一个函数 U (到现在为止，我们只在 $\lambda=1$ 的情形做了此事). 在下一节中，我们将完善地描述这个问题的解. 下面，我们马上就要说到这个解没有回答我们的所有问题. 例如，关于我们能够处理的开集 Ω 的类型的限制，即条件(22.5)和(22.6)，是很窄的：平面中的正方形就被排除在外. 在问题(22.10)—(22.15)的解中，第二个条件(22.6)差不多是多余的. 但是我们必须强调，一旦我们把它去掉，那么在原来的边界条件(22.11)和新的边界条件(22.15)之间的联系将会变得不清楚了. 例如，当 Ω 是平面中的正方形和 $U\in C^0(\overline{\Omega})$ 时，此联系是什么？当数据 f 和 g 是连续的时候，我们如何得到 Dirichlet 问题的解呢(并且，这个解从经典的观点来看也是可以接受的)？在下面几节中我们将讨论这些和其它一些有关的问题.

作为本节的结尾，我们回想到在 Sobolev 空间的框架中，更明确一些，即在形式(22.10)—(22.15)中的 Dirichlet 问题(22.2)—(22.3)的重新解释通常称为此 Dirichlet 问题的变分形式. 不难发现其理由. 我们来介绍下述记号，今后将用到它：

$$a_\lambda(U,V)=\int_\Omega (\operatorname{grad} U)\cdot(\operatorname{grad} \overline{V})\,dx+\lambda\int_\Omega U\overline{V}\,dx, \tag{22.16}$$
$$U,\ V\in H^1(\Omega).$$

注意, 如果 $\varphi\in C_c^\infty(\Omega)$, 则

$$\langle F,\ \bar{\varphi}\rangle=\int_\Omega f\bar{\varphi}dx-a_\lambda(\tilde{g},\ \varphi).$$

这样, 我们的弱问题(22.10)—(22.15)可以重新叙述如下:

问题 22.1 寻求 $U\in H_0^1(\Omega)$, 使得 $C_c^\infty(\Omega)$ 上的反线性泛函

$$\varphi\mapsto\left\{a_\lambda(U+\tilde{g},\ \varphi)-\int_\Omega f\bar{\varphi}dx\right\} \tag{22.17}$$

恒等于零.

由于 $\tilde{g}$ 的性质, 形式(22.17)对于范数 $\|\ \ \|_1$ 是连续的——正如已经指出的那样; 因而可用唯一的方式把它延拓到 $H_0^1(\Omega)$ 上.

为了简单起见, 现在我们局限于实值函数和实值广义函数(分别处理实部和虚部可以解决复的情形). 此时泛函(22.17)就是(非线性)泛函

$$Q(V)=\frac{1}{2}a_\lambda(V,\ V)+a_\lambda(\tilde{g},\ V)-\int_\Omega fVdx \tag{22.18}$$

在 $H_0^1(\Omega)$ 的点 U 处的 *Fréchet* 导数. 事实上, (22.17) 在 φ 处的值等于

$$\frac{d}{dt}Q(U+t\varphi)\big|_{t=0}. \tag{22.19}$$

(22.19)为零是 Q 在 U 处有一极值的必要条件. 令 t 是任意实数, w 是 $H_0^1(\Omega)$ 的任意元素. 我们有

$$Q(U+tw)=\frac{1}{2}a_\lambda(U,\ U)+a_\lambda(\tilde{g},\ U)-\int_\Omega fUdx$$
$$+t\left\{a_\lambda(U,\ w)+a_\lambda(\tilde{g},\ w)-\int_\Omega fwdx\right\}+\frac{t^2}{2}a_\lambda(w,\ w),$$

即, 由于(22.17)等于零, 有

$$Q(U+tw)-Q(U)=\frac{t^2}{2}a_\lambda(w,\ w), \tag{22.20}$$

我们断言, 当 $tw\neq0$ 时它是严格正的. 当 $\lambda>0$ 时此断言是清楚的. 当 $\lambda=0$ 时, $a_\lambda(w,\ w)=0$ 等价于 $\operatorname{grad}w=0$, 即 $w=\text{const}$, 由命题 22.2, 这与 $w\in H_0^1(\Omega)$ 矛盾, 自然, 除非 $w\equiv0$. 这样, 如果 $(\lambda-\Delta)U=F$ 的解 $U\in H_0^1(\Omega)$ 存在, 那么它是泛函 $Q(V)$ 的严格

极小. 因而,我们的弱问题 (22.10)—(22.15) 可被看作变分学中的一个问题.

习 题

22.1 令 Ω 是实直线 $\mathbf{R}^1$ 中的一个有界开区间. 证明, 每个函数 $u\in H_0^1(\Omega)$ 是一个在 Ω 的边界点处等于零的绝对连续函数.

22.2 令 Ω 是习题 22.1 中的开区间. 证明, $H^1(\Omega)$ 是 $H_0^1(\Omega)$ 和限制于 Ω 的仿射函数 $h(x)=Ax+B$ (A, B 是复常数)空间的直接和.

22.3 令 Ω 是平面中的一个开圆盘, 圆心在原点, 半径 $R>0$. 证明, $H^1(\Omega)$是形如

$$u(x, y)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m(r)e^{im\theta} \quad (x+iy=re^{i\theta}) \tag{22.21}$$

的函数的空间,这些函数的 Fourier 系数有下述一些性质:

(22.22) 对于每个 $m\in\mathbf{Z}$, $c_m(r)$ 在开区间 $0<r<R$ 中是 r 的局部可积函数,并且其广义导数 $c_m'(r)$ 亦然;

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\int_0^R |c_m(r)|^2 r dr<+\infty; \tag{22.23}$$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\int_0^R \left(r|c_m'(r)|^2+\frac{m^2}{r}|c_m(r)|^2\right)dr<+\infty. \tag{22.24}$$

22.4 用与习题 22.3 中相同的记号, Fourier 表达式 (22.21) 和性质 (22.22)至(22.24), 证明, 空间 $C^\infty(\overline{\Omega})$($\mathbf{R}^2$ 中的 C^∞ 函数在 Ω 上的限制的空间)在 $H^1(\Omega)$ 中稠,并证明 $H^1(\Omega)$ 是 $H^1(\mathbf{R}^2)$ 在到 Ω 的限制映射下的像.

22.5 用与习题 22.3 中相同的记号. 令 $u\in C_c^\infty(\Omega)$ 由(22.21)给出. 从条件(22.23)和(22.24)推导,如果 $0<r_0\leqslant R$, 则我们有

$$r_0|c_m(r_0)|^2\leqslant 2\left|\operatorname{Re}\int_{r_0}^R \overline{c_m(r)}c_m'(r)rdr\right|+\frac{1}{r_0}\int_{r_0}^R |c_m(r)|^2 rdr, \tag{22.25}$$

并且,由此得到,给定 $H_0^1(\Omega)$ 的任一元素 u, 则其系数 $c_m(r)$ ($m\in\mathbf{Z}$) 在半闭区间]$0, R$]中是 r 的连续函数,当 $r\to R$ 时它收敛于零.

22.6 用习题 22.5 和 22.6 中的结果, 证明当 u 是 $H^1(\Omega)$ 中的一个任意函数时,它的 Fourier 系数 $c_m(r)$ 在半开区间]$0, R$]中是连续函数;并且, $u\in H_0^1(\Omega)$ 当且仅当对所有 $m\in\mathbf{Z}$, 有 $c_m(R)=0$.

22.7 用与习题 22.3 中相同的记号. 令 $u\in C_0^\infty(\Omega)$ 由(22.21)给出. 从(22.24)推导,如果 $0\leqslant r_0\leqslant R$, 则

$$m|c_m(r_0)|^2\leqslant\int_{r_0}^R\left(r|c_m'(r)|^2+\frac{m^2}{r}|c_m(r)|^2\right)dr. \tag{22.26}$$

由此得到，对每个 $u\in H_0^1(\Omega)$，如果 $m\neq 0$，则 $c_m(r)$ 在闭区间 $[0, R]$ 中是连续函数，并且（参看习题 22.6），当 $u\in H^1(\Omega)$ 时此事实亦真.

假设 $R<1$ 并取 $u(x)=[\log(1/r)]^\alpha$. 证明，若 $0<\alpha<\frac{1}{2}$，则 $u\in H^1(\Omega)$.

22.8 从习题 22.7 推导，对于某个常数 $C>0$，对于所有的 r，$\frac{R}{2}\leqslant r\leqslant R$，和所有的 $u\in H^1(\Omega)$，有

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty}(1+m^2)^{1/2}|c_m(r)|^2\leqslant C\|u\|_{H^1(\Omega)}. \tag{22.27}$$

22.9 用习题 22.3 中相同的记号. 令 $u\in H^1(\Omega)$ 由 (22.21) 给出. 证明

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty}(1+m^2)^{1/2}|c_m(R)-c_m(r)|^2\to 0 \quad \text{当 } r\to R \text{ 时}(0<r<R), \tag{22.28}$$

由此推导，如果记 $u^\#(r, \theta)=u(x, y)$，则有

$$\int_0^{2\pi}|u^\#(R, \theta)-u^\#(r, \theta)|^2 d\theta\to 0 \quad \text{当 } r\to R \text{ 时}. \tag{22.29}$$

[提示：证明当 $u\in C^\infty(\bar{\Omega})$ 时 (22.28) 是对的，然后利用 $C^\infty(\bar{\Omega})$ 在 $H^1(\Omega)$ 中的稠性和不等式 (22.27).]

22.10 令 S^1 表示单位圆周，θ 表示 S^1 中的变量，$H^{1/2}(S^1)$ 表示形如

$$g(\theta)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}c_m e^{im\theta} \tag{22.30}$$

的函数的空间，这些函数使得

$$\|g\|_{1/2}^2=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}(1+m^2)^{1/2}|c_m|^2<+\infty. \tag{22.31}$$

证明，如果 $H^{1/2}(S^1)$ 包含在 S^1 上的连续函数空间 $C^0(S^1)$（赋予极大模范数）中，那么 S^1 上的 *Radon* 测度空间 $\mathscr{M}(S^1)$ 包含在 S^1 上的这样的广义函数 v 的空间中：

$$v=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}v_m e^{im\theta}, \tag{22.32}$$

并且

$$\|v\|_{-1/2}^2=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}(1+m^2)^{-1/2}|v_m|^2<+\infty \tag{22.83}$$

[用 $H^{-1/2}(S^1)$ 表示这个空间]. 证明，S^1 中在原点处的 Dirac 测度 δ 不满足 (22.33).[1)]

22.11 令 $g\in H^{1/2}(S^1)$（用习题 22.10 的概念和记号）由 (22.30) 给出. 令

$$u=c_0+\sum_{m=1}^{+\infty}(c_m z^m+c_{-m}\bar{z}^m), \quad z=x+iy, \ \bar{z}=x-iy. \tag{22.34}$$

1) 译者注：本题的含义为：$H^{1/2}(S')\subset C^0(S')$ 是不成立的. 这由 $\delta\in\mathscr{M}(S')$ 及它不满足 (22.33) 即可知. 习题 22.11 也指出了这一点.

用在习题 22.3 中证明了的判定准则[和条件 (22.31)]，证明 $u\in H^1(\Omega)$，且在 Ω 中满足 $\Delta u=0$ (这里取 $R=1$，即，取 Ω 为平面中的单位圆盘)．由此及由上面的习题推导，$H^{1/2}(S^1)$ 恰为属于 $H^1(\Omega)$ 的函数的"边界值"的空间，并推导，不是所有这些边界值在 S^1 上都是连续的.

22.12 令 $u\in H_0^1(\Omega)$ 是实值的(Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个任意的有界开子集)，θ 是任一大于零的数.证明，函数 $x\mapsto \sup(u(x)-\theta, 0)$属于 $H_0^1(\Omega)$．从这个事实推导函数 $|u|$ 属于 $H_0^1(\Omega)$.

23. 弱问题的解. 强制形式. 一致椭圆性

令 Ω 表示 $\mathbf{R}^n$ 的一个任意的开子集．自然内射

$$C_c^\infty(\Omega)\subsetneq H_0^1(\Omega)$$

可被转置；因为它有稠的象，它的转置就是一个连续线性内射

$$(H_0^1(\Omega))'\subsetneq \mathscr{D}'(\Omega).$$

因而我们可以把 $H_0^1(\Omega)$ 的对偶空间等同于 Ω 中广义函数的某个空间．更确切些：

命题 23.1 空间 $H_0^1(\Omega)$ 的对偶空间是 Ω 中某些广义函数组成的空间 $H^{-1}(\Omega)$，这些广义函数等于 $L^2(\Omega)$ 中函数的阶数 $\leqslant 1$ 的导数的一个(有限)和.

证明 Ω 中的一个广义函数 T 定义 $H_0^1(\Omega)$ 上的一个连续线性泛函，当且仅当线性形式 $\varphi\mapsto\langle T, \varphi\rangle$ 在 $C_c^\infty(\Omega)$ 上对于范数 $\|\ \|_1$ 是连续的．如果

$$T=f_0+\sum_{j=1}^n\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)f_j,\quad f_j\in L^2(\Omega)\quad (0\leqslant j\leqslant n),$$

则显然它满足后者．反之，假设线性泛函 $\varphi\mapsto\langle T, \varphi\rangle$ 可以被连续地延拓到 $H_0^1(\Omega)$ 上．由 Riesz 表示定理我们知道，存在 $H_0^1(\Omega)$ 的唯一的元素 V，使得

$$(\varphi, V)_1=\langle T, \varphi\rangle,\quad \varphi\in C_c^\infty(\Omega).$$

其左端可改写为 $\langle(1-\Delta)\overline{V}, \varphi\rangle$，由此我们推得

$$T=(1-\Delta)\overline{V}. \tag{23.1}$$

此时只需注意 $\Delta\bar{V}=\sum_{j=1}^{n}\partial/\partial x^j(\partial\bar{V}/\partial x^j)$ 是 L^2 函数 $(\partial\bar{V}/\partial x^j)$ 的一阶导数之和. 证毕.

命题 23.2 从 $H_0^1(\Omega)$ 到其对偶空间 $H^{-1}(\Omega)$ 上的典则反线性等距映射即为映射 $V\mapsto(1-\Delta)\bar{V}$.

本质上这就是(23.1)的含义. 我们把其证明的细节留给读者. 命题 23.2 有下述推论:

推论 23.1 $C_c^\infty(\Omega)$ 在 $H^{-1}(\Omega)$ 中稠.

事实上, $C_c^\infty(\Omega)$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中稠, 并由 $(1-\Delta)$ 映入自身.

推论 23.1 指出, $H^{-1}(\Omega)$ 是 $C_c^\infty(\Omega)$ 在 $H^{-1}(\mathbf{R}^n)$ 中的闭包.

注 23.1 如果暂时回到假设(22.5)至(22.8), 我们看到方程(22.10)的右端

$$F=f-(\lambda-\Delta)\tilde{g}$$

属于 $H^{-1}(\Omega)$.

目前, 我们希望解决的问题是下述问题:

问题 23.1 给定任何 $F\in H^{-1}(\Omega)$, 求 $U\in H_0^1(\Omega)$, 使得

$$(-\Delta+\lambda)U=F. \tag{23.2}$$

方程(23.2)等价于[参看(22.16)]

$$a_\lambda(U,V)=\langle F,\bar{V}\rangle,\quad V\in H_0^1(\Omega). \tag{23.3}$$

为了解问题 23.1, 我们将把 Riesz 表示定理和下述结果结合起来:

命题 23.3 当 $\lambda>0$ 时, $a_\lambda(U,V)$ 是 $H^1(\Omega)$ 上的正定 Hermite 形式. 由 $a_\lambda(U,V)$ 在 $H^1(\Omega)$ 上确定的拓扑向量空间结构不依赖于 λ. 特别地, 它与由 $a_1(U,V)=(U,V)_1$ 所确定的结构是一样的.

命题 23.4 假设 Ω 是有界的. 那么

$$a_0(U,V)=\int_\Omega(\operatorname{grad}U)\cdot(\operatorname{grad}\bar{V})\,dx$$

是 $H_0^1(\Omega)$ 上的正定 Hermite 形式, 它在 $H_0^1(\Omega)$ 上确定一个拓扑向量空间结构, 等价于由 $(U,V)_1$ 确定的结构.

命题 23.3 的证明 当 $\lambda>\mu>0$ 时,

$$a_\mu(U,U)\leqslant a_\lambda(U,U)\leqslant(\mu^{-1}\lambda)a_\mu(U,U),$$

由此，即得到我们的论断.

命题 23.4 的证明 显然，$a_0(U,U)\leqslant(U,U)_1$. 令 $\varphi\in C_c^\infty(\Omega)$ 是任意的. 我们有

$$\varphi(x)=\int_{-\infty}^{x^n}\frac{\partial\varphi}{\partial x^n}(x',t)dt,\quad x'=(x^1,\cdots,x^{n-1}),$$

因而

$$\left\{\int|\varphi(x)|^2dx'\right\}^{1/2}\leqslant\int_{-\infty}^{x^n}\left\{\int\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x^n}(x',t)\right|^2dx'\right\}^{1/2}dt$$

$$\leqslant(x^n-a)^{1/2}\left\{\int\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x^n}\right|^2dx\right\}^{1/2},$$

这是应用 Cauchy-Schwarz 不等式，并假设 Ω 的 x^n 投影包含在(紧)区间$[a,b]$中而得到的. 最后，将两端的平方关于 x^n 从 a 到 b 积分，我们得到

$$\left\{\int|\varphi|^2dx\right\}^{1/2}\leqslant\frac{(b-a)}{\sqrt{2}}\left\{\int\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x^n}\right|^2dx\right\}^{1/2}. \tag{23.4}$$

由此得到

$$\|\varphi\|_0\leqslant C(\Omega)\|\mathrm{grad}\,\varphi\|_0, \tag{23.5}$$

其中 $\|\ \|_0$ 表示 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 中的范数; 这样，(23.5)就蕴涵着

$$\|\varphi\|_1^2\leqslant[1+C^2(\Omega)]a_0(\varphi,\varphi).$$

很清楚，此不等式可被拓广到所有的 $\varphi\in H_0^1(\Omega)$，命题得证.

注 23.2 在命题 23.4 的证明中，我们只用到 Ω 在 x^n 方向是有界的这一事实——由于整个情形的旋转不变性，这就是说，只需 Ω 在某个方向是有界的即可.

注 23.3 命题 23.3 蕴涵着，当 λ 严格正时，$a_\lambda(U,V)$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 上确定一个等同于由 $(U,V)_1$ 确定的拓扑向量空间结构.

一方面从命题 23.3，而另一方面从命题 23.4，我们推得，当 $H_0^1(\Omega)$ 中赋予由 $a_\lambda(U,V)$ 所确定的结构时(假设当 $\lambda=0$ 时 Ω 是有界的)，$H_0^1(\Omega)$ 的对偶空间等同于 $H^{-1}(\Omega)$. 我们立即能验证，Hilbert 空间 $(H_0^1(\Omega),a_\lambda)$ 的典则反线性等距的确是映射 $V\mapsto(\lambda-\Delta)\overline{V}$. 这样，我们得到

定理 23.1 令 λ 是严格正的. 则微分算子

$$\lambda-\Delta$$

确定一个从 $H_0^1(\Omega)$ 到 $H^{-1}(\Omega)$ 上的同构.

若 Ω 是有界的,则上述结果对于 Laplace 算子 Δ 也是对的.

由于注 23.1, 我们已经证明了: 问题 22.1, 也就是问题 (22.10)—(22.15), 有一个唯一解.

容易看到, 定理 23.1 可推广到很大一类形如(22.1)的算子上去. 事实上, 它是否能推广取决于应该起定理 23.1 证明中的 a_λ 的作用的那个拟双线性 (sesquilinear) 形式的性质. 为了确定所论的那个拟双线性形式, 我们改写算子 L 如下:

$$L=\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^k}a^{jk}(x)\frac{\partial}{\partial x^j}+\sum_{j=1}^{n}\tilde{b}^j(x)\frac{\partial}{\partial x^j}+c(x), \tag{23.6}$$

其中
$$\tilde{b}^j(x)=b^j(x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial a^{jk}}{\partial x^k}(x).$$

此时, 用公式

$$a(u,\ v)=-\sum_{j,k=1}^{n}\int_\Omega a^{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x^j}(x)\frac{\partial \bar{v}}{\partial x^k}(x)dx+\sum_{j=1}^{n}\int_\Omega \tilde{b}^j(x)\frac{\partial u}{\partial x^j}(x)\bar{v}(x)dx+\int_\Omega c(x)u(x)\bar{v}(x)dx \tag{23.7}$$

定义与 L 相联系的拟双线性形式就是自然的了. 显然, 如设 a^{jk}, $\tilde{b}^j$, c 都属于 $L^\infty(\Omega)$, 那么 $a(u,\ v)$ 将是 $H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)$ 上的一个连续拟双线性形式; 这就是说, 对于某个常数 $C>0$, 它将满足

$$|a(u,\ v)|\leqslant C\|u\|_1\|v\|_1 \quad 对于所有的\ u,\ v\in H^1(\Omega). \tag{23.8}$$

在定理 23.1 的证明中决定性的事实是, 对某个 $c_1>0$, 我们有

$$a_\lambda(u,\ u)\geqslant c_1\|u\|_1^2 \quad 对于所有的\ u\in H_0^1(\Omega).$$

对于更一般的形式 $a(u,\ v)$, 我们需要类似的事实. 事实上只需有

$$|a(u,\ u)|\geqslant c_1\|u\|_1^2 \quad 对于所有的\ u\in H_0^1(\Omega)\ (c_1>0). \tag{23.9}$$

由于上述论证结论的深刻性, 把论证作得抽象些是有价值的. 考虑一个 Hilbert 空间 $\mathbf{E}$, 它具有内积 $(,)_\mathbf{E}$ 和范数 $\|\ \|_\mathbf{E}$; 并考虑 $\mathbf{E}\times\mathbf{E}$ 上的一个连续拟双线性形式 $a(\mathbf{u},\ \mathbf{v})$. 映射

$$\mathbf{u}\mapsto a(\mathbf{u},\ \cdot)$$

定义一个从 $\mathbf{E}$ 到它的反对偶 $\overline{\mathbf{E}}'$ ($\mathbf{E}$ 上的连续反线性泛函的空间)上的有界线性算子 A. 下述定义提示了条件(23.9)的重要性.

定义 23.1 形式 $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ 称为强制的 (coercive), 如果存在一常数 $c_1>0$, 使得

(23.10)† $\quad |a(\mathbf{u}, \mathbf{u})|\geqslant c_1\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{E}}^2$ 对所有的 $\mathbf{u}\in\mathbf{E}$.

此时我们有下面的简单结果, 称为 *Lax-Milgram* 定理.

引理 23.1 如果形式 $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ 是强制的, 那么算子 A 是从 $\mathbf{E}$ 到 $\overline{\mathbf{E}}'$ 上的一个同构.

我们将用 $\langle\mathbf{u}', \mathbf{v}\rangle^-$ 表示 $\mathbf{E}$ 和 $\overline{\mathbf{E}}'$ 之间的反对偶性括号. 由 A 的定义, 我们有 $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})=\langle A\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle^-$, $\mathbf{u}, \mathbf{v}\in\mathbf{E}$. 令 A^* 表示 A 的反转置: $\langle A\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle^-=\langle A^*\mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle^-$.

引理 23.1 的证明 从(23.10)我们得到, 对每个 $\mathbf{u}\in\mathbf{E}$, 有

(23.11) $\quad \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{E}}\leqslant c_1^{-1}\|A\mathbf{u}\|_{\overline{\mathbf{E}}'}, \quad \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{E}}\leqslant c_1^{-1}\|A^*\mathbf{u}\|_{\overline{\mathbf{E}}'}$,

它即蕴涵着我们的论断(第一个估计指出 A 是内射的且有闭值域, 第二个估计指出此值域是稠的). 证毕.

我们回到由(23.7)给出的形式 $a(u, v)$ 这一特殊情形. 通过公式 $\langle u', v\rangle^-=\langle u', \bar{v}\rangle$, $u'\in H^{-1}(\Omega)$, $v\in H_0^1(\Omega)$, $\bar{v}$ 是 v 的复共轭, 我们可以把 $H_0^1(\Omega)$ 的对偶空间 $H^{-1}(\Omega)$ 等同于它的反对偶空间. 注意, 在 a^{jk}, $\tilde{b}^j$, $c\in L^\infty(\Omega)$ 这样的假设下, L 是连续地从 $H_0^1(\Omega)$ 到 $H^{-1}(\Omega)$ 中的: 这只需看其表达式(23.6)即可明白. 如果把 $a(u, v)$ 限制于 $u, v\in C_c^\infty(\Omega)$, 那就立即能验证与 $a(u, v)$ 相联系的算子 A: $H_0^1(\Omega)\to H^{-1}(\Omega)$ 等同于 L. 这样, 我们已经得到了

定理 23.2 假设表达式(23.6)中 L 的系数 a^{jk}, $\tilde{b}^j$, c 都属于 $L^\infty(\Omega)$, 并设形式(23.7)在 $H_0^1(\Omega)$ 上是强制的.

那么, L 是从 $H_0^1(\Omega)$ 到 $H^{-1}(\Omega)$ 上的一个同构.

我们经常把 L 的表达式(23.6)称为 L 的变分形式; 这一名称的合理性, 当然在于如同 § 22 末尾的注释.

---

† 许多作者把使得 $\operatorname{Re} a(\mathbf{u}, \mathbf{u})+\lambda_0\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}}^2\geqslant c_1\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{E}}^2$ 成立的形式 $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ 称为强制的, 其中 λ_0 是一非负常数, $\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}}$ 是 $\mathbf{E}$ 上的一个弱于 $\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{E}}$ 的范数[例如, 在 $H^1(\Omega)=\mathbf{E}$ 上的 L^2 范数]. 对于我们的需要而言, 定义 23.1 既简单而又完全够用了.

在结束这一节的时候，我们来指出关于形式 $a(u, v)$ 的强制性的假设有一与微分算子 L 的主项有关的重要结论．事实上，取

$$u(x)=\varphi(x)e^{ix\cdot\xi},\ \xi\in\mathbf{R}_n,\ \varphi\in C_c^\infty(\Omega).$$

如果回到(23.7)，那么对于大的 $|\xi|$，我们就得到

$$a(u, u)=-\sum_{j,k=1}^{n}\int a^{jk}(x)\xi_j\xi_k|\varphi(x)|^2dx+O(|\xi|).$$

另一方面，

$$\|u\|_1^2=|\xi|^2\int|\varphi|^2dx+O(|\xi|).$$

应用(23.9)并使 $|\xi|$ 趋于 $+\infty$，则有(令 $\dot{\xi}=\xi/|\xi|$)

$$(23.12)\qquad c_1\int|\varphi|^2dx\leqslant\left|\int\sum_{j,k=1}^{n}a^{jk}(x)\dot{\xi}_j\dot{\xi}_k|\varphi(x)|^2dx\right|.$$

(23.12)必须对任何 $\varphi\in C_c^\infty(\Omega)$ 成立，不难看出，它蕴涵着

$$c_1\leqslant\left|\sum_{j,k=1}^{n}a^{jk}(x)\dot{\xi}_j\dot{\xi}_k\right|\quad 在\ \Omega\ 中几乎处处成立,$$

由齐次性，这就是说

(23.13)

$$c_1|\xi|^2\leqslant\left|\sum_{j,k=1}^{n}a^{jk}\xi_j\xi_k\right|\quad 对所有\ \xi\in\mathbf{R}_n\ 和几乎所有的\ x\in\Omega.$$

事实上，令

$$\alpha(x, \xi)=\sum_{j,k=1}^{n}a^{jk}(x)\dot{\xi}_j\dot{\xi}_k.$$

把 $\dot{\xi}$ 任意地固定在 $\mathbf{R}_n$ 的单位球面上，我们可以在 $L^\infty(\Omega)$ 中找到一个函数序列 α_ν，它在 $L^\infty(\Omega)$ 中收敛于 $\alpha(\cdot, \xi)$，并有下面的性质：对于每个 ν，α_ν 在 Ω 的一零测度闭子集 N_ν 的余集中是连续的．从(23.12)推得，对每个 $\varepsilon>0$，存在 $\nu(\varepsilon)$，使得 $\nu>\nu(\varepsilon)$ 蕴涵着对所有的 $\varphi\in C_c^\infty(\Omega)$，有

$$(23.14)\qquad (c_1-\varepsilon)\int|\varphi|^2dx\leqslant\int|\alpha_\nu||\varphi|^2dx.$$

固定 $\nu>\nu(\varepsilon)$；令 x_0 是开集 $\Omega\backslash N_\nu$ 的任意一点；取 φ_μ 为支集在 $\Omega\backslash N_\nu$ 中的 $C_c^\infty(\Omega)$ 的函数序列，并令 $|\varphi_\mu|^2$ 收敛于在 x_0 处的 Dirac 测度 $\delta(x_0)$．从(23.14)立即得到：

$$(23.15)\qquad c_1-\varepsilon\leqslant|\alpha_\nu(x_0)|,\quad \forall x_0\in\Omega\backslash N_\nu.$$

在所有 N_ν 的并集 N 的余集中，α_ν 收敛于(对于本性上确界范数)

$\alpha(\cdot,\ \xi)$. 因为 $\mathrm{meas}(N)=0$, 即得到(23.13).

条件(23.13)很重要,因而把它做成一定义:

定义 23.2　如果(23.13)成立,则微分算子 L 称为一致椭圆的.

注 23.4　对于保证拟双线性形式 $a(u,\ v)$ 是强制的而言,条件(23.13)不是充分的. 取 $L=-\Delta+\lambda$, 这里 $\lambda<0$ 而 $|\lambda|$ 很大. 则相应的 $a_\lambda(u,\ v)$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 上不是强制的. 然而,我们有:

注 23.5　当 a^{jk} 组成一个 *Hermite* 矩阵, 即当 $a^{kj}=\overline{a^{jk}}$ 时,用 $\alpha(x,\ \xi)$表示的那个函数将总是实的(对于 $\xi\in\mathbf{R}_n$). 如果它在 $\mathbf{R}_n\setminus\{0\}$中不等于零,则它在 $\mathbf{R}_n$ 中必定保持相同的符号,除非 $n=1$(事实上, $\mathbf{R}_n\setminus\{0\}$ 是连通的,除非 $n=1$). 由此即得,作为 $\mathbf{R}_n$ 上的一个二次型, $\alpha(x,\ \xi)$ 不是正定的就是负定的.

命题 23.5　令 $a^{jk}=\overline{a^{kj}}$ $(1\leqslant j,\ k\leqslant n)$ 属于 $L^\infty(\Omega)$; 令 $c\in L^\infty(\Omega)$ 是实值的. 并且假设

$$L=\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^k}a^{jk}(x)\frac{\partial}{\partial x^j}+c(x) \tag{23.16}$$

在 Ω 中是一致椭圆的,矩阵 $\{a^{jk}\}$ 在 Ω 中几乎处处是负定的.

那么,当对于几乎所有的 $x\in\Omega$ 有 $c(x)>c_0>0$ 时,形式(23.7)在 $H_0^1(\Omega)$ 上就是强制的. 当 Ω 是有界的而 $c(x)\geqslant 0$ 时,相同的结论亦真.

证明　从(23.13)我们推得,当 $u\in H_0^1(\Omega)$ 是实值时,有

$$c_1|\mathrm{grad}\,u|^2\leqslant-\sum_{j,k=1}^{n}a^{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x^j}\frac{\partial u}{\partial x^k},$$

因而,在 Ω 上积分,得

$$c_1\int_\Omega|\mathrm{grad}\,u|^2dx+c_0\int_\Omega|u|^2dx\leqslant a(u,\ u). \tag{23.17}$$

但是因为 $\{a^{jk}\}$ 是 Hermite 矩阵,所以当 $u,\ v\in H_0^1(\Omega)$ 是实值时,有 $a(u+iv,u+iv)=a(u,u)+a(v,v)$. 这样,对于复值$u\in H_0^1(\Omega)$, (23.17) 也成立. 为了得到命题23.5, 只需应用命题23.3和23.4.

习　题

（在下面 Ω 都表示 $\mathbf{R}^n$ 的一个有界开子集，除非有另外的说明．）

23.1　证明，存在一数 $\lambda_0<0$，使得(22.16)中定义的拟双线性形式 a_λ 对于所有的 $\lambda>\lambda_0$，在 $H_0^1(\Omega)$ 上都是强制的．当 $n=1$ 和 Ω 是实直线中有有限长度 l 的一个开区间时，计算 λ_0 的值．

23.2　令 λ_0 是习题 23.1 中所指出的数．证明，存在一函数 u 属于 $H_0^1(\Omega)$，使得在 Ω 中 $\Delta u=\lambda_0 u$．当 Ω 是有界区间的积

$$\Omega=\{x\in\mathbf{R}^n;\ a_j<x^j<b_j,\ j=1,\ \cdots,\ n\}$$

时，计算 λ_0．

23.3　令 Ω 是 $\mathbf{R}^2$ 中的开单位圆盘，并令 λ_0 是习题 23.1 中所指出的数，它与此 Ω 相应．证明 $\lambda_0=-s_0$，这里 s_0 是函数 $J_0(\sqrt{s})(s\geqslant 0)$ 的最小的零点，这里我们已经用标准的记号表示函数

$$J_0(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(z\sin\theta)d\theta. \tag{23.18}$$

证明，存在正数 x，使得 $J_0(x)=0$．

23.4　证明，如果 $n\geqslant 2$，则 $\mathbf{R}^n$ 中的调和函数在 Ω 上的限制形成 $H^1(\Omega)$ 的一个无限维线性子空间．由此推导，$H_0^1(\Omega)$ 在 $H^1(\Omega)$ 中有一拓扑补空间，其维数是无穷的．当 $n=1$ 和 Ω 是一有限区间时，类似的叙述是什么？

23.5　考虑复 Hilbert 空间 E(E 也可以是实的：论证本质上是一样的)和 E 的一线性子空间 Φ，在 Φ 上定义一范数 $|||\ |||$，它大于由 E 所诱导的范数．在积 $E\times\Phi$ 上给定一个拟双线性形式 $a(u,\ \phi)$，它有下述性质：

(23.19)　　对每个 $\phi\in\Phi$，$u\mapsto a(u,\ \phi)$ 是 E 上的一个连续线性形式．

证明 Lax-Milgram 引理（引理 23.1）的下述（有用的）推广：

引理 23.2　假设存在一常数 $c_0>0$，使得

$$c_0|||\phi|||^2\leqslant|a(\phi,\ \Phi)|\quad 对所有\ \phi\in\Phi. \tag{23.20}$$

那么，给定 Φ 上任意一个对于范数 $|||\ |||$ 连续的反线性形式 μ，存在 E 的一个元素 u，使得

$$a(u,\ \phi)=\mu(\phi)\quad 对所有\ \phi\in\Phi. \tag{23.21}$$

23.6　令 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个有界开子集．证明，对每个 $m=0,\ 1,\ \cdots$，$\lambda-\Delta$ $(\lambda\geqslant 0)$ 把 $H^{-m}(\Omega)$ 映到 $H^{-m-2}(\Omega)$ 上．描述其转置映射的值域和上核(cokernel)．

23.7　令 $\mathbf{R}_+^n$ 表示 $\mathbf{R}^n(n\geqslant 2)$中的开的半空间 $x^n>0$．证明，拟双线性形

式 $\int_{\mathbf{R}^n}(\operatorname{grad} u)\cdot(\operatorname{grad}\bar{v})dx$ 在 $H_0^1(\mathbf{R}_+^n)$ 上不是强制的.

23.8　令 $\mathcal{O}$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的一个开子集，由下式确定：

$$z>\left(1+\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right)^{1/2}$$

[$\mathbf{R}^3$ 中的变量用 (x, y, z) 表示]. 证明下述事实：

(i) 拟双线性形式 $\int_{\mathcal{O}}(\operatorname{grad} u)\cdot(\operatorname{grad}\bar{v})dx$ 在 $H_0^1(\mathcal{O})$ 上不是强制的；

(ii) 不存在属于 $H_0^1(\mathcal{O})$ 的 $\mathcal{O}$ 中的调和函数；

(iii) 存在 $\mathcal{O}$ 中的调和函数，在 $\bar{\mathcal{O}}$ 中连续，在 $\mathcal{O}$ 的边界上等于零(在这个边界中不包含无穷远点).

24. Sobolev 空间的更系统研究

如果我们希望研究弱 Dirichlet 问题的解的正规性(当我们加强数据的正规性假设时)，那么，引进高阶 Sobolev 空间，以及对任何 p, $1\leqslant p\leqslant+\infty$, 引进构作在 L^p 上的 Sobolev 空间是方便的.

定义 24.1　令 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的任一开子集. 用 $H^{m,p}(\Omega)$ 表示对于所有 $\alpha=(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)\in\mathbf{Z}_+^n$, $|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n\leqslant m$, 使得 $(\partial/\partial x)^\alpha u\in L^p(\Omega)$ 的函数 $u\in L^p(\Omega)$ 的空间.

偏导数 $(\partial/\partial x)^\alpha=(\partial/\partial x^1)^{\alpha_1}\cdots(\partial/\partial x^n)^{\alpha_n}$ 必须在广义函数的意义下理解. 通常对 $H^{m,p}(\Omega)$ 赋予范数

$$\|u\|_{m,p}=\Big\{\sum_{|\alpha|\leqslant m}\|(\partial/\partial x)^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p\Big\}^{1/p},\quad 1\leqslant p<+\infty,$$

$$\|u\|_{m,\infty}=\sup_{|\alpha|\leqslant m}\|(\partial/\partial x)^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

命题 24.0　$H^{m,p}(\Omega)$ 是 Banach 空间. 如果 $1<p<+\infty$, 则它是自反 Banach 空间. 如果 $p=2$, 则它是 Hilbert 空间.

证明　第一个论断，即关于 $H^{m,p}(\Omega)$ 的完备性，象命题 22.1 那样证明. 我们把它留给读者. 令 $N(m, n)$ 是使得 $|\alpha|\leqslant m$ 的 n 数组 α 的数目. 存在一个从 $H^{m,p}(\Omega)$ 到 $(L^p(\Omega))^{N(m,n)}$ 的一个闭线性子空间上的自然内射，即

(24.1)
$$u\mapsto((\partial/\partial x)^\alpha u)_{|\alpha|\leqslant m}.$$

我们知道，当 $1<p<+\infty$ 时 $L^p(\Omega)$ 是自反的，并知道自反 Banach 空间的有限积和自反 Banach 空间的闭线性子空间都是自反 Banach 空间，由此得到第二个论断.

第三个论断是明显的. 我们指出，当 $p=2$ 时，人们通常记

$$H^m(\Omega) \quad 代替\ H^{m,2}(\Omega).$$

在 $H^m(\Omega)$ 中，范数 $\| \ \|_{m,2}=\| \ \|_m$ 与 Hermite 积

$$(u, v)_m=\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_\Omega (\partial/\partial x)^\alpha u(\partial/\partial x)^\alpha \bar{v}dx$$

联系在一起，当 $m=1$ 时它与 $(u, v)_1$ 相符. 证毕.

命题 24.1 当 $1\leqslant p<+\infty$ 时，$C^\infty(\Omega)\cap H^{m,p}(\Omega)$ 在 $H^{m,p}(\Omega)$ 中稠

证明 令 $\{\Omega_\nu\}$ $(\nu=0, 1, \cdots)$ 是 Ω 的相对紧开子集序列，它们的并集等于 Ω，并使得对每个 $\nu=0, 1, \cdots$, $\overline{\Omega}_\nu\subset\Omega_{\nu+1}$. 令 $\Omega_1'=\Omega_1$，当 $\nu>1$ 时令 $\Omega_\nu'=\Omega_\nu-\overline{\Omega}_{\nu-2}$. 显然，$\Omega_\nu'$ $(\nu=1, 2, \cdots)$ 构成 Ω 的一个开覆盖. 注意，至多两个 Ω_ν' 有非空的交集. 现在令 $\{\zeta_\nu\}$ $(\nu=1, 2, \cdots)$ 是附于覆盖 $\{\Omega_\nu'\}$ 的 C^∞ 单位分解（ζ_ν 的支集是紧的）. 令 $\rho\in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$, $\rho\geqslant 0$, $\int_{\mathbf{R}^n}\rho\, dx=+1$，并如通常所做的，对 $\varepsilon>0$，令 $\rho_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-n}\rho(x/\varepsilon)$. 对每个 ν，选择一数 $\varepsilon_\nu>0$，使得 supp ζ_ν 的 ε_ν 级邻域的闭包包含于 Ω_ν' 中. 此时记 $v_\nu=\rho_{\varepsilon_\nu}*(\zeta_\nu u)$；自然，$v_\nu\in C_c^\infty(\Omega_\nu')$. 现在要用下述引理:

引理 24.1 令 $1\leqslant p<+\infty$. 如果 $f\in L^p(\mathbf{R}^n)$，则当 $\varepsilon\to+0$ 时 $\rho_\varepsilon*f$ 在 $L^p(\mathbf{R}^n)$ 中收敛于 f.

证明 由关于卷积的 Hölder 不等式(TVS, D&K, 定理 26.1)，我们有

$$\|\rho_\varepsilon*f\|_{L^p}\leqslant\|\rho_\varepsilon\|_{L^1}\|f\|_{L^p}.$$

但是 $\|\rho_\varepsilon\|_{L^1}=\int\rho_\varepsilon(x)dx=\int\rho(x)dx=1$. 这就指出，当 ε 从 1 变动到 0 时(不包括 0)，卷积运算 $\rho_\varepsilon*$ 构成 L^p 上线性算子的一个等度连续的(即有界的)集合. 对于这样一个集合，在 L^p 上的点态收敛与在 L^p 的任一稠子集上的点态收敛是等价的. 这样，只需证明对

于 L^p 的某个适当的稠子集中的每个 f, $\rho_\varepsilon * f$ 在 L^p 中收敛于 f. 但是，当我们把这个子集取为 $C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ [或 $C_c^0(\mathbf{R}^n)$] 时，此论断即为明显的了. 证毕.

由于引理 24.1, 给定任何 $\varepsilon>0$, 我们可以选取 ε_ν 如此小，以便对每个 n 数组 α, $|\alpha|\leqslant m$, 有

$$\|(\partial/\partial x)^\alpha\{(\zeta_\nu u)-v_\nu\}\|_{L^p}$$
$$=\|(\partial/\partial x)^\alpha(\zeta_\nu u)-\rho_{\varepsilon_\nu}*(\partial/\partial x)^\alpha(\zeta_\nu u)\|_{L^p}\leqslant\varepsilon 2^{-\nu},$$

由此即得，我们可以选取 ε_ν 这样小，使得

$$\|\zeta_\nu u-v_\nu\|_{m,p}\leqslant\varepsilon 2^{-\nu-1}.$$

令 $v=\sum_{\nu=1}^{+\infty}v_\nu$. 因为对于每个 $\nu>1$, v_ν 的支集至多只与 $v_{\nu-1}$ 和 $v_{\nu+1}$ 的支集相交，因而 v 显然属于 $C^\infty(\Omega)$. 并且，当 K 是 Ω 的任一紧子集时，存在 $\nu(K)$, 使得当 $\nu\geqslant\nu(K)$ 时 $\zeta_\nu u$ 和 v_ν 在 K 的一邻域中恒等于零. 因而，

$$\left\{\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_K|(\partial/\partial x)^\alpha(u-v)|^p dx\right\}^{1/p}$$
$$\leqslant\sum_{\nu<\nu(K)}\left\{\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_K|(\partial/\partial x)^\alpha(\zeta_\nu u-v_\nu)|^p dx\right\}^{1/p}$$
$$\leqslant\sum_{\nu<\nu(K)}\|\zeta_\nu u-v_\nu\|_{m,p}\leqslant\varepsilon.$$

这就证明了我们所要证的一切：首先，$u-v$, 因而 v, 属于 $H^{m,p}(\Omega)$; 其次，u 是一个如 v 这样的函数的序列在 $H^{m,p}(\Omega)$ 中的极限. 证毕.

注 24.0 命题 24.1 指出，$H^{m,p}(\Omega)$ 是 $C^\infty(\Omega)\cap H^{m,p}(\Omega)$ 关于范数 $\|\ \|_{m,p}$ 的完备化的“具体的”实现(当 p 是有限的时候).

注 24.1 如果考察一下命题 24.1 的证明，并作假设: $H^{m,p}(\Omega)$ 的元素 u 的支集是紧的，那么逼近元素 v 的支集也是紧的:

$$v\in C_c^\infty(\Omega).$$

最后我们指出，当 $p=+\infty$ 时命题 24.1 显然是错的: 当 $m=0$ 时它是错的.

定义 24.2 用 $H_0^{m,p}(\Omega)$ 表示 $C_c^\infty(\Omega)$ 在 $H^{m,p}(\Omega)$ 中的闭包 [当

$p=2$ 时用 $H_0^m(\Omega)$ 表示].

我们指出下面显然的包含关系(它导致自然内射——有界线性的,具有范数$\leqslant 1$):

$$H^{m,p}(\Omega)\subset H^{m',p}(\Omega),\ H_0^{m,p}(\Omega)\subset H_0^{m',p}(\Omega) \quad 若\ m>m'.$$

当 Ω 是有界的时候,若 $p>q$, 则 $L^p(\Omega)\subsetneq L^q(\Omega)$. 因而,在这个情形有 $H^{m,p}(\Omega)\subsetneq H^{m,q}(\Omega)$ 和 $H_0^{m,p}(\Omega)\subsetneq H_0^{m,q}(\Omega)$ (然而, 我们必须谨慎,不要以为这些内射映射的范数$\leqslant 1$).

$p=+\infty$ 的情形不经常被用到——这是因为 $L^\infty(\Omega)$ 有一些众所周知的讨厌的性质:它不仅不是自反的[$L^1(\Omega)$ 也是如此],而且也不是可分的[$L^1(\Omega)$是可分的]. 我们还指出, $H_0^{m,\infty}(\Omega)$ 由 $\bar{\Omega}$ 中这样的 C^m 函数组成, 这些函数连同其阶数$\leqslant m$ 的所有导数一起,在 Ω 的边界处(或者,当 $\Omega=\mathbf{R}^n$ 时,在无穷远处)等于零. 总之,内射映射 $C_c^\infty(\Omega)\to H_0^{m,p}(\Omega)$ 有稠值域,因而,它的转置

$$(H_0^{m,p}(\Omega))'\to \mathscr{D}'(\Omega)$$

是内射的, 我们可以把 $H_0^{m,p}(\Omega)$ 的对偶空间等同于这个转置算子的值域, 而后者是 Ω 中广义函数的空间. 当 $p<+\infty$ 时, 后者的描写是很简单的:

命题 24.2 如果 $1\leqslant p<+\infty$, 则 $H_0^{m,p}(\Omega)$ 的对偶空间是 Ω 中广义函数的空间 $H^{-m,p'}(\Omega)$, 这些广义函数有下述形式:

$$T=\sum_{|\alpha|\leqslant m}(\partial/\partial x)^\alpha f_\alpha,\ f_\alpha\in L^{p'}(\Omega)\quad(|\alpha|\leqslant m), \tag{24.2}$$

其中 $p'=p/(p-1)$.

证明 每个(24.2)型的广义函数 T 确定 $H_0^{m,p}(\Omega)$ 上一个连续线性泛函这一事实是明显的. 反之,考虑映射(24.1): 它是从 $H_0^{m,p}(\Omega)$ 到 $(L^p(\Omega))^{N(m,n)}$ 的一个闭线性子空间上的一个同构. 由于 Hahn-Banach 定理,其转置是从后者的对偶空间到 $H_0^{m,p}(\Omega)$ 的对偶空间上的一个连续线性映上映射. 自然,典则地有

$$\{(L^p(\Omega))^{N(m,n)}\}'=(L^{p'}(\Omega))^{N(m,n)},$$

也就是说,可以把$(L^p(\Omega))^{N(m,n)}$上的连续线性泛函等同于属于 $L^{p'}(\Omega)$ 的函数集 $(f_\alpha)_{|\alpha|\leqslant m}$, 而此线性泛函在 $H_0^{m,p}(\Omega)$ 上所诱导

的线性泛函可确定为

$$\langle T,\ u\rangle=\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int f_\alpha(\partial/\partial x)^\alpha u\,dx.$$

如果想确切地知道 Ω 中的广义函数 T 等于什么，那么把这个公式局限于 $u\in C_c^\infty(\Omega)$. 我们得到

$$T=\sum_{|\alpha|\leqslant m}(-1)^{|\alpha|}(\partial/\partial x)^\alpha f_\alpha.$$

证毕.

在 $H^{-m,p'}(\Omega)$ 上有一自然的范数. 当 $p'<+\infty$ 时，它是

$$T\mapsto\|T\|_{-m,p'}=\inf\Big(\sum_{|\alpha|\leqslant m}\|f_\alpha\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)}\Big)^{1/p'},$$

其中下确界取在 $(L^{p'}(\Omega))^{N(m,n)}$ 中使 (24.2) 成立的所有的族 $(f_\alpha)_{|\alpha|\leqslant m}$ 上. 当 $p'=+\infty$ 时，它是

$$T\mapsto\|T\|_{-m,\infty}=\inf\big(\sup_{|\alpha|\leqslant m}\|f_\alpha\|_{L^\infty(\Omega)}\big),$$

其中下确界与 $p'<+\infty$ 的情形中有相同的意义.

如果把 $H_0^{m,p}(\Omega)$ 的对偶空间等同于 $H^{-m,p'}(\Omega)$，那么有理由问，范数 $\|\ \|_{-m,p'}$ 是否等于 $H^{-m,p'}(\Omega)$ 上的对偶范数. 通过考察命题 24.2 的证明，容易看到确实如此. 我们把此证明留给读者.

我们需要下述结果，它是注 24.1 的直接结果（而当 $p=+\infty$ 时它显然是错的）：

命题 24.3　如果 $1\leqslant p<+\infty$，那么 $H^{m,p}(\Omega)$ 的具有紧支集包含在 Ω 中的每个元素 u 属于 $H_0^{m,p}(\Omega)$.

命题 24.4　令 $1\leqslant p\leqslant+\infty$ 是任意的. 那么乘法运算

$$(f,\ u)\mapsto fu \tag{24.3}$$

是从 $H^{m,\infty}(\Omega)\times H^{m,p}(\Omega)$ 到 $H^{m,p}(\Omega)$ 中的连续双线性映射.

证明留给读者.

命题 24.5　如果 $p<+\infty$，那么映射 (24.3) 是从 $H^{m,\infty}(\Omega)\times H_0^{m,p}(\Omega)$ 到 $H_0^{m,p}(\Omega)$ 中的连续双线性映射.

证明　假设 $u\in H^{m,p}(\Omega)$ 有紧支集包含在 Ω 中；那么对任意 $f\in H^{m,\infty}(\Omega)$，$fu$ 亦然. 因而，把命题 24.3 和 24.4 结合起来即可.　　证毕.

注 24.2　当 $p=+\infty$ 时命题 24.5 是错的.

现在引进 $\mathbf{R}^n$ 的另一开子集 Ω' 和映射 ψ: $\Omega \to \Omega'$，它有下述性质:

(24.4) ψ 是双满的;

(24.5) $\psi=(\psi^1, \cdots, \psi^n)$ 和 $\psi^{-1}=(\chi^1, \cdots, \chi^n)$ 分别在 Ω 和 Ω' 中是(即它们的分量是) m 次连续可微的;

(24.6) 对每个 $j=1,\cdots,n$, 和每个 n 数组 α, $0\leqslant|\alpha|\leqslant m$, $(\partial/\partial x)^\alpha\psi^j$ 在 Ω 中是有界的, $(\partial/\partial x)^\alpha\chi^j$ 在 Ω' 中是有界的.

我们假设 $m>0$. 那么有

命题 24.6 在上面这些假设下，对于 $1\leqslant p\leqslant+\infty$, $u\mapsto u\circ\psi$ 是从 $H^{m,p}(\Omega')$ 到 $H^{m,p}(\Omega)$ 上的一个同构. 其逆是 $v\mapsto v\circ\psi^{-1}$.

其证明是链规则和中值定理的简单应用,把它留给读者.

命题 24.7 除了 p 必须是有限的这一点之外，这里的假设与命题 24.6 中的假设相同. 那么 $u\mapsto u\circ\psi$ 是从 $H_0^{m,p}(\Omega')$ 到 $H_0^{m,p}(\Omega)$ 上的一个同构.

证明 由于命题 24.3 和 24.6, 只需证明,如果 $u\in H^{m,p}(\Omega')$ 的支集是 Ω' 的一个紧子集,那么 $u\circ\psi$ 的支集是 Ω 的一个紧子集，而这是显然的,因为后者是前者在 ψ^{-1} 下的象. 证毕.

我们现在考虑 $\Omega=\mathbf{R}^n$ 和 $p=2$ 的情形. 对于任意实数 s, 我们回忆一下空间 H^s 的定义(定义 13.1): H^s 是 $\mathbf{R}^n$ 中这样的缓增广义函数 u 的空间,它的 Fourier 变换 $\hat{u}$ 关于测度

$$(2\pi)^{-n}(1+|\xi|^2)^s d\xi$$

是平方可积的. 由定义，$\hat{u}$ 在关于这个测度的 L^2 空间中的范数是 u 在 H^s 中的范数,我们曾用 $\|u\|_s$ 表示.

现在回到定义 24.1, 并施行 Fourier 变换，那么我们看到, $H^m(\mathbf{R}^n)=H^{m,2}(\mathbf{R}^n)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中 L^2 函数 u 的空间，其 Fourier 变换 $\hat{u}$ 使得

$$(\sum_{|\alpha|\leqslant m}|\xi^\alpha|^2)^{1/2}\hat{u}(\xi) \tag{24.7}$$

属于 $L^2(\mathbf{R}^n)$; 此外,由于 Plancherel 定理，$\|u\|_{m,2}$ 等于 (24.7) 的

L^2 范数除以 $(2\pi)^{n/2}$. 容易断定, 根据定义 24.1 确定的空间 $H^m(\mathbf{R}^n)$ 与根据定义 13.1 确定的空间 $H^m(\mathbf{R}^n)$ 是相符的. 然而, 范数 $\|\ \|_m$ 和 $\|\ \|_{m,2}$ 不相等, 除非 $m=0$ 或 1; 它们仅仅是等价的.

我们将对任意的、也可以是非整数的 s 考虑 H^s. 很清楚, 对 $s'<s$ 我们有 $H^s\subset H^{s'}$, 此内射是连续的, 并有范数 $\leqslant 1$. 另一方面, 命题 13.1 指出, 当 $\Omega=\mathbf{R}^n$ 时, $H^m(\Omega)=H_0^m(\Omega)$. 事实上令 s 是任一实数, 并引入由(13.21)定义的从 H^s 到 $H^0=L^2$ 上的等距算子:

$$T^s u=\mathscr{F}^{-1}\{(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}\},\quad u\in H^s.$$

通过转置下列映射

$$C_c^\infty \xrightarrow{\text{自然内射}} H^s \xrightarrow{T^s} L^2,$$

并照例把 L^2 等同于它自己的对偶空间, 我们得到

$$L^2 \xrightarrow{{}^tT^s} (H^s)' \xrightarrow{\text{自然内射}} \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n),$$

其中第二个箭头是内射的. 把 ${}^t(T^s)$ 限制在属于 C_c^∞ (或属于 $\mathscr{S}$) 的函数上, 并把 $(H^s)'$ 等同于它在 $\mathscr{D}'$ 中的象, 这样就立即看到 ${}^t(T^s)$ 等于 T^s 本身. 但是, 一个映上等距算子的转置是映上等距算子, 因而, T^s 就是从 L^2 到 H^{-s} 上的这样一个等距算子. 如果读者稍微想一下所有这些推理, 就可看到我们已经证明了下述命题:

命题 24.8　H^s 的对偶空间典则同构于 H^{-s}. 通过这个同构, 从 Hilbert 空间 H^s 到它的对偶空间上的典则反线性等距算子被变为映射

$$T^{2s}:\ u\mapsto \mathscr{F}^{-1}\{(1+|\xi|^2)^s\mathscr{F}\bar{u}\},$$

其中 $\mathscr{F}$ 表示 Fourier 变换, 而 $\mathscr{F}^{-1}$ 是其逆.

再一次应用 Fourier 变换立刻就能验证命题 24.8 与命题 24.2 (当 $s=m$ 和 $p=p'=2$ 时) 不矛盾: 当 $\Omega=\mathbf{R}^n$ 时 $H^{-m,2}(\Omega)=H^{-m}(\mathbf{R}^n)$. 然而必须指出, 我们在第 200 页中定义的范数 $\|\ \|_{-m,2}$ 不等于 $s=-m$ 时的 (13.20) 中所定义的范数 $\|\ \|_s$, 除非 $m=0$; 在其它情形, 它们仅仅是等价的.

当 s 是非整数时，空间 H^s 自然地出现于偏微分方程理论的一些问题中——我们在研究 Cauchy 问题时曾经遇到过它们. 在我们研究属于 $H^m(\Omega)$ (§ 26) 的函数的迹，或边界值的时候，它们将再一次不可避免地出现. 那时，我们将更仔细地看一看它们的性质.

在结束本节的时候，我们把 $H^m(\mathbf{R}^n)=H_0^m(\mathbf{R}^n)$ 这一性质推广到 $p\neq 2$ 时的空间 $H^{m,p}$ 上去:

命题 24.9 对任何整数 $m\geqslant 0$，任何 p，$1\leqslant p<+\infty$，$C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ 在 $H^{m,p}(\mathbf{R}^n)$ 中稠.

证明 令 $\zeta\in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$，当 $|x|<1$ 时 $\zeta(x)=1$，当 $|x|>2$ 时 $\zeta(x)=0$; 令 $\zeta_\nu(x)=\zeta(\nu^{-1}x)$，$\nu=1, 2, \cdots$. 立即能验证，若 $u\in H^{m,p}(\mathbf{R}^n)$，则当 $\nu\to+\infty$ 时 $\zeta_\nu u$ 在 $H^{m,p}(\mathbf{R}^n)$ 中收敛于 u. 但是每个 $\zeta_\nu u$ 的支集是 $\mathbf{R}^n$ 的紧子集，因而由命题 24.3，对每个 ν，$\zeta_\nu u\in H_0^{m,p}(\mathbf{R}^n)$. 这就证明了我们的论断.

注 24.3 人们不要以为 $\mathbf{R}^n$ 是具有下述性质的唯一开集：对某个 $m>0$ 和某个 p，$1\leqslant p<+\infty$，有 $H^{m,p}(\Omega)=H_0^{m,p}(\Omega)$. 一个有趣的情形是 $p=2$ 的情形. 我们有下述结果(关于其证明，请参阅[1, Exposé 15])：

定理 令 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个非空开子集，m 是大于零的整数. 那么，$H^m(\Omega)=H_0^m(\Omega)$，当且仅当 $\mathbf{R}^n\backslash\Omega$ 是 m 极的 (m-polar)，即它有下述性质:

(24.8) $\mathbf{R}^n$ 中具有紧支集包含在 $\mathbf{R}^n\backslash\Omega$ 中的广义函数 u 不可能属于 $H^{-m}(\mathbf{R}^n)$，除非 $u=0$.

与此有关，我们注意到下面的

命题 24.10 令 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个有界子集，m 是大于零的整数. 那么 $H_0^{m,p}(\Omega)\neq H^{m,p}(\Omega)$.

证明 如果 Ω 是有界的，那么常数函数属于 $H^{m,p}(\Omega)$；只需证明，恒等于 1 的函数 $\mathbf{1}$ 不属于 $H_0^{m,p}(\Omega)$. 只需证明，$\mathbf{1}$ 不属于所有这些空间中的最大者 $H_0^{1,1}(\Omega)$. 令 $\varphi\in C_c^\infty(\Omega)$ 是任意的. 我们有

$$\|\mathbf{1}-\varphi\|_{1,1}=\int_{\Omega}|\mathbf{1}-\varphi|\,dx+\int|\operatorname{grad}\varphi|\,dx.$$

另一方面,存在一个仅依赖于 Ω 的常数 $C>0$, 使得

$$\int|\varphi|\,dx\leqslant C\int|\operatorname{grad}\varphi|\,dx,$$

由此得到

$$\begin{aligned}\|\mathbf{1}-\varphi\|_{1,1}&\geqslant\operatorname{meas}(\Omega)-(C-1)\int|\operatorname{grad}\varphi|\,dx\\&\geqslant\operatorname{meas}(\Omega)-(C-1)\|\mathbf{1}-\varphi\|_{1,1},\end{aligned}$$

即

$$\operatorname{meas}(\Omega)\leqslant C\|\mathbf{1}-\varphi\|_{1,1},$$

它指出了, 在 $H^{1,1}(\Omega)$ 中, 函数 $\mathbf{1}$ 和子空间 $C_c^\infty(\Omega)$ 之间的距离大于零. 证毕.

附录 Sobolev 不等式

在本节中, 我们曾考察了函数和广义函数的以空间 $H^{m,p}$ 或 H^s 为尺度所衡量的正规性,实际上,在这方面, 几乎无例外地, 我们已经用了并将继续用由空间族 $\{H^s\}$ (即, 以 L^2 为"基")定义和衡量的正规性概念. 但在很多问题中,需要有更明确的定义,总而言之,需要有正规性的不同的衡量. 例如,一个常用的正规性概念是 Hölder 连续性概念. 碰巧, 在 Hölder 连续性和在 Sobolev 空间意义下的正规性之间有着联系; 虽然在以后我们不去探究这个主题, 但是在这个附录中我们将在联系 Sobolev 正规性与连续性这个方向上给出最简单和最著名的结果. 这就是 *Sobolev 不等式*. 在这里提出并证明它的原因并不是在本书中将再要用到它, 而仅仅是为了给需要它的读者或对它的叙述(或证明)感兴趣的读者提供方便. 关于进一步的结果以及 Sobolev 正规性与 Hölder 连续性之间的关系,建议读者参考[F. Part I].

我们从证明下述整体的(即在 $\mathbf{R}^n$ 中的)结果开始:

引理 24.2 假设 $1\leqslant p<n$, 并用

$$\frac{1}{p^*}=\frac{1}{p}-\frac{1}{n}\tag{24.9}$$

定义 p^*.

那么,存在一常数 $C=C(n, p)>0$, 使得

$$\|u\|_{L^{p^*}}\leqslant C\left\{\sum_{j=1}^{n}\int\left|\frac{\partial u}{\partial x^j}\right|^p dx\right\}^{1/p}, \quad \forall u\in C_c^\infty(\mathbf{R}^n). \tag{24.10}$$

证明 若 $u\in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$, 则我们有

$$|u(x)|\leqslant\int_{-\infty}^{x^j}\left|\frac{\partial u}{\partial x^j}(x^1, \cdots, x^{j-1}, t, x^{j+1}, \cdots, x^n)\right|dt$$

和一个从 x^j 到 $+\infty$ 积分的类似不等式, 由此即得(记号是显然的):

$$2|u(x)|\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\partial u}{\partial x^j}\right|dx^j,$$

因而有

$$2^n|u(x)|^n\leqslant\prod_{j=1}^{n}\int\left|\frac{\partial u}{\partial x^j}\right|dx^j. \tag{24.11}$$

在(24.11)的两边关于 dx^n 积分,并应用标准的 Hölder 不等式

$$\int|u_1\cdots u_r|d\mu\leqslant\prod_{k=1}^{r}\left(\int|u_k|^{\alpha_k}d\mu\right)^{1/\alpha_k}, \tag{24.12}$$

其中 $1\leqslant\alpha_k\leqslant+\infty$ 并且 $\alpha_1^{-1}+\cdots+\alpha_r^{-1}=1$. 这里取 $r=n-1$ (假设 $n\geqslant2$), $\alpha_1=\cdots=\alpha_r=n-1$, 和

$$u_k=\left(\int\left|\frac{\partial u}{\partial x^k}\right|dx^k\right)^{1/(n-1)}, \quad k=1, \cdots, n-1.$$

我们得到

$$\int|2u(x)|^{n/(n-1)}dx^n$$
$$\leqslant\left\{\prod_{j=1}^{n-1}\iint\left|\frac{\partial u}{\partial x^j}\right|dx^j dx^n\right\}^{(n-1)^{-1}}\left\{\int\left|\frac{\partial u}{\partial x^n}\right|dx^n\right\}^{(n-1)^{-1}}.$$

接着,关于 dx^{n-1} 积分, 再次应用 $r=n-1$ 的(24.12), 但是这次选取

$$u_k=\left\{\iiint\left|\frac{\partial u}{\partial x^k}\right|dx^k dx^n\right\}^{(n-1)^{-1}}, \quad k<n-1;$$

$$u_n=\left\{\iint\left|\frac{\partial u}{\partial x^n}\right|dx^n\right\}^{(n-1)^{-1}}.$$

重复这个运算,直到我们得到

(24.13)
$$\|u\|_{L^{n/(n-1)}}\leqslant\frac{1}{2}\left\{\prod_{j=1}^{n}\left\|\frac{\partial u}{\partial x^j}\right\|_{L^1}\right\}^{1/n}.$$

为了得到 $p=1$ 时的估计(24.10)，只需应用初等不等式

(24.14)
$$a_1\cdots a_n\leqslant\frac{1}{n!}(a_1+\cdots+a_n)^n,\quad a_j\geqslant 0\quad(1\leqslant j\leqslant n).$$

现在假设 $p>1$. 我们注意到，如果 $u\in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$，那么函数 $|u|^{[(n-1)/n]p^*}$ 属于 $C_c^1(\mathbf{R}^n)$，因为 $[(n-1)/n]p^*=[(n-1)/(n-p)]p>1$. 我们还注意到，估计式(24.13)可拓广到属于 $C_c^1(\mathbf{R}^n)$ 的函数上去. 在(24.13)中用 $|u|^{[(n-1)/n]p^*}$ 代替 u，并利用下面的事实:

$$\int|u|^{[(n-1)/n]p^*-1}\left|\frac{\partial u}{\partial x^j}\right|dx\leqslant\left\{\int|u|^{q([(n-1)/n]p^*-1)}dx\right\}^{1/q}\left\|\frac{\partial u}{\partial x^j}\right\|_{L^p},$$
$$q=\frac{p}{p-1}.$$

再注意到 $q\{[(n-1)/n]p^*-1\}=p^*$ 和 $(n-1)/n-1/q=1/p^*$，立即得到

(24.15)
$$\|u\|_{L^{p^*}}\leqslant\frac{p}{2}\,\frac{n-1}{n-p}\prod_{j=1}^{n}\left\|\frac{\partial u}{\partial x^j}\right\|_{L^p}^{1/n},$$

由此，再一次应用(24.14)，就得到 $p>1$ 时的(24.10).　　证毕.

我们现在来考察对于 $\mathbf{R}^n$ 的有界开子集 Ω 中的函数有效的 Sobolev 不等式. 我们将分两种情形来研究，并在每一种情形中关于 Ω 作不同的假设.

对于接近于 1 的积分指数 p 的值，我们的第一个假设为，通过一个连续线性算子:

(24.16)　映射 r_Ω——对于 Ω 的限制——把 $H^{1,p}(\mathbf{R}^n)$ 映到 $H^{1,p}(\Omega)$ 上，并且，它有连续右逆 ε_Ω: $H^{1,p}(\Omega)\to H^{1,p}(\mathbf{R}^n)$ [这意味着 $r_\Omega\varepsilon_\Omega$ 在 $H^{1,p}(\Omega)$ 上是恒等映射]，

$H^{1,p}(\Omega)$ 的元素可被延拓为 $H^{1,p}(\mathbf{R}^n)$ 的元素. 在 § 26 的附录中(定理 26.A.3) 将指出，当 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 是 C^1 超曲面，且 Ω 在它的一侧时，(24.16)被满足.

定理 24.1　假设(24.16)成立并设

(24.17) $1\leqslant p<n/m$ (m 是一整数 $\geqslant 0$).

如果记

(24.18) $$\frac{1}{p'}=\frac{1}{p}-\frac{m}{n},$$

则 $H^{m,p}(\Omega)\subset L^{p'}(\Omega)$, 并存在一常数 $C>0$, 使得

(24.19) $\|u\|_{L^{p'}(\Omega)}\leqslant C\|u\|_{H^{m,p}(\Omega)}$, $\forall u\in H^{m,p}(\Omega)$.

在相应于"大的"p 值的第二个情形中, 我们将假设 Ω 有锥性质. 令 A 是 $\mathbf{R}^n$ 中单位球面的一个子集; 我们用 $\Gamma(A, h)$ 表示 $\mathbf{R}^n$ 中使 $0<|u|<h$ 和 $u/|u|\in A$ 的向量 u 的集合. 我们将假设存在一数 $h>0$, 使得 Ω 具有下述性质(即 Ω 有锥性质的定义——译者):

(24.20) 给定任一点 $x\in\Omega$, 存在 S^{n-1} 的一个开子集 $\mathscr{O}_x$, 它的(曲面)测度不小于 h, 并使得

$$x+\Gamma(\mathscr{O}_x, h)\subset\Omega.$$

如果 Ω 的边界是 C^1 超曲面, 并且 Ω 在它的一侧, 或者, 如果 Ω 是凸的, 那么 Ω 有锥性质(习题 24.5); 在另外一些情形, 这也成立(习题 24.6).

定理 24.2 假设(24.20)成立, 并假设

(24.21) $$\frac{n}{m}<p\leqslant+\infty,\quad m\geqslant 1.$$

那么 $H^{m,p}(\Omega)\subset C^0(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$, 且存在一常数 $C>0$, 使得

(24.22) $\sup\limits_{\Omega}|u(x)|\leqslant C\|u\|_{H^{m,p}(\Omega)}$, $\forall u\in H^{m,p}(\Omega)$.

定理 24.1 的证明 首先考虑 $m=1$ 的情形. 那么, 在 (24.18) 中定义的 p' 等于在 (24.9) 中定义的 p^*. 如果把引理 24.2 与命题 24.9 相结合, 就看到 $H^{1,p}(\mathbf{R}^n)\subset L^{p^*}(\mathbf{R}^n)$, 并且, 对于某个适当的常数 $C>0$, 我们有

(24.23) $\|v\|_{L^{p^*}(\mathbf{R}^n)}\leqslant C\|v\|_{H^{1,p}(\mathbf{R}^n)}$, $\forall v\in H^{1,p}(\mathbf{R}^n)$.

然后利用延拓映射 ε_Ω, 它的存在性(和连续性)是在 (24.16) 中被要求的. 对于某个 $C_1>0$ 和所有 $u\in H^{1,p}(\Omega)$, 我们得到

$$\|\varepsilon_\Omega u\|_{H^{1,p}(\mathbf{R}^n)}\leqslant C_1\|u\|_{H^{1,p}(\Omega)}.$$

因为显然有 $\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)}\leqslant\|\varepsilon_\Omega u\|_{L^{p^*}(\mathbf{R}^n)}$，在这个情形我们就得到了(24.19)。

现在令 m 是大于 1 的任意整数. 所谓 $u\in H^{m,p}(\Omega)$，等价于对所有 α，$|\alpha|\leqslant m-1$，有 $D^\alpha u\in H^{1,p}(\Omega)$. 把 $m=1$ 时的(24.19)应用于 $D^\alpha u$，$|\alpha|\leqslant m-1$（代替 u），我们得到

$$\|u\|_{H^{m-1,p^*}(\Omega)}\leqslant C_2\|u\|_{H^{m,p}(\Omega)},\quad \forall u\in H^{m,p}(\Omega).$$

可以把这个不等式迭代 m 次，同时注意到对 p 应用 m 次运算 $p\mapsto p^*$，恰好导致由(24.18)给出的 p'. 证毕.

定理 24.2 的证明 令 x 是 Ω 的一个任意点. 不妨假设它是原点，并用中心在此点的极坐标 r, θ. 把条件(24.20)中截去了顶部的锥 $x+\Gamma(\mathscr{O}_x, h)$ 记作 Γ. 令 g 表示实直线上的一个非负 C^∞ 函数，当 $t<h/2$ 时 $g(t)=1$，当 $t\geqslant 3h/4$ 时 $g(t)=0$.

令 $u\in C^\infty(\Omega)\cap H^{m,p}(\Omega)$；对于 $\theta\in\mathscr{O}_0$，在 $m-1$ 次分部积分后，同时用 $u_1(r,\theta)$ 记 u 在 r, θ 坐标中的表达式，即有

$$u(0)=-\int_0^h(\partial/\partial r)[g(r)u_1(r,\theta)]dr$$

$$=\frac{(-1)^m}{(m-1)!}\int_0^h r^{m-n}\{(\partial/\partial r)^m[g(r)u_1(r,\theta)]\}r^{n-1}dr.$$

现在关于 θ 在 $\mathscr{O}_0$ 上积分，记住，$\mathscr{O}_0$ 的测度 $\geqslant h$. 由 Hölder 不等式 $[q=p/(p-1)]$，我们得到

$$|u(0)|\leqslant\frac{h^{-1}}{(m-1)!}\int_\Gamma r^{m-n}|(\partial/\partial r)^m[g(r)u]|dx$$

$$\leqslant\frac{h^{-1}}{(m-1)!}\|r^{m-n}\|_{L^q(\Gamma)}\|(\partial/\partial r)^m[g(r)u]\|_{L^p(\Gamma)}.$$

如果 $p=1$，在这个情形 $q=+\infty$，我们有 $m>n$. 如果 $p>1$，则 $q(m-n)+n-1>-1$，因为 $m>n/p$.

为了完成证明，只需注意 $(\partial/\partial r)^m$ 是 $(\partial/\partial x)^\beta$，$|\beta|=m$ 的线性组合，其系数属于 $L^\infty(\Gamma)$. 当 $u\in C^\infty(\Omega)\cap H^{m,p}(\Omega)$ 时，从 $\Gamma\subset\Omega$ 这一事实立即推得(24.22)，因而，命题 24.1 蕴涵着定理 24.2 的完全的结论. 证毕.

习 题

24.1 令 E 是(9.19)中定义的 $\mathbf{R}^n$ 中 Laplace 算子 Δ 的基本解. 证明, 对于任何有界开集 Ω 以及所有的 $p<n/(n-1)$ (我们假设 $n\geqslant 2$), E 在 Ω 上的限制属于 $H^{1,p}(\Omega)$. 从这个事实推导, 在 Ω 的点 x_0 处的 Dirac 测度 δ_{x_0} 对于同样的那些 p 值属于 $H^{-1,p}(\Omega)$.

24.2 令 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的有界开子集. 假设 $n\geqslant 2$. 令 μ 是 $\mathbf{R}^n$ 中一任意的 Radon 测度, 它是正的, 并由 Ω 所承载(这意味着 Ω 的余集具有零 μ 测度). 令 E 是习题 24.1 中考虑的 Laplace 算子的基本解. 证明, 对于所有的 $p<n/(n-1)$, 卷积 $E*\mu$ 在 Ω 上的限制属于 $H^{1,p}(\Omega)$. [提示: 记

$$(E*\mu)(x)=\int E(x-y)d\mu(y), \tag{24.24}$$

限制 x 的变化于 Ω, 把 $E(x-y)$ 视作 Ω 中 y 的函数, 取值于关于 x 的空间 $H^{1,p}(\Omega)$ 中, 同时利用适用于 E 的平移的习题 24.1 中的结果, 与事实

$$\sup_{y\in\Omega}\|E(x-y)\|_{H^{1,p}(\Omega_x)}<+\infty$$

一起, 再利用下述事实: 积分的范数不大于范数的积分, 这里, 是指在 $H^{1,p}(\Omega)$ 中的范数.] 从上面所述的事实推导, Ω 中总质量是有限的所有 Radon 测度都属于 $H^{-1,p}(\Omega)$, $p<n/(n-1)$. 当 Ω 有锥性质时, 从定理 24.2 推导同样的结果.

24.3 令 m 是一整数, $0<m<n$, E_m 是在习题 9.2 中定义的广义函数. 证明, 如果 $p<n/(n-m)$, 并如果 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的任一有界开子集, 则 $E_m\in H^{m,p}(\Omega)$.

24.4 令 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的一有界开子集. 令 m 是一整数, $0<m<n$, p 是一正数, $1\leqslant p<n/m$. 令 R 是一大正数, 使得 $\bar\Omega+\bar\Omega$ 包含于开球 $|x|<R$ 中 (用 χ_R 表示这个球的特征函数). 令 E_m 是习题 24.3 中所表示的广义函数. 证明, 如果 $|\alpha|\leqslant m$, $|\beta|\leqslant m$, $q<n/(n-m)$ 和 $1/r=1/p+1/q-1$, 则

$$\|D^{\alpha+\beta}(E_m*u)\|_{L^r(\Omega)}\leqslant\|D^\alpha u\|_{L^p}\|\chi_R D^\beta E_m\|_{L^q},\quad \forall u\in H_0^{m,p}(\Omega). \tag{24.25}$$

由这个事实推导, 对于所有使得 $1\leqslant r<np/(n-m)$ 的 r, 有 $u\in L^r$. 把此结果与定理 24.1 的结论加以比较.

24.5 令 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的一有界开子集. 证明在下述两个情形中 Ω 有锥性质(24.20): (1) Ω 是凸的; (2) $\partial\Omega$ 是一 C^1 超曲面, 并且 Ω 在它的一侧.

24.6 给出一个没有锥性质的 $\mathbf{R}^2$ 的有界开集的例子. 利用有锥性质的集合的有限并集也有锥性质这一事实, 给出 $\mathbf{R}^2$ 的开子集的一个例子, 它非

凸,其边界有"隅角",并且,它有锥性质.

24.7 令 Ω 是有锥性质(24.20)的 $\mathbf{R}^n$ 的一有界开子集. 给定任何一个整数 m, $0\leqslant m<+\infty$,用 $\mathscr{B}^m(\Omega)$ 表示阶数 $\leqslant m$ 的所有导数都属于 $L^\infty(\Omega)$ 的 Ω 中的复 C^m 函数的空间. 假设

(24.26) $$1\leqslant p\leqslant+\infty,\quad m>k+n/p.$$

此时证明, $H^{m,p}(\Omega)$ 连续地嵌入于 $\mathscr{B}^k(\Omega)$ 中.

24.8 证明,如果 $p>n$, 则存在一常数 $C>0$, 使得

(24.27) $$\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{1-n/p}}\leqslant C\sum_{j=1}^{n}\left\|\frac{\partial u}{\partial x^j}\right\|_{L^p},\quad \forall u\in C_c^\infty(\mathbf{R}^n).$$

[提示: 有

$$\operatorname{meas}(\Omega)|u(x)-u(y)|\leqslant\int_\Omega|u(x)-u(z)|dz+\int_\Omega|u(y)-u(z)|dz,$$

其中 Ω 是使 $|z-x|\leqslant|x-y|$, $|z-y|\leqslant|x-y|$ 成立的点 z 的集合. 此时,通过变为中心在 x 处或 y 处的极坐标,并应用 Hölder 不等式,估计上式右端的每个积分.]

24.9 令 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的任一开子集,α 是一数,$0\leqslant\alpha\leqslant1$.用 $\mathscr{B}^\alpha(\Omega)$表示使得

(24.28) $$\sup_{x,y\in\Omega}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha}<+\infty$$

的 Ω 中的有界连续函数 u 的空间. [有性质(24.28)的函数称为具有 *Hölder 指数* α *的一致 Hölder 连续的*,如果 $0<\alpha<1$; 当 $\alpha=0$ 时, 它们就是连续并有界的函数;当 $\alpha=1$ 时, 它们称为*一致 Lipschitz 连续的*.]假设 Ω 是有界的,证明,(24.28)的左端在 $\mathscr{B}^\alpha(\Omega)$ 上定义了一个范数,它把 $\mathscr{B}^\alpha(\Omega)$ 变成一 Banach 空间.

证明 $\mathscr{B}^1(\Omega)$ 即为 Ω 中广义导数属于 $L^\infty(\Omega)$ 的连续函数的空间.

24.10 令 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的一有界开子集,它具有延拓性质(24.16). 令 $0<\alpha<1$, 并用 $\mathscr{B}^{m+\alpha}(\Omega)$ 表示 Ω 中 m 阶导数属于 $\mathscr{B}^\alpha(\Omega)$ (参看习题 24.9) 的 C^m 函数的空间. 从习题 24.8 中的结果推导, $H^{m,p}(\Omega)$ 连续地嵌入 $\mathscr{B}^{m-1+\alpha}(\Omega)$ 中,如果 $p=n/(1-\alpha)$.

现在假设 $m>n/p$ $(1\leqslant p<+\infty)$, n/p 不是整数. 证明 $H^{m,p}(\Omega)$连续地嵌入$\mathscr{B}^{m-n/p}(\Omega)$中.

25. 空间 H^s 的进一步的性质

属于 $H^m(\Omega)$ 的函数的边界值, 或在 $\partial\Omega$ 上的迹的研究需要对

于非整数值的 s 深入地研究整体 Sobolev 空间 $H^s=H^s(\mathbf{R}^n)$ †. 这一节致力于这样的研究.

我们先考察 H^s 上的某些基本的算子. 首先, 考察用光滑函数相乘的运算. 我们回忆, $\mathscr{S}=\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中这样的 C^∞ 函数 φ 的空间, 它的所有阶导数在无穷远处的衰减快于 $1/|x|$ 的任何幂.

命题 25.1 乘法运算 $(\varphi, u)\mapsto\varphi u$ 是从 $\mathscr{S}\times H^s$ 到 H^s 中的双线性映射, 使得

$$(25.1)\qquad \|\varphi u\|_s\leqslant\|u\|_s\int(1+|\eta|)^{|s|}|\hat{\varphi}(\eta)|d\eta.$$

我们已经用 $\hat{\varphi}$ 表示 φ 的 Fourier 变换:

$$\hat{\varphi}(\xi)=\int e^{-i\langle x,\xi\rangle}\varphi(x)dx.$$

众所周知, Fourier 变换是从 $\mathscr{S}$ 到它自身上的一个同构.

证明 只需在 $s\geqslant0$ 时证明此论断即可. 事实上, 在 H^{-s} 中, 乘 $\varphi\in\mathscr{S}$ 的乘法是 H^s 中同一运算的转置. 我们有

$$\|\varphi u\|_s^2=\int(1+|\xi|^2)^s\left|\int\hat{\varphi}(\eta)\hat{u}(\xi-\eta)d\eta\right|^2d\xi.$$

但是, 容易看到,

$$(25.2)\qquad (1+|\xi|^2)^{s/2}\leqslant(1+|\eta|)^s(1+|\xi-\eta|^2)^{s/2},$$

因而

$$\|\varphi u\|_s\leqslant\left\|\int(1+|\eta|)^s|\hat{\varphi}(\eta)|(1+|\xi-\eta|^2)^{s/2}|\hat{u}(\xi-\eta)|d\eta\right\|_{L^2}.$$

应用经典的 Hölder 不等式:

$$\|f*g\|_{L^p}\leqslant\|f\|_{L^1}\|g\|_{L^p},\quad f\in L^1,\ g\in L^p\ (1\leqslant p\leqslant+\infty),$$

我们就得到(25.1). 证毕.

注 25.1 虽然在许多应用中估计式(25.1)已经足够了, 但它还不是最好的. 例如, 当 $s=m$ 是非负整数时, 我们有较好的估计:

$$(25.3)\qquad \|\varphi u\|_m\leqslant\text{const}\|u\|_m\sup_{|\alpha|\leqslant m}\|D^\alpha\varphi\|_{L^\infty}.$$

对于 $|s|\leqslant m$, 把(25.3)推广到 H^s 上去是可能的, 但是要证明它不是很容易的. 还注意, 当 $s=m$ (或 $s=-m$)时, 乘法 $\varphi u(u\in H^s)$

† 在后面的讨论中, s 是任意的实数, 除非有特别的声明.

对于比刚才那些属于 $\mathscr{S}$ 的函数多得多的函数 φ 亦被定义. 特别, 对于所有阶的导数在 $\mathbf{R}^n$ 中有界的 C^∞ 函数空间 $\mathscr{B}^\infty$, 当 $\varphi\in\mathscr{B}^\infty$ 时, 它被定义. 对于这样的 φ, 估计(25.3)成立, 并可推广到 $|s|\leqslant m$ 的情形.

接着, 我们来考察卷积. 在某种意义上, 卷积较 Sobolev 空间 H^s 上的乘法整齐. 我们用 A^s 表示 $\mathbf{R}^n$ 中这样的缓增广义函数 u 的空间, u 的 Fourier 变换 $\hat{u}$ 是(可测)函数, 它有性质

$$(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}(\xi)\in L^\infty.$$

命题 25.2 卷积运算 $(u,\ v)\mapsto u*v$ 是从 $H^s\times A^t$ 到 H^{s+t} 中的双线性映射, 使得

$$\|u*v\|_{s+t}\leqslant\|u\|_s\|(1+|\xi|^2)^{t/2}\hat{v}\|_{L^\infty}. \tag{25.4}$$

此论断实质上是明显的.

一个重要的情形是当 $\hat{v}$ 是一个次数 $\leqslant m$ 的多项式 $P(\xi)$ 的情形; 注意, 此时 $v\in H^{-m,\infty}$. 至于与此 v 的卷积, 它就是通常用 $P(D)$, $D=(-i\partial/\partial x^1,\ \cdots,\ -i\partial/\partial x^n)$, 表示的常系数(线性)偏微分算子. 这样, 我们看到

推论 25.1 令 $P(\xi)$ 是 $\mathbf{R}_n$ 上次数 $\leqslant m$ 的一个多项式. 那么 $u\mapsto P(D)u$ 是从 H^s 到 H^{s-m} 中的连续线性映射.

我们可以利用命题 25.1 和 25.2 对于 $\mathscr{S}$ 在 H^s 中稠 (命题 13.1) 这一命题附加某种精确性. 首先, 令 $\zeta\in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ 在单位开球中等于 1, 并令 $\zeta_\nu(x)=\zeta(x/\nu)$, $\nu=1,\ 2,\ \cdots$. 我们有 $\hat{\zeta}_\nu(\xi)=\nu^n\hat{\zeta}(\nu\xi)$, 从(25.1)立即得到, 映射 $u\mapsto\zeta_\nu u$ 构成线性映射 $H^s\to H^s$ 集合中的一个等度连续集合. 对于这样一个集合, 在 H^s 中的点态收敛和在 H^s 的一个稠子集上的点态收敛是一回事. 因为当 $u\in\mathscr{S}$ 时 $\zeta_\nu u$ 在 H^s 中(事实上, 在 $\mathscr{S}$ 中)收敛于 u, 因此就得到下述结论:

命题 25.1′ 当函数 ζ_ν 如上所述时, 对于每个 $u\in H^s$, 其截断函数 $\zeta_\nu u$ 当 $\nu\to+\infty$ 时在 H^s 中收敛于 u.

现在令 $\rho\in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$, $\int\rho(x)dx=1$, 对于 $\varepsilon>0$, 令 $\rho_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-n}\rho(x/\varepsilon)$. 注意, $\hat{\rho}_\varepsilon(\xi)=\hat{\rho}(\varepsilon\xi)$.

命题 25.2′ 如果 $u\in H^s$,那么当 $\varepsilon\to+0$ 时 $\rho_\varepsilon*u$ 在 H^s 中收敛于 u.

证明 我们看到$\rho_\varepsilon\in A^0$,并由(25.4), $u\mapsto\rho_\varepsilon*u$ 构成一个从 H^s 到它自身中的线性映射集合中的等度连续集合. 因为当 $u\in C_c^\infty$ 时我们的论断是众所周知的,因而对任何 $u\in H^s$ 它也是对的. 证毕.

组合命题 25.1′ 和 25.2′ 我们看到, 每个 $u\in H^s$ 是 $\rho_\varepsilon*(\zeta_\nu u)$ 当 $\varepsilon+\nu^{-1}\to+0$ 时的极限. 特别, 每个 $u\in H^s$ 是属于 $C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ 的这样的函数 $u_k(k=1, 2, \cdots)$ 的极限, 它的支集在下述意义下收敛于 u 的支集: 给定任一紧集 $K\subset\mathbf{R}^n$, $K\cap(\operatorname{supp}u_k)$收敛于 $K\cap(\operatorname{supp}u)$.

我们用 C_0^m 表示阶数$\leqslant m$ 的导数在无穷远处都趋于零的 $\mathbf{R}^n$ 中的m次连续可微函数的空间.

命题 25.3 若 $s>m+n/2$, 则 $H^s\subset C_0^m$.

证明 由于推论 25.1, 只需证明 $m=0$ 时的论断即可. 令 $u\in H^s$, 则存在函数 $v\in L^2$, 使得

$$\hat{u}=(1+|\xi|^2)^{-s/2}\hat{v}.$$

若 $s>n/2$, 则 $(1+|\xi|^2)^{-s/2}$ 也属于 L^2,因而 $\hat{u}\in L^1$. 此时只需应用 Lebesgue 的经典的定理即可. 证毕.

命题 25.4 对于任何 $\varepsilon>0$, Dirac 测度 δ 属于 $H^{-n/2-\varepsilon}$. 没有一个支集包含在一有限点集中的广义函数属于 $H^{-n/2}$ (除非它恒等于零).

证明 δ 的 Fourier 变换是 1; 而 $(1+|\xi|^2)^{s/2}\in L^2$, 当且仅当 $s<-n/2$. 这就证明了第一个论断.

如果 $u\in H^s$ 的支集包含在一个有限点集中, 则存在函数 $\varphi\in C_c^\infty$, 使得 φu 不恒等于零(除非 u 恒等于零!), 并且 $\operatorname{supp}(\varphi u)$ 是一个点. 容易看到, 空间 H^s 在平移下是不变的, 我们不妨假设 $\operatorname{supp}(\varphi u)$是原点. 然而, 所有支集是原点的广义函数具有 $P(D)\delta$ 形式, 这里 $P(\xi)$ 是个多项式. $P(D)\delta$ 的 Fourier 变换恰为 $P(\xi)$. 假设 P 的次数是 m. 那么 $(1+|\xi|^2)^{s/2}P(\xi)$ 属于 L^2, 当且仅当 $s+m<-n/2$, 由此, 我们得到命题的后一部分. 证毕.

现在令 K 表示 $\mathbf{R}^n$ 的一个紧子集. 我们用 $H^s(K)$ 表示 H^s 的赋予范数 $\|\ \|_s$ 的子空间, 它由在 $\mathbf{R}^n\backslash K$ 中等于零的函数 $u\in H^s$ 组成. 它是 H^s 的一个闭线性子空间, 因而对于由 H^s 所诱导的结构它是一 Hilbert 空间. 现在, 对于 $s'<s$, 局限在 $H^s(K)$ 上, 我们来比较范数 $\|\ \|_s$ 和 $\|\ \|_{s'}$.

命题 25.5　令 s, s' 是使得 $s'<s$ 的任何两个实数, 并令 K 是 $\mathbf{R}^n$ 的任一紧子集. 则从 $H^s(K)$ 到 $H^{s'}$ 中的自然映射是紧的.

证明　我们必须证明, 如果序列 $\{u_\nu\}$ 在 $H^s(K)$ 中弱收敛于零, 则它在 $H^{s'}$ 中强收敛于零. 对于广义函数而言, 序列的强收敛和弱收敛是一回事. 从

$$\hat{u}_\nu(\zeta)=\langle u_\nu,\ e^{-i\langle x,\zeta\rangle}\rangle,\quad \zeta\in\mathbf{C}^n$$

及 Paley-Wiener 定理我们知道, $\hat{u}_\nu(\zeta)$ 是 $\mathbf{C}^n$ 中指数型的整函数. 当 ζ 在 $\mathbf{C}^n$ 中的一个有界子集中变动时, 指数 $\exp(-i\langle x,\zeta\rangle)$ 形成 $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ 的一个有界子集. 因为 u_ν 的支集在一固定的紧集中, 因而我们知道 u_ν 在 $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ 的这样一个子集上一致收敛于零, 所以 $\hat{u}_\nu$ 在 $\mathbf{C}^n$ 的每一有界子集上一致收敛于零. 另一方面, 由"一致有界性原则"我们知道, 范数 $\|u_\nu\|_s$ 是有界的. 我们有

$$\begin{aligned}\|u_\nu\|_{s'}^2&=\int_{|\xi|>R}(1+|\xi|^2)^{s'-s}(1+|\xi|^2)^s|\hat{u}_\nu(\xi)|^2d\xi\\&\quad+\int_{|\xi|<R}(1+|\xi|^2)^{s'}|\hat{u}_\nu(\xi)|^2d\xi\\&\leqslant(1+R^2)^{s'-s}\|u_\nu\|_s^2+\int_{|\xi|<R}(1+|\xi|^2)^{s'}|\hat{u}_\nu(\xi)|^2d\xi.\end{aligned}$$

我们可以与 ν 无关地选取 R 如此之大, 使得最后式子中的第一项 $\leqslant\varepsilon/2$, 再取 ν 充分大, 使得第二项 $\leqslant\varepsilon/2$.　　证毕.

命题 25.6　令 s, s' 是使得 $s'<s$ 和 $s\geqslant-n/2$ 的任何两个实数. 则对于每个 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得如果 K 的直径 $\leqslant\delta$, 有

(25.5)　　$\|u\|_{s'}\leqslant\varepsilon\|u\|_s$　对每个 $u\in H^s(K)$.

证明　假设命题 25.6 中的论断不真. 经过一个平移以后, 我们可以找到 H^s 中的一列元素 $\{u_\nu\}$, 使得对所有的 ν, 有 $\operatorname{supp}u_\nu\subset\{x\in\mathbf{R}^n;\ |x|<\nu^{-1}\}$ 和 $\|u_\nu\|_s\leqslant1$, $\|u_\nu\|_{s'}>c>0$. 从第一个不等式我们

推得 u_ν 的一个子序列在 H^s 中弱收敛，因而，由命题 25.5，此子序列在 $H^{s'}$ 中强收敛于某个元素 $u\in H^s$；从第二个不等式我们推得 $u\neq 0$. 但是 u 的支集必定是 $\{0\}$，而这与命题 25.4 矛盾． 证毕．

如果 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的任一开子集，我们记

$$H_c^s(\Omega)=\bigcup_K H^s(K),$$

其中 K 跑遍 Ω 的所有紧子集的集合．当 $\Omega=\mathbf{R}^n$ 时，我们经常写 $H_c^s=H_c^s(\mathbf{R}^n)$.

我们用 $H_{\rm loc}^s(\Omega)$ 表示使得对所有 $\varphi\in C_c^\infty(\Omega)$ 有 $\varphi u\in H^s$ 的 Ω 中广义函数 u 的空间．通常对 $H_{\rm loc}^s(\Omega)$ 赋予由半范 $u\mapsto\|\varphi u\|_s$ (φ 跑遍 $C_c^\infty(\Omega)$)所确定的拓扑．在 $C_c^\infty(\Omega)$ 中找到以某种强方式收敛于恒等于 1 的函数的函数序列 $\{\varphi_\nu\}$ ($\nu=1, 2, \cdots$)是容易的：如果 K_ν 是使 $\varphi_\nu(x)=1$ 的点 $x\in\Omega$ 的(紧)集合，对于每个 ν，K_ν 包含在 $K_{\nu+1}$ 的内点集中，并且 Ω 等于 K_ν 的并集．这样，半范族 $\{u\mapsto\|\varphi_\nu u\|_s, \nu=1, 2, \cdots\}$ 就构成 $H_{\rm loc}^s(\Omega)$ 上连续半范的一个基，这证明了空间 $H_{\rm loc}^s(\Omega)$ 是可度量化的．利用 H^s 是完备的这一事实，我们立即可以验证 $H_{\rm loc}^s(\Omega)$ 也是完备的．这样，$H_{\rm loc}^s(\Omega)$ 就是一个 Fréchet 空间．利用 H^s 的自反性(H^s 甚至是 Hilbert 空间！)，我们容易验证 $H_{\rm loc}^s(\Omega)$ 也是自反的．我们有 $C_c^\infty(\Omega)\subset H_{\rm loc}^s(\Omega)$，并且其自然内射是连续的，并有稠值域；它的转置是从 $H_{\rm loc}^s(\Omega)$ 的对偶空间到 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 中的一个连续线性内射，因而我们能够把 $H_{\rm loc}^s(\Omega)$ 的对偶空间等同于这个转置的值域．利用命题 24.9，我们立刻看到，这个值域不是别的，就是 $H_c^{-s}(\Omega)$.

现在，我们要来证明空间 $H_{\rm loc}^s(\Omega)$ 在微分同胚下的不变性．为此，在 H^s 上我们需要一个等价于范数 $\|\ \|_s$ 的新的范数．

引理 25.1 如果 $0\leqslant s\leqslant 1$，则有

$$\|u\|_s^2\leqslant(2\pi)^{-n}\int|\hat{u}(\xi)|^2(1+|\xi|^{2s})d\xi\leqslant 2\|u\|_s^2,\ u\in H^s. \tag{25.6}$$

证明 从显然的不等式(对于 $0\leqslant s\leqslant 1$)

$$(1+|\xi|^2)^s\leqslant 1+|\xi|^{2s}\leqslant 2(1+|\xi|^2)^s,\quad \xi\in\mathbf{R}_n$$

立即得到此引理的证明．

引理 25.2 如果 $0<s<1$，则对于所有的 $u\in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$，我们有

$$(25.7)\quad (2\pi)^{-n}\int|\hat{u}(\xi)|^2(1+|\xi|^{2s})d\xi$$
$$=\int|u|^2dx+C_s\iint|u(x)-u(y)|^2|x-y|^{-n-2s}dxdy,$$

其中 C_s 仅依赖于 n 和 s.

证明 由 Parseval 公式，我们有

$$\iint|u(x)-u(y)|^2|x-y|^{-n-2s}dxdy$$
$$=\iint|u(x+y)-u(y)|^2|x|^{-n-2s}dxdy$$
$$=(2\pi)^{-n}\iint|e^{i\langle x,\xi\rangle}-1|^2|x|^{-n-2s}|\hat{u}(\xi)|^2dxd\xi.$$

事实上，$u(x+y)$ 关于 y 的 Fourier 变换等于 $\hat{u}(\xi)\exp(i\langle x,\xi\rangle)$. 注意，因为 s 小于 1，故积分

$$I(\xi)=\int|e^{i\langle x,\xi\rangle}-1|^2|x|^{-n-2s}dx$$

收敛. 令 R 是 $\mathbf{R}_n$ 中的一个旋转变换. 我们有

$$I(R\xi)=\int|\exp(i\langle {}^tRx,\ \xi\rangle)-1|^2|x|^{-n-2s}dx$$
$$=\int|e^{i\langle x',\xi\rangle}-1|^2|x'|^{-n-2s}dx'\quad 令\ x'={}^tR^{-1}x.$$

这样，$I(R\xi)=I(\xi)$，这证明了 $I(\xi)$ 只依赖于模 $|\xi|$. 另一方面，

$$I(t\xi)=\int|e^{i\langle tx,\xi\rangle}-1|^2|x|^{-n-2s}dx=t^{2s}I(\xi),\quad t>0.$$

这指出，$I(\xi)$ 是 ξ 的 $2s$ 次正齐次函数，因而对于某一常数 $C_s>0$ 有[1] $I(\xi)=C_s|\xi|^{2s}$. 这就很容易得出我们的结论. 证毕.

注 25.2 组合引理 25.1 和 25.2 我们看到，(25.7)右端的平方根在 H^s 上定义了一个等价于 $\|\ \|_s$ 的范数. 当 s 是一任意正数，也许大于 1，但不是整数时，下面的量是 H^s 上等价于 $\|\ \|_s$ 的一个范数的平方:

1) 译者注: 为了与引理的叙述相符，应为$I(\xi)=C_s^{-1}|\xi|^{2s}$.

$$(25.8)\quad \sum_{|\alpha|\leqslant[s]}\int|D^\alpha u|^2dx+C_s\sum_{|\alpha|\leqslant[s]}\iint\frac{|D^\alpha u(x)-D^\alpha u(y)|^2}{|x-y|^{n+2(s-[s])}}dxdy,$$

其中 $[s]$ 表示 $\leqslant s$ 的最大整数，C_s 是只依赖于 s 和 n 的某一个数 $(C_s>0)$．

注 25.3　回到 $0<s<1$ 的情形．此时可以把 H^s 定义为使得

$$|x-y|^{-s-n/2}[u(x)-u(y)]\in L^2(\mathbf{R}^{2n})$$

的函数 $u\in L^2(\mathbf{R}^n)$ 的空间．

现在考虑从 Ω 到 $\mathbf{R}^n$ 的另一开子集 Ω' 上的一个 C^∞ 微分同胚 χ．如果 $v\in C_c^\infty(\Omega')$，我们令 $(v\circ\chi)(x)=v(\chi(x))$，$x\in\Omega$；自然，$v\circ\chi\in C_c^\infty(\Omega)$．现在，如果 $v\in\mathscr{D}'(\Omega')$，令

$$(25.9)\quad \langle v\circ\chi,\ \varphi\rangle=\left\langle v,\ \left|\frac{d\chi}{dx}\right|^{-1}(\varphi\circ\overset{-1}{\chi})\right\rangle,\ \varphi\in C_c^\infty(\Omega).$$

这里已用 $d\chi/dx$ 表示 χ 的 *Jacobi* 行列式．

命题 25.7　令 K' 是 Ω' 的任一紧子集，s 是任一实数．则存在一常数 $C_s(K')$，使得

$$(25.10)\quad \|u\circ\chi\|_s\leqslant C_s(K')\|u\|_s\quad 对每个\ u\in H^s(K').$$

证明　只需证明 $u\in C_c^\infty(K')$ 时的(25.10)．事实上，令 K_1' 是 K' 在 Ω' 中的一个紧邻域．此时可以断言，$u\mapsto u\circ\chi$ 是从赋予范数 $\|\ \|_s$ 的 $C_c^\infty(K_1')$ 到 H^s 中的一个连续线性映射，因而可以把它延拓到 $C_c^\infty(K_1')$ 在 H^s 中的闭包上去．这个闭包包含 $H^s(K')$，正如我们用正则化所看到的那样(命题 25.2′)．

情形 I：$0<s<1$．我们应用引理 25.1 和 25.2．记 $x'=\chi(x)$，$y'=\chi(y)$．我们有

$$\iint|u(x')-u(y')|^2|x-y|^{-n-2s}dxdy$$
$$=\iint|u(x')-u(y')|^2|x'-y'|^{-n-2s}\omega(x',\ y')dx'dy',$$

这里

$$\omega(x',\ y')=\left|\frac{x'-y'}{x-y}\right|^{-n-2s}\left|\frac{dx}{dx'}\ \frac{dy}{dy'}\right|,$$

而其中 dx/dx' 和 dy/dy' 表示 Jacobi 行列式．很清楚，ω 在 $K'\times K'$ 上是有界的．

情形 II：$s=0,\ 1,\ \cdots$．这是命题 24.6 的一个特殊情形．

情形 III: $s>0$ 是任意的. 令 $[s]$ 表示 $\leqslant s$ 的最大整数, 并令 $\theta=s-[s]$. 此时, u 属于 H^s 意味着对所有 α, $|\alpha|\leqslant[s]$, 有 $D^\alpha u\in H^\theta$. 而 $\|u\|_s$ 等价于

$$\sum_{|\alpha|\leqslant s}\|D^\alpha u\|_\theta.$$

把这个考察与相应于 θ 的结果结合起来, 我们就容易得到关于 s 的结果.

情形 IV: $s<0$. 我们有

$$\|u\circ\chi\|_s=\sup\left|\int u(\chi(x))v(x)dx\right|,$$

其中上确界是对于使得 $\|v\|_{-s}=1$ 的所有 $v\in C_c^\infty$ 取的. 事实上, 我们可以局限于支集在 $\overset{-1}{\chi}(K_1')$ 中的那些 v 上, 这里 K_1' 是 K' 在 Ω' 中的一个紧邻域. 现在, 如令 $x'=\chi(x)$, 则

$$\|u\circ\chi\|_s=\sup\left|\int u(x')\ (v\circ\overset{-1}{\chi})(x')\left|\frac{dx}{dx'}\right|dx'\right|$$
$$\leqslant\left\|\left|\frac{dx}{dx'}\right|(v\circ\overset{-1}{\chi})\right\|_{-s}\|u\|_s.$$

Jacobi 行列式的绝对值 $|dx/dx'|$ 在 K' 的一个开邻域中 (事实上, 在 Ω' 中) 是 C^∞ 函数, 因而, 用这个函数相乘的乘法运算在 $H^{-s}(K')$ 上定义了一个有界线性算子. 另一方面, 用 v 代替 u, 用 $\overset{-1}{\chi}$ 代替 χ, 用 $-s$ 代替 s 后, 可以应用(25.10). 我们得到

$$\|u\circ\chi\|_s\leqslant\text{const}\|v\|_{-s}\|u\|_s=\text{const}\|u\|_s.$$ 证毕.

现在我们能够证明前面所说的不变性了:

命题 25.8 令 χ 是一从 Ω 到 Ω' 上的微分同胚. 那么 $u\mapsto u\circ\chi$ 是从 $H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega')$ 到 $H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 上的一个同构. 其逆是映射 $v\mapsto v\circ\overset{-1}{\chi}$.

证明 令 $\varphi\in C_c^\infty(\Omega)$ 是任意的. 令 $\varphi'=\varphi\circ\overset{-1}{\chi}$. 我们有

$$\varphi(u\circ\chi)=(\varphi'u)\circ\chi,$$

因而, 由命题 25.7, 有 $\|\varphi(u\circ\chi)\|_s\leqslant C(K)\|\varphi'u\|_s$ [$C(K)>0$ 依赖于紧集 $K=\operatorname{supp}\varphi$]. 这就证明了映射 $u\mapsto u\circ\chi$ 是从 $H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega')$ 到 $H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 中的连续映射. 自然, 这已经足够了. 证毕.

我们现在能够定义 $H^s(\mathfrak{M})$, 当 $\mathfrak{M}$ 是一紧致 C^∞ 流形(无边的)时. 这意味着 $\mathfrak{M}$ 是具有 C^∞ 结构的紧致 Hausdorff 拓扑空间. 后者可以如下描述: 给定了 $\mathfrak{M}$ 的一个开覆盖 $\{U_\alpha\}(\alpha\in A)$, 对于每个 $\alpha\in A$, 存在一个从 U_α 到 $\mathbf{R}^n$ 的一个开子集上的同胚 φ_α(维数 n 不依赖于 α, 它被称为流形 $\mathfrak{M}$ 的维数). 这些同胚 φ_α 满足下述条件. 假设 $U_\alpha\cap U_\beta=U_{\alpha\beta}\neq\emptyset$; φ_α 和 φ_β 在 $U_{\alpha\beta}$ 上的限制必须有下面的性质:

(25.11) $\varphi_\beta\overset{-1}{\varphi_\alpha}$ 是从 $\varphi_\alpha(U_{\alpha\beta})$ 到 $\varphi_\beta(U_{\alpha\beta})$ 上的 C^∞ 微分同胚.

这就给出了一个函数 f 在 $\mathfrak{M}$ 中是 C^∞ 的这一说法的意义: 这意味着, 给定任何 $\alpha\in A$, $f\circ\overset{-1}{\varphi_\alpha}$ 是 $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ 中的一个 C^∞ 函数. $C^\infty(\mathfrak{M})$ 的对偶空间是 $\mathfrak{M}$ 中的广义函数的空间 $\mathscr{D}'(\mathfrak{M})$. 显然, $u\mapsto u\circ\varphi_\alpha$ 是从 $C_c^\infty(\varphi_\alpha(U_\alpha))$ 到 $C_c^\infty(U_\alpha)$ 上的一个同构; 其转置是从 $\mathscr{D}'(U_\alpha)$ 到 $\mathscr{D}'(\varphi_\alpha(U_\alpha))$ 上的一个同构, 因而我们可以用 $H^s_{\text{loc}}(U_\alpha)$ 表示 $H^s_{\text{loc}}(\varphi_\alpha(U_\alpha))$ 在这个转置映射下的象.

定义 25.1 我们用 $H^s(\mathfrak{M})$ 表示 $\mathfrak{M}$ 中这样的广义函数 u 的空间, 对于每个 α, u 在 U_α 上的限制属于 $H^s_{\text{loc}}(U_\alpha)$.

从(25.11)和命题 25.8 我们知道, 这是一个合适的定义.

注 25.4 我们只是在采用记号 $H^s(\mathfrak{M})$ 而不采用 $H^s_{\text{loc}}(\mathfrak{M})$ 的时候用到了 $\mathfrak{M}$ 的紧致性: 在非紧致流形的情形, 必须用后者替代前者——否则, 它们是一样的. 现在, 我们将以一更本质的方式来利用 $\mathfrak{M}$ 的紧致性: 它将使我们能够给 $H^s(\mathfrak{M})$ 赋予一 Hilbert 空间结构——然而(一般地)它不是典则的.

当 $\mathfrak{M}$ 是紧致的时候, 我们可以在覆盖 $\{U_\alpha\}$ 中选取一个有限开子覆盖 $U_{\alpha_1}, \cdots, U_{\alpha_r}$. 此时, 令 $g_1, \cdots, g_r$ 是附于子覆盖 $U_{\alpha_1}, \cdots, U_{\alpha_r}$ 的一个 C^∞ 单位分解: 对于每个 $j=1, \cdots, r$, $g_j\in C_c^\infty(U_{\alpha_j})$; 在 $\mathfrak{M}$ 上 $g_1+\cdots+g_r=1$. 令

$$(u, v)_s=\sum_{j=1}^{r}\left((g_ju)\circ\overset{-1}{\varphi_{\alpha_j}},\ (g_jv)\circ\overset{-1}{\varphi_{\alpha_j}}\right)_s,$$

我们就能在 $H^s(\mathfrak{M})$ 上定义一个 Hilbert 空间结构, 这里, 在等式右端的 $(,)_s$ 表示 $H^s(\mathbf{R}^n)$ 中的 Hermite 内积.

从(25.11)和命题25.7立即得到，如果改变有限子覆盖 $\{U_{\alpha_j}\}$ 的选取，或者改变单位分解 $\{g_j\}$ 的选取，那么我们就要用一个等价的结构来代替 $H^s(\mathfrak{M})$ 原来的 Hilbert 空间结构(这就是说，基础的局部凸拓扑向量是不变的).

习　题

25.1　用习题17.10的概念和记号，特别是用"半群" e^{-tA}, $t\geqslant 0$. 对于任一 $\theta\in[0, 1]$，令 H^θ 表示 H^1 在映射 $u\mapsto A^{1-\theta}u$ 下的象. 证明，H^θ 对于范数 $\|A^\theta u\|_{H^0}$ 是一 Hilbert 空间.

令 u_0 是 $H^{1/2}$ 的任一元素，并记 $u(t)=e^{-tA}u_0$, $t\geqslant 0$. 证明，我们有

$$u(t)\in L^2(0, +\infty;\ H^1)\cap C^0([0, +\infty[;\ H^0), \tag{25.12}$$
$$u'(t)\in L^2(0, +\infty;\ H^0).$$

反之，证明，给定任一满足(25.12)的函数 $u(t)$，则 $u(0)\in H^{1/2}$.

令 T 是一连续线性映射 $H^0\to H^0$，它在 H^1 上的限制定义一连续线性映射 $H^1\to H^1$. 考虑 $v(t)=Tu(t)$，这里 $u(t)$ 满足(25.12)，证明 T 定义一连续线性映射 $H^{1/2}\to H^{1/2}$.

25.2　令 $\mathscr{B}^\infty$ 表示 $\mathbf{R}^n$ 中这样的 C^∞ 函数的空间，这些函数的所有阶的导数在整个 $\mathbf{R}^n$ 中是有界的. 证明，给定任一函数 $\phi\in\mathscr{B}^\infty$，对于每个整数 s($\geqslant 0$ 或 <0)，乘法映射 $u\mapsto\phi u$ 是从 H^s 到 H^s 中的连续映射. 应用习题25.1中的"内插法"结果，对于任何实数 s 去推得与上述相同的结论.

25.3　令 $f(t)$ 是实直线上的一广义函数，它有包含在开区间 $0<t<2\pi$ 中的紧支集；把其视作单位圆周 S^1 上的广义函数，用 $f(\theta)$ 表示同一个广义函数，并令 c_m 是它的 Fourier 系数，

$$c_m=\int_0^{2\pi} e^{-im\theta}f(\theta)d\theta$$

(其中的积分只是广义函数与 S^1 上的 C^∞ 函数之间对偶性括号的一个记法而已). 证明，广义函数 f 属于 $H^s(\mathbf{R}^1)$，当且仅当

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}(1+m^2)^s|c_m|^2<+\infty \tag{25.13}$$

(s 是任一实数).

25.4　利用习题25.3中的结果证明 $H^s(\mathbf{T}^n)$($\mathbf{T}^n$: n 维环面)是 Fourier 系数 c_α($\alpha\in\mathbf{Z}^n$) 满足

$$\sum_{\alpha\in\mathbf{Z}}(1+|\alpha|^2)^s|c_\alpha|^2<+\infty \tag{25.14}$$

的 $\mathbf{T}^n$ 上的广义函数 u 的空间(s 是任何实数).

25.5 令 $\mathfrak{M}$ 是一紧致 C^∞ 流形，并假设 $H^0(\mathfrak{M})$, $H^1(\mathfrak{M})$ 都被赋予 Hilbert 空间结构. 证明，存在从 $H^1(\mathfrak{M})$ 到 $H^0(\mathfrak{M})$ 上的一个线性等距 A，它是正的，即对于某个 $c_0>0$，有

$$(25.15) \qquad (Au, u)_0 \geqslant c_0\|u\|_0^2, \quad \forall u \in H^1(\mathfrak{M}).$$

证明，此时我们不仅有(25.15)，而且对某个适当的 $c_1>0$，还有

$$(25.16) \qquad (Au, u)_0 \geqslant c_1\|u\|_{1/2}^2, \quad \forall u \in H^1(\mathfrak{M}).$$

再证明，A^{-1}: $H^0(\mathfrak{M}) \to H^1(\mathfrak{M})$ 可被视作从 $H^0(\mathfrak{M})$ 到其自身中的一个紧算子(必定是自伴的).

25.6 用习题 25.5 中的概念和记号. 令 $\chi_1 \geqslant \chi_2 \geqslant \cdots$ 是 A^{-1}: $H^0(\mathfrak{M}) \to H^0(\mathfrak{M})$ 的按重数重复计数的特征值序列，并令 $\{\phi_j\}$ ($j=1, 2, \cdots$) 是 $H^0(\mathfrak{M})$ 中的完全正交系，使得对每个 j, ϕ_j 是 A^{-1} 的相应于特征值 χ_j 的特征函数.

证明，对于任何实数 s, $H^s(\mathfrak{M})$ 是 $\mathfrak{M}$ 中广义函数 u 的空间，它可写为

$$(25.17) \qquad u = \sum_{j=1}^{+\infty} u_j \phi_j,$$

其系数满足

$$(25.18) \qquad \sum_{j=1}^{+\infty} \chi_j^{-2s} |u_j|^2 < +\infty.$$

25.7 令 $\mathfrak{M}$ 是一紧致 C^∞ 流形，$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx^i dx^j$ ($n = \dim \mathfrak{M}$) 是 $\mathfrak{M}$ 上的一个 Riemann 度量. 证明，ds^2 在每个 H^s 上($s \in \mathbf{R}$)定义一个 Hilbert 空间结构，并且定义 $\mathfrak{M}$ 上的一个二阶微分算子 Δ，此 Δ 定义一个从 $H^2(\mathfrak{M})$ 到 $H^0(\mathfrak{M})$ 上的等距算子. 证明，Δ 必是椭圆的(定义 19.4).

25.8 令 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的一开子集. 证明，对于任何 $s>0$, $C^0(\Omega)$ 不包含在 $H^s_{loc}(\Omega)$ 中.

25.9 令 S^k 表示 k 维单位球面($k=0, 1, \cdots$)；把 S^k 看作 S^{k+1} 中的"赤道"，这样，对于 $k \leqslant n-2$, S^k 就看作 S^{n-1} 的子集，因而也看作 $\mathbf{R}^n$ 的子集. 令 $d\sigma_k$ 是看作 $\mathbf{R}^n$ 上的 Radon 测度的 S^k 上的典则测度，确切一些说，即是测度

$$C_c^\infty(\mathbf{R}^n) \ni \phi \mapsto \int_{S^k} (\phi|_{S^k}) d\sigma_k.$$

使得 $d\sigma_k$ (看作 $\mathbf{R}^n$ 上的广义函数)属于 $H^s(\mathbf{R}^n)$ 的实数 s 的最小上界是什么?

25.10 证明，给定任一整数 $k \geqslant 0$ 或 <0，映射 r_Ω——$\mathbf{R}^n$ 中的广义函数对于 $\mathbf{R}^n$ 的开子集 Ω 的限制——是从 $H^k(\mathbf{R}^n)$ 到 $H^k(\Omega)$ 中的连续线性映射. 证明，这个映射有稠值域，如果 $k \leqslant 0$. 证明，存在一个从 $H_0^m(\Omega)$ ($m \geqslant 0$) 到 $H^m(\mathbf{R}^n)$ 的闭线性子空间上的自然内射，并且，$H^{-m}(\Omega)$ 典则同构于 $H^{-m}(\mathbf{R}^n)$

的一闭线性子空间. 描述后者，并把它在 $H^{-m}(\mathbf{R}^n)$ 中的正交补与上述限制映射 γ_Ω 联系起来. 证明，如果 Ω 是有界的，并且 $k<m(k\geqslant 0$ 或 $<0)$，那么从 $H_0^m(\Omega)$ 到 $H^k(\Omega)$ 中的自然映射是紧的.（这是经典的 *Rellich* 引理的一种叙述.）

25.11　令 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中原点的一个邻域，$P(x, D)$ 是一个在 Ω 中具有 C^∞ 系数的 m 阶的线性偏微分算子. 假设算子 $P(x, D)$ 的主算符（定义 19.1）$P_m(x, \xi)$ 作为 ξ 的多项式对 Ω 中任意的 x 都不恒等于零. 证明下述引理:

引理 25.3　令 s, s', s'' 是三个实数，使得 $s'<s$. 令 x_0 是 Ω 的任意一点，ε 是任一大于零的数. 那么，存在 x_0 的一个开邻域 $U\subset\Omega$ 和一依赖于 s, s', s'', ε 和 x_0 的常数 $C>0$，使得

$$\|u\|_{s'}\leqslant C\|P(x, D)u\|_{s''}+\varepsilon\|u\|_s,\quad \forall u\in C_c^\infty(U). \tag{25.19}$$

[提示: 假设对于固定的 s, s', s'' 和 ε（如在引理 25.3 中一样），不存在邻域 U 或常数 C. 证明，这蕴涵着存在一列函数 $u_\nu\in C_c^\infty(\Omega)$，$\operatorname{diam}(\operatorname{supp} u_\nu)\to 0$，它的支集收敛于 $\{x_0\}$，并使得

$$\|u_\nu\|_{s'}>1, \tag{25.20}$$

而

$$\|P(x, D)u_\nu\|_{s''}\leqslant 1/\nu,\quad \|u_\nu\|_s\leqslant\varepsilon^{-1}. \tag{25.21}$$

由此，并应用命题 25.5 推得，对于 $H^{s'}$ 中的范数，u_ν 收敛于一非零的广义函数 u，它的支集被缩小到单个的点 $\{x_0\}$. 再应用习题 1.12 中的引理 1.1.]证明，如果我们去掉 $P(x, D)$ 的主算符在 Ω 的任何点处都不恒等于零这一假设，那么引理 25.3 中的结论不再成立.

25.12　令 ρ_ε 表示在命题 25.2′ 中用到的软化子 $(\rho_1=\rho)$. 令 $L(\xi)$ 是 $\mathbf{R}_n$ 上任一线性形式. 证明，存在一常数 $C>0$，使得对所有 $\xi, \eta\in\mathbf{R}_n$，有

$$|L(\xi)\hat{\rho}(\varepsilon\xi)-L(\eta)\hat{\rho}(\varepsilon\eta)|\leqslant C|\xi-\eta|. \tag{25.22}$$

由此推得，任给函数 $c(x)\in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$，由

$$T_\varepsilon u=L(D)(\rho_\varepsilon*(cu)-c(\rho_\varepsilon*u)) \tag{25.23}$$

定义的算子形成（当 ε 在]0, 1[上变动时）线性映射 $H^s\to H^s$ 集合中（$s\in\mathbf{R}$ 是任意的）的一个等度连续集合. 由此推导 *Friedrichs* 引理:

引理 25.4　令 $P(x, D)$ 表示在 $\mathbf{R}^n$ 的一开子集 Ω 中有 C^∞ 系数的 $m(\geqslant 0)$ 阶线性偏微分算子. 令 s 是一任意的实数. 任给广义函数 $u\in H_c^s(\Omega)$，则差

$$P(x, D)(\rho_\varepsilon*u)-\rho_\varepsilon*P(x, D)u \tag{25.24}$$

当 $\varepsilon\to+0$ 时在 $H_{\mathrm{loc}}^{s-m+1}(\Omega)$ 中收敛于零.

[提示: 在(25.22)的证明中，只需考虑 $n=1$ 的情形和 $L(\xi)=\xi$ 即可. 再注意

$$\xi\hat{\rho}(\varepsilon\xi)-\eta\hat{\rho}(\varepsilon\eta)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_{\eta}^{\xi}\frac{\partial}{\partial t}(te^{-i\varepsilon tx})dt\right\}\rho(x)dx.$$

算子 T_ε 的等度连续性的证明类似于命题 25.1 的证明.]

26. $H^m(\Omega)$ 中的迹

在整个这一节中, Ω 将是 $\mathbf{R}^n$ 的有界开子集, 它的边界 $\partial\Omega=\Gamma$ 是一 C^∞ 超曲面. 为了简单起见, 不妨假设 Ω 是连通的, 整个地位于 Γ 的"一侧"(就是说, Ω 是 $\mathbf{R}^n\backslash\Gamma$ 的一个有界的分支). 但是 Ω 同样也可以是这样的连通有界开集的一个有限并. 在上一节末给出的空间 $H^s(\mathfrak{M})$ 的定义适用于 $\mathfrak{M}=\Gamma$ 的情形.

我们将证明下述结果:

定理 26.1 令 m 是任一非负整数. 则属于 $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ 的函数在 Ω 上的限制构成 $H^m(\Omega)$ 的一个稠子空间†.

可以看到, 这个稠子空间不是别的, 就是 $C^\infty(\bar{\Omega})$——Ω 中 C^∞ 函数的空间, 这些函数的所有阶导数可作为连续函数延拓到 Ω 的闭包上. 对于这样的函数, 我们显然可以定义它们在边界 Γ 处的值——称为它们在 Γ 上的迹——它不过是它们在 Γ 上的限制.

定理 26.2 令 m 是严格大于零的任一整数. 那么最先对于 $C^\infty(\bar{\Omega})$ 定义的在 Γ 上的迹可(用一唯一的方式)延拓为从 $H^m(\Omega)$ 到 $H^{m-1/2}(\Gamma)$ 上的一连续线性映射.

在这两个定理的证明中(如在许多类似的定理的证明中一样), 第一步由局部化和边界的平坦化组成. 这可以如下来做.

选取 Γ 的一个由 $\mathbf{R}^n$ 的开子集构成的有限开覆盖 $\{V_1, \cdots, V_r\}$, 使得对每个 $j=1, \cdots, r$, 存在一个从 V_j 到 $\mathbf{R}^n$ 的单位开球 $B=\{x\in\mathbf{R}^n;\ |x|<1\}$ 上的 C^∞ 微分同胚 φ_j, 使

(26.1) $V_j\cap\Omega$ 在 φ_j 下的象是开的上半球

$$B^+=\{x\in\mathbf{R}^n;\ |x|<1,\ x^n>0\}.$$

在 Γ 的充分小的开子集(这些子集构成 Γ 的一个覆盖)中利用局

† 当 $m=0$ 时定理 26.1 是熟知的. 在这一节的余下部分, 我们将假设 $m\geq 1$.

部坐称——并利用 Γ 的法方向把这些坐标拓广到 $\mathbf{R}^n$ 的开子集，我们就看到上面所述的选择是可能的．我们把其细节留给读者．

令 V_0 是 Ω 的一个相对紧的开子集，包含

$$K_0=\Omega\setminus\bigcup_{j=1}^{r}(V_j\cap\Omega),$$

并令 $\zeta_0, \zeta_1, \cdots, \zeta_r$ 表示 $C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ 的 $r+1$ 个元素，使得在 $\overline{\Omega}$ 的一邻域中 $\zeta_0+\zeta_1+\cdots+\zeta_r=1$，并对每个 $j=0, 1, \cdots, r$, $\operatorname{supp}\zeta_j\subset V_j$.

然后令 u 是 $H^m(\Omega)$ 的一个任意元素．假设对每个 j, $0\leqslant j\leqslant r$，可以找到在 $H^m(V_j\cap\Omega)$ 中收敛于 $\zeta_j u$ 的一列函数 $u_{j,\nu}\in C_c^\infty(V_j)$．此时我们断言 $u_{j,\nu}$ 在 $H^m(\Omega)$ 中收敛于 $\zeta_j u$：这是简单的，因为 $\zeta_j u$ 和 $u_{j,\nu}$ 在 V_j 的一紧子集 K_j 外恒等于零，因而在

$$\partial(V_j\cap\Omega)\setminus K_j\cap\Gamma$$

的一邻域中恒等于零．由此即能得到，函数 $u_\nu=\sum_{j=1}^{r}u_{j,\nu}$ 在 Ω 上的限制在 $H^m(\Omega)$ 中收敛于 u，因而就证明了定理 26.1.

现在假设 u 是 $\mathbf{R}^n$ 中一个 C^∞ 函数在 Ω 上的限制，并用 γu 表示它在 Γ 上的迹，即它在 Γ 上的限制．为了证明定理 26.2，我们要证明对于某个不依赖于 u 的常数 $C>0$，有

$$\|\gamma u\|_{H^{m-1/2}(\Gamma)}\leqslant C\|u\|_{H^m(\Omega)}. \tag{26.2}$$

即将看到，这等价于证明下面的事实：对于每个 $j=1, \cdots, r$ 和某个不依赖于 u 的适当常数 $C_j>0$，有

$$\|\gamma\{\zeta_j u\}\|_{H^{m-1/2}(\Gamma)}\leqslant C_j\|\zeta_j u\|_{H^m(\Omega)}. \tag{26.3}$$

自然，我们在 $H^{m-1/2}(\Gamma)$ 上正用着 § 25 末尾定义的 Hilbert 结构的范数，例如，用局部图 $(V_j\cap\Gamma, \varphi_j|_{V_j\cap\Gamma})$ 定义的范数．

把(26.2)和定理 26.1 结合起来，我们就看到 γ 可延拓为一连续线性映射 $H^m(\Omega)\to H^{m-1/2}(\Gamma)$．现在只剩下证明这个映射是映上的．

令 v 是 $H^{m-/2}(\Gamma)$ 的一个任意的元素．$\zeta_j v(1\leqslant j\leqslant r)$ 的意义是清楚的：它是 v 与 ζ_j 在 Γ 上的限制之积．此时假设我们已经证明了下述事实：存在 $u_j\in H^m(V_j\cap\Omega)$，它的支集包含在 V_j 的一紧子集中，因而，它定义了 $H^m(\Omega)$ 的一个元素(也用 u_j 表示)，使

得 $H^m(\Omega)$ 的这个元素在 Γ 上的迹等于 $\zeta_j v$. 自然，此时 $u_1+\cdots+u_r$ 在 Γ 上的迹将等于 v.

这就结束了论证，并指出，为了证明定理 26.1 和 26.2, 不妨只在集合 V_j, $V_j\cap\Omega$, $V_j\cap\Gamma$ 中讨论(附带着上面所提的所有注意之处). 这就是我们所谓的局部化. 接着的一步是边界的平坦化. 用 C^∞ 微分同胚 φ_j $(1\leqslant j\leqslant r)$ 把 V_j 变成单位球 B 来完成这一步. 我们知道(命题 24.6), $u\mapsto u\circ\overset{-1}{\varphi_j}$ 定义一个从 $H^m(V_j\cap\Omega)$ 到 $H^m(B^+)$ 上的同构, 并由命题 25.8, $v\mapsto v\circ\overset{-1}{\psi_j}$ (其中 ψ_j 是 φ_j 在 $V_j\cap\Gamma$ 上的限制)定义一个从 $H^{m-1/2}_{\mathrm{loc}}(V_j\cap\Gamma)$ 到 $H^{m-1/2}_{\mathrm{loc}}(\Sigma)$上的同构, 这里

$$\Sigma=\{x\in\mathbf{R}^n;\ |x|<1,\ x^n=0\}.$$

关于这一点，我们应该记住在第一步局部化论证中用到的 $H^m(V_j\cap\Omega)$ 和 $H^{m-1/2}_{\mathrm{loc}}(V_j\cap\Gamma)$的所有元素的支集包含在 V_j 的紧子集中这一事实. 对于在上面的同构下它们的象也有类似的情形: 这些象的支集包含在单位开球 B 的紧子集中. 由于这个事实，我们将只需证明下述论断:

(26.4) 令 $u\in H^m(B^+)$ 的支集包含在 B 的一紧子集中. 那么 u 是一函数序列在 $H^m(B^+)$ 中的极限, 这些函数是 $C^\infty_c(B)$ 的元素在 B^+ 上的限制.

(26.5) 令 $u\in C^\infty_c(B)$, γu 是它在 Σ 上的迹. 则存在一不依赖于 u 的常数 $C>0$, 使得

$$\|\gamma u\|_{H^{m-1/2}(\mathbf{R}^{n-1})}\leqslant C\|u\|_{H^m(B^+)}.$$

其中我们已把 $\mathbf{R}^{n-1}$ 与 $\mathbf{R}^n$ 中的超平面 $x^n=0$ 等同起来了.

论断(26.4)和(26.5)使我们能对支集包含在 B 的一紧子集中的所有元素 $u\in H^m(B^+)$ 在 Σ 上的迹 γu 加以延拓. 第三个论断是

(26.6) 对于每个具有紧支集包含在 Σ 中的函数 $v\in H^{m-1/2}(\mathbf{R}^{n-1})$, 存在 $u\in H^m(B^+)$, 它的支集包含在 B 的一个紧子集中, 使得 $\gamma u=v$.

事实上，因为 u 和 v 的支集分别包含在 B 和 Σ 的紧子集中这一条件，B 就变得有点不突出了，因而处处可用 $\mathbf{R}^n$ 代替(这等价于把 u 和 v 在它们的支集外用零延拓)．这引导我们用 $\mathbf{R}^{n-1}$ 代替 Σ 和用 $\mathbf{R}_+^n=\{x\in\mathbf{R}^n;\ x^n>0\}$ 代替 B^+．然后我们将证明下述结果：

定理 26.3 属于 $C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ 的函数在 $\mathbf{R}_+^n$ 上的限制在 $H^m(\mathbf{R}_+^n)$ 中稠．

在下面的叙述中，我们把 $\mathbf{R}^{n-1}$ 等同于超平面 $x^n=0$．我们可以定义作用在函数 $f\in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ 在 $\mathbf{R}_+^n$ 上的限制上的迹映射 γ：$\gamma(f)$ 是 f 在超平面 $x^n=0$ 上的限制．

定理 26.4 迹映射 γ 可延拓为一个从 $H^m(\mathbf{R}_+^n)$ 到 $H^{m-1/2}(\mathbf{R}^{n-1})$ 上的连续线性映射．

从这两个定理容易推出我们上面所述的三个论断(26.4)，(26.5)和(26.6)．只需利用在 u 和 v 的支集(在 B 中)的邻域中等于1的截断函数 $\zeta\in C_c^\infty(B)$ 即可．注意，我们有乘法性质：

(26.7) $\qquad \gamma(\varphi u)=\gamma(\varphi)\gamma(u),\ \varphi\in C_c^\infty(\mathbf{R}^n),\ u\in H^m(\mathbf{R}_+^n).$

事实上，当 u 本身是 $C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ 的一元素的限制时(26.7)是对的，因而，由定理 26.3 和 26.4，对于所有 $u\in H^m(\mathbf{R}_+^n)$，(26.7) 也是对的．

定理 26.3 和 26.4 表现了在"迹"问题的变换中的最后一步．如果要把事情作得稍微抽象一些，证明这两个定理也是不难的．主要之点是把 $H^m(\mathbf{R}^n)$ [或者，$H^m(\mathbf{R}_+^n)$] 解释为实直线 $\mathbf{R}^1$ 上的(或者，正半直线 $\mathbf{R}_+^1$ 上的)——在其上变量是 x^n——函数的空间，这些函数取值于前面 $n-1$ 个变量 $x'=(x^1,\cdots,x^{n-1})$ 的某个适当的函数空间中．更明确些，我们将把 $u\in H^m(\mathbf{R}^n)$ 视为 $\mathbf{R}^1$ 上的一个 L^2 函数，取值于 $H^m(\mathbf{R}^{n-1})$ 中，具有下述附加的性质：

(26.8) $\quad$ 对于每个 $j=0,1,\cdots,m$，$D_n^j u\in L^2(\mathbf{R}^1;\ H^{m-j}(\mathbf{R}^{n-1}))$．

我们已令 $D_n^j=-\sqrt{-1}\partial/\partial x^n$．我们用记号 $L^2(X;\ E)$ 表示测度空间 $(X,\ dx)$ 中取值于 Hilbert 空间 E 中的 L^2 函数的空间．显然，(26.8)构成 $H^m(\mathbf{R}^n)$ 的一个等价定义．类似地，$u\in H^m(\mathbf{R}_+^n)$ 可视为 $\mathbf{R}_+^1$ 上的一 L^2 函数，它使得

(26.9) 对于每个 $j=0, 1, \cdots, m$, $D_n^j u\in L^2(\mathbf{R}_+^1;\ H^{m-j}(\mathbf{R}^{n-1}))$. 还有, $H^m(\mathbf{R}^n)$ 上的范数——到目前为止在这个空间中我们曾考虑过的任一范数——等价于下述范数:

$$\left\{\sum_{j=0}^{m} \|D_n^j u\|^2_{L^2(\mathbf{R}^1;H^{m-j}(\mathbf{R}^{n-1}))}\right\}^{1/2}.$$

用 $\mathbf{R}_+^n$ 替换 $\mathbf{R}^n$, 用 $\mathbf{R}_+^1$ 替换 $\mathbf{R}^1$, 关于 $H^m(\mathbf{R}_+^n)$ 我们有类似的叙述.

定理 26.3 的证明

令 $u\in H^m(\mathbf{R}_+^n)$. 我们将利用其特性 (26.8). 关于"横截变量" $x'=(x^1, \cdots, x^{n-1})$ 截断 u 并将其正规化, 我们看到, u 是有下述性质的函数 v 的一个序列在 $H^m(\mathbf{R}_+^n)$ 中的极限:

(26.10) 存在 $\mathbf{R}^{n-1}$ 的一个(依赖于 v 的)紧子集 K', 使得对每个实数 s 和每个 $j=0, 1, \cdots, m$, 有

$$D_n^j v\in L^2(\mathbf{R}_+^1;\ H^s(K')).$$

我们提出(26.10)是为了避免用空间 $L^2(\mathbf{R}_+^1;\ C_c^\infty(K'))$, 它可能使读者花费较多的时间; 从我们的观点来看, 当应用于大的 s 时 ($s\sim+\infty$), (26.10)是有意义的. 它有只包含一个值域 Hilbert 空间 $E=H^s(K')$ (至少, 对于任给的 s) 这样的方便之处. 用 t 表示 $\mathbf{R}^1$ 中或 $\mathbf{R}_+^1$ 中的变量. 我们知道, 对每个 $j=0, 1, \cdots, m$, 有 $v^{(j)}\in L^2(\mathbf{R}_+^1;\ E)$. 此时若 $j<m$, 则 $v^{(j)}$ 在 $\mathbf{R}_+^1$ 中必定是绝对连续的; 事实上, 当 $j<m$ 时, $u^{(j)}$ 可作为连续函数延拓到 $\mathbf{R}_+^1$ 在 $\mathbf{R}^1$ 中的闭包上, 因而可以谈论 E 的元素 $v^{(j)}(+0)$ ($j=0, \cdots, m-1$). 令 $\zeta(t)\in C_c^\infty(\mathbf{R}^1)$ (例如是实值的) 在原点的一邻域中等于 1, 并在整个实直线 $\mathbf{R}^1$ 上如下地定义一新函数 $V(t)$:

$$V(t)=v(t) \quad 若\ t>0;\ V(t)=\zeta(t)\sum_{j=0}^{m-1} v^{(j)}(+0)\frac{t^j}{j!} \ 若\ t<0.$$

则 $V(t)$ 的阶数 $<m$ 的 (广义) 导数都是连续函数; $V^{(m)}$ 属于 $L^2(\mathbf{R}^1;\ E)$, 并当 $t>0$ 时它等于 $v^{(m)}$. 再令 $\rho\in C_c^\infty(\mathbf{R}^1)$, $\int\rho dt=$

$+1$，并令 $\rho_\varepsilon(t)=\varepsilon^{-1}\rho(t/\varepsilon)$，$\varepsilon>0$. 当 $\varepsilon\to+0$ 时，对于任何 $j=0,\cdots,m$，有

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^j(\rho_\varepsilon*V)\text{趋于}V^{(j)}\quad\text{在 }L^2(\mathbf{R}^1;\ E)\text{ 中；}$$

因而

$$\sum_{j=1}^{m}\int_{t>0}\|(\rho_\varepsilon*V)^{(j)}-v^{(j)}\|_E^2dt\to 0.$$

我们知道，$\rho_\varepsilon*V$ 是取值于 $E=H^s(K')$ 中的 C^∞ 函数. 但 s 任意大，而我们的 V 的定义不依赖于 s，因而 $\rho_\varepsilon*V$ 是 t 的取值于 $C_c^\infty(K')$ 中的 C^∞ 函数[1]. 用变量 $t=x^n$ 的截断函数(具有紧支集包含于 $\mathbf{R}^1$ 中的 C^∞ 函数，它在一尽可能大的区间上等于 1) 与 $\rho_\varepsilon*V$ 相乘，我们得到一个属于 $C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ 的函数的序列，它们在 $\mathbf{R}_+^n$ 上的限制在 $H^m(\mathbf{R}_+^n)$ 中收敛于 v.

证毕.

定理 26.4 的证明

我们从证明下述事实开始：

(26.11)　存在一常数 $C>0$，使得如果 u 是属于 $C_c^\infty(\mathbf{R}_+^n)$ 的任一函数在 $\mathbf{R}_+^n$ 上的限制，则有

(26.12)
$$\|\gamma u\|_{H^{m-1/2}(\mathbf{R}^{n-1})}\leqslant C\|u\|_{H^m(\mathbf{R}_+^n)}.$$

令 $\hat{u}(\xi',x^n)$ 表示 $u(x)$ 关于 $x'=(x^1,\cdots,x^{n-1})$ 的 Fourier 变换. 我们有

(26.13)
$$|\hat{u}(\xi',0)|^2=-2\,\mathrm{Re}\int_0^{+\infty}\frac{\partial\hat{u}}{\partial x^n}(\xi',t)\overline{\hat{u}(\xi',t)}dt.$$

在(26.13)的两边乘以 $(1+|\xi'|^2)^{m-1/2}$，并关于 ξ' 在 $\mathbf{R}_{n-1}$ 上积分，由 Cauchy-Schwarz 不等式，我们有

(26.14)
$$\left|\int_{\mathbf{R}_{n-1}}\int_0^{+\infty}(1+|\xi'|^2)^{m-1/2}\frac{\partial\hat{u}}{\partial x^n}(\xi',t)\hat{u}\overline{(\xi',t)}\,dtd\xi'\right|$$
$$\leqslant\left\{\int_{\mathbf{R}_{n-1}}\int_0^{+\infty}(1+|\xi'|^2)^{m-1}\left|\frac{\partial\hat{u}}{\partial x^n}(\xi',x^n)\right|^2dx^nd\xi'\right\}^{1/2}$$

1) 译者注：原文将 $C_c^\infty(K')$ 误为 $C_c^\infty(K)$.

$$\times\left\{\int_{\mathbf{R}_{n-1}}\int_0^{+\infty}(1+|\xi'|^2)^m|\hat{u}(\xi', x^n)|^2dx^nd\xi'\right\}^{1/2}.$$

如果利用第227页关于 $H^m(\mathbf{R}_+^n)$ 上范数的注，那么立即看到(26.13)和(26.14)的结合蕴涵着(26.12)。

我们来证明 γ 把 $H^m(\mathbf{R}_+^n)$ 映到 $H^{m-1/2}(\mathbf{R}^{n-1})$ 上，为此，构造 γ 的*右逆* K——事实上是构造从 $H^{m-1/2}(\mathbf{R}^{n-1})$ 到 $H^m(\mathbf{R}_+^n)$ 中的一个连续线性映射 K，它使得对于所有的 $v\in H^{m-1/2}$，有 $\gamma(Kv)=v$。只需对 $v\in\mathscr{S}(\mathbf{R}^{n-1})$ 构造 Kv 即可。令 $\hat{v}(\xi')$ 表示 v 的 Fourier 变换，那么 $Kv(x)$ 将是函数

$$\hat{v}(\xi')\exp(-(1+|\xi'|^2)^{1/2}x^n) \tag{26.15}$$

关于 ξ' 的 Fourier 逆变换。换句话说，

$$Kv(x)=(2\pi)^{-n+1}\int\exp[i\langle x', \xi'\rangle-(1+|\xi'|^2)^{1/2}x^n]\hat{v}(\xi')d\xi'. \tag{26.16}$$

显然，对于 $x^n\geqslant 0$，函数(26.15)属于 $\mathscr{S}(\mathbf{R}_{n-1})$。并且，如果 $j<m$，则

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty}\|D_n^jKv(x)\|^2_{H^{m-j}(\mathbf{R}^{n-1})}dx^n\\&=(2\pi)^{-n+1}\int_0^{+\infty}\int(1+|\xi'|^2)^{m-j/2}\exp[-2(1+|\xi'|^2)^{1/2}x^n]|\hat{v}(\xi')|^2d\xi'dx^n\\&=\frac{1}{2}\|v\|^2_{H^{m-(j+1)/2}(\mathbf{R}^{n-1})}\leqslant\frac{1}{2}\|v\|^2_{H^{m-1/2}(\mathbf{R}^{n-1})},\end{aligned}$$

它指出了 K: $H^{m-1/2}(\mathbf{R}^{n-1})\to H^m(\mathbf{R}_+^n)$ 是连续的。由于(26.16)，显然有 $\gamma(Kv)=v$。 证毕.

注 26.1 从(26.16)我们得到

$$(\partial/\partial x^n)^2Kv=\left(1-\sum_{j=1}^{n-1}(\partial/\partial x^j)^2\right)Kv,$$

因而 Kv 是 $\mathbf{R}_+^n$ 中下述 Cauchy 问题的解：

$$(1-\Delta)Kv=0, \tag{26.17}$$

$$\gamma(Kv)=v. \tag{26.18}$$

现在可以在 $H^m(\mathbf{R}^n_+)$ 上定义所有的阶 $j<m$ 的迹. 事实上, $(\partial/\partial x^n)^j$ 把 $H^m(\mathbf{R}^n_+)$ 映入 $H^{m-j}(\mathbf{R}^n_+)$ 中, 而迹映射 γ 把后者映到 $H^{m-j-1/2}(\mathbf{R}^{n-1})$ 上. 令

(26.19) $$\gamma^j(u)=\gamma((\partial/\partial x^n)^j u).$$

这样, γ^j 就是一连续线性映射 $H^m(\mathbf{R}^n_+)\to H^{m-j-1/2}(\mathbf{R}^{n-1})$.

现在回到具有光滑边界 Γ 的有界开集 Ω 的情形. 如果我们记住局部化和边界平坦化意味着什么, 那么就可看到, 现在必须以 Γ 的法方向上的偏导数 $\partial/\partial\nu$ 去代替 $\partial/\partial x^n$. 自然, 离开了边界, 向量场 $\partial/\partial\nu$ 不可能有定义, 但是当我们考虑在 Γ 上的迹时, 离开边界后发生什么事情就无关紧要了. 因而, 令

(26.20) $$\gamma^j(u)=\gamma((\partial/\partial\nu)^j u),\ u\in H^m(\Omega),\ 0\leqslant j<m$$

就有意义了.

定理 26.5 令 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个具有光滑边界 Γ 的有界开子集, 它位于 Γ 的一侧. 若 $0\leqslant j<m$, 则 j 阶迹 γ^j 是一个从 $H^m(\Omega)$ 到 $H^{m-j-1/2}(\Gamma)$ 上的连续线性映射.

自然, 我们必须证明这个定理的"映上"部分. 通过局部化和边界的平坦化, 我们容易把它归结为证明 $\mathbf{R}^n_+$ 中类似的定理:

定理 26.6 如果 $0\leqslant j<m$, 则 γ^j 把 $H^m(\mathbf{R}^n_+)$ 映到 $H^{m-j-1/2}(\mathbf{R}^{n-1})$ 上.

我们已再次把 $\mathbf{R}^{n-1}$ 等同于超平面 $x^n=0$.

证明 令 $v\in H^{m-j-1/2}(\mathbf{R}^{n-1})$. 置

(26.21) $$K_ju(x)=\frac{(-1)^j}{(2\pi)^{n-1}}\int\exp[i\langle x',\xi'\rangle - (1+|\xi'|^2)^{1/2}x^n](1+|\xi'|^2)^{-j/2}\hat{v}(\xi')d\xi'.$$

显然, 当 $x^n=0$ 时 $(\partial/\partial x^n)^j K_ju=v$. 用上页 $j=0$ 的情形中所用的相同方法, 可以看到 $K_ju\in H^m(\mathbf{R}^n_+)$. 证毕.

我们证明 $H^m(\Omega)$ 和 $H^m_0(\Omega)$ 的一些富有启发性的性质来结束这一节. 下面不再进一步声明, 我们总假设 Ω 是有界的, 有光滑的边界, 并且, Ω 在它的边界的一侧.

定理 26.7 对于 Ω 的限制把 $H^m(\mathbf{R}^n)$ 映到 $H^m(\Omega)$ 上.

虽然在定理 26.7 的证明中我们将假设 $m>0$, 但是当 $m=0$ 时定理 26.7 自然也是对的. 定理 26.7 说明每个 $f\in H^m(\Omega)$ 可延拓到 $\mathbf{R}^n$ 上为 $H^m(\mathbf{R}^n)$ 的元素. 通过局部化和边界的平坦化, 定理 26.7 的证明归结为 $\mathbf{R}^n_+$ 中类似的定理的证明:

定理 26.8 在 $\mathbf{R}^n_+$ 上的限制把 $H^m(\mathbf{R}^n)$ 映到 $H^m(\mathbf{R}^n_+)$ 上.

证明 我们只说个大意. 令 $u\in H^m(\mathbf{R}^n_+)$, 而 $\gamma^j(u)$ 是它的 j 阶迹, $j=0, \cdots, m-1$. 令 v 是 $H^m(\mathbf{R}^n_-)$ 的任一元素使得对每个 $j=0, \cdots, m-1$ 有 $\gamma^j(u)=\gamma^j(v)$ (自然, $\mathbf{R}^n_-=\{x\in\mathbf{R}^n;\ x^n<0\}$; 这里, 迹意味着在超平面 $x^n=0$ 上的迹). 令 $\tilde{u}$ 表示当 $x^n>0$ 时等于 u, 当 $x^n<0$ 时等于 v 的函数. 如果我们把 $\tilde{u}$ 看作 $x^n(\in\mathbf{R}^1)$ 的函数, 取值于关于 $x'\in\mathbf{R}^{n-1}$ 的广义函数空间中, 那么容易验证它有直到 $m-1$ 阶的连续导数, 并且对于任何 $k(0\leqslant k\leqslant m)$, $(\partial/\partial x^n)^k\tilde{u}$ 是一个当 $x^n>0$ 时等于 $(\partial/\partial x^n)^k u$, 当 $x^n<0$ 时等于 $(\partial/\partial x^n)^k v$ 的函数. 由此得到, $(\partial/\partial x^n)^k\tilde{u}$ 是 x^n 的 L^2 函数, 取值于 $H^{m-k}(\mathbf{R}^{n-1}_{x'})$ 中. 证毕.

注 26.2 在上面的证明中如果知道对每个 $j<m$ 有 $\gamma^j(u)=0$, 那么可以取 $v\equiv 0$. 此时 $\tilde{u}$ 即为 u 的在 $\mathbf{R}^n_-$ 中取零的延拓.

令 $\tilde{\gamma}$ 是从 $H^m(\Omega)$ 到

$$\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\Gamma)$$

中的映射 $u\mapsto(\gamma^0(u), \cdots, \gamma^{m-1}(u))$.

定理 26.9 $\tilde{\gamma}$ 在 $H^m(\Omega)$ 中的核恰为 $H^m_0(\Omega)$.

因为 $C^\infty_c(\Omega)\subset\operatorname{Ker}\tilde{\gamma}$, 因此肯定有 $H^m_0(\Omega)\subset\operatorname{Ker}\tilde{\gamma}$. 我们还必须证明相反的包含关系. 通过局部化和边界的平坦化, 我们把它归结为证明 $\mathbf{R}^n_+$ 中的类似的定理:

定理 26.10 $\tilde{\gamma}$ 在 $H^m(\mathbf{R}^n_+)$ 中的核恰为 $H^m_0(\mathbf{R}^n_+)$.

证明 令 $u\in\operatorname{Ker}\tilde{\gamma}$. 由于注 26.2, u 到 $\mathbf{R}^n$ 的延拓 $\tilde{u}$——在 $\mathbf{R}^n_+$ 的余集中, 令 $\tilde{u}=0$——属于 $H^m(\mathbf{R}^n)$. 另一方面, u 是由 $u_\varepsilon(x)=\tilde{u}(x', x^n-\varepsilon)$ 定义的函数 u_ε 当 $\varepsilon\to+0$ 时在 $H^m(\mathbf{R}^n_+)$ 中的极限. 因为后者的支集离 $\mathbf{R}^n_+$ 的边界的距离 $\geqslant\varepsilon$, 因此它们属于 $H^m_0(\mathbf{R}^n_+)$,

因而 u 也属于 $H_0^m(\mathbf{R}_+^n)$.　　证毕.

注 26.3　令 $u\in H^m(\Omega)$, 并令 $\tilde{u}$ 表示 u 到 $\mathbf{R}^n$ 的延拓, 它在 Ω 的余集中为零. 自然地, $u\in L^2(\mathbf{R}^n)$. 但是一般 $\tilde{u}$ 不属于 $H^m(\mathbf{R}^n)$. 我们曾看到当 $u\in H_0^m(\Omega)$ 时, $\tilde{u}\in H^m(\mathbf{R}^n)$. 事实上, 这是使 $\tilde{u}\in H^m(\mathbf{R}^n)$ 的唯一的情形(习题 26.1).

附录　$H^{m,p}(\Omega)$ 的元素到 $\mathbf{R}^n$ 上的延拓

虽然本节的迹映射定理(定理 26.2, 26.4 到 26.6, 26.9 和 26.10)对于 $p\neq 2$ 的空间 $H^{m,p}$ 而言没有简单的类似物, 但是一些其它的结果, 例如定理 26.1, 当 $p\neq 2$ 时仍然是对的. 我们将扼要地指出如何证明它们. 整个附录中, p 是任何正数, $1\leqslant p<+\infty$; m 是任何整数, $m\geqslant 0$. 用某种比这一节中所证明的形式稍微更一般的形式叙述这些结果是方便的. 更明确一些, 我们不假设 $\Gamma=\partial\Omega$ 是 C^∞ 超曲面, 而仅假设它是 C^m 的. 在这一节中这也是力所能及的, 考察一下证明就使读者容易确信这一点(为简单起见, 也为了有对于任何 m 都成立的命题, 我们没有这样做).

定理 26.A.1　令 m 是一非负整数, p 是使 $1\leqslant p<+\infty$ 的一数, Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的一有界开子集, 其边界 $\partial\Omega$ 是一 C^m 超曲面. 那么, 属于 $C_c^m(\mathbf{R}^n)$ 的函数在 Ω 上的限制在 $H^{m,p}(\Omega)$ 中稠.

证明　通过局部化和边界的平坦化, 我们把这里的证明归结为证明一个(26.4)型的命题. 必须记住, 为了拉平边界, 我们可以利用的微分同胚一般不是 C^∞ 的而只是 C^m 的. 与 (26.4) 类似的命题是

(26.A.1)　令 $u\in H^{m,p}(B^+)$ 的支集包含在 B 的一紧子集中. 那么 u 是一函数列在 $H^{m,p}(B^+)$ 中的极限, 这些函数是 $C_c^\infty(B)$ 的元素在 B^+ 上的限制.

自然, u 可视为 $H^{m,p}(\mathbf{R}_+^n)$ 的一个元素, 其支集包含在 B 的一紧子集中. 通过重复定理 26.3 的证明, 可以证明下述定理, 它显然

蕴涵着(26.A.1):

定理 26.A.2 令 m 是任一非负整数, p 是任一使 $1\leqslant p<+\infty$ 的数. 则属于 $C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ 的函数在 $\mathbf{R}_+^n$ 上的限制在 $H^{m,p}(\mathbf{R}_+^n)$ 中稠.

定理 26.A.2 的证明与定理 26.3 的证明是一样的, 除了必须处处以 L^p 代替 L^2 之外. 特别, 必须用 $H^{s,p}(K')=\{w\in H^{s,p}(\mathbf{R}^{n-1});\ \operatorname{supp} w\subset K'\}$ 代替空间 $H^s(K')$. 不过现在 s 是一任意大的整数; $H^{s,p}(K')$ 是一可分 Banach 空间. 在论证中其它地方不用再改.

$C_c^m(\mathbf{R}^n)$ 中的函数在 Ω 上的限制显然属于 $C^m(\overline{\Omega})$, 即 Ω 中 C^m 函数的空间, 这些函数的阶数 $\leqslant m$ 的导数可延拓为 Ω 的闭包 $\overline{\Omega}$ 上的连续函数. 事实上, 如果定理 26.A.1 中的假设被满足, 则 Ω 上的限制映射 r_Ω 把 $C_c^m(\mathbf{R}^n)$ 映到 $C^m(\overline{\Omega})$ 上. 此时不难构作 r_Ω 的右逆 ε_Ω: $C^m(\overline{\Omega})\to C_c^m(\mathbf{R}^n)$, 它在 $C^m(\overline{\Omega})$ 被赋予 $H^{m,p}(\Omega)$ 的范数而 $C_c^m(\mathbf{R}^n)$ 被赋予 $H^{m,p}(\mathbf{R}^n)$ 的范数时是连续的. 令 φ 是 $C^m(\overline{\Omega})$ 的一个任意的元素. 经过局部化和边界的平坦化之后, 我们可以假设 $\Omega=B^+$, 并设 φ 的支集包含在 B 的一紧子集中. 对于 $x^n<0$, 令

$$\tilde{\varphi}(x)=\sum_{j=0}^{m}\lambda_j\varphi(x',\ -\mu_j x^n),\qquad \mu_j>0,\ j=0,\ \cdots,\ m,$$

并如此选取实数 λ_j, μ_j, 使得 $\tilde{\varphi}$ 在超平面 $x^n=0$ 上的每个 k 阶 $(0\leqslant k\leqslant m)$ 迹等于 φ 的相同阶数的迹. 如果

$$\sum_{k=0}^{m}\lambda_k\mu_k^j=(-1)^j,\qquad j=0,\ \cdots,\ m, \tag{26.A.2}$$

则上述即真. 它比用 φ 的 Taylor 展式来延拓要好, 好处在于: 此时可用 φ 在 $H^{m,p}(\mathbf{R}_+^n)$ 中的范数来估计 $\tilde{\varphi}$ 在 $H^{m,p}(\mathbf{R}_-^n)$ 中的范数. 事实上, 对于某个只依赖于 n, p 和 λ_j, μ_j 的常数 C, 我们有

$$\|\tilde{\varphi}\|_{H^{m,p}(\mathbf{R}_-^n)}\leqslant C\|\varphi\|_{H^{m,p}(\mathbf{R}_+^n)}.$$

然后令: 对于 $x^n>0$, $\Phi=\varphi$; 对于 $x^n<0$, $\Phi=\tilde{\varphi}$. 此时我们知道, Φ 的支集是 B 的一紧子集, $\Phi\in C_c^m(B)$ 且

$$\|\Phi\|_{H^{m,p}(\mathbf{R}^n)}\leqslant C\|\varphi\|_{H^{m,p}(\mathbf{R}_+^n)}.$$

现在可以回到最初给出的开集 Ω. 经过整理, 得到下述定理.

定理 26.A.3 令 m, p, Ω 如定理 26.A.1 中所述. 令 Ω_0 是 $\mathbf{R}^n$ 的包含 Ω 的闭包 $\overline{\Omega}$ 的任一开子集. 则存在线性映射

$$\varepsilon_\Omega:\ C^m(\overline{\Omega}) \to C_c^m(\Omega_0),$$

使得 $r_\Omega \varepsilon_\Omega = I$——$C^m(\overline{\Omega})$ 的恒等映射, 当 $C^m(\overline{\Omega})$ 和 $C_c^m(\Omega_0)$ 分别被赋予 $H^{m,p}(\Omega)$ 和 $H^{m,p}(\Omega_0)$ 的范数时, ε_Ω 是连续的.

从定理 26.A.1 推得, $C^m(\overline{\Omega})$ 在 $H^{m,p}(\Omega)$ 中稠. 因而有

推论 26.A.1 定理 26.A.3 中的映射 ε_Ω 可延拓为一连续线性映射 $H^{m,p}(\Omega) \to H_0^{m,p}(\Omega_0)$. 映射 r_Ω——在 Ω 上的限制——把 $H_0^{m,p}(\Omega_0)$ 映到 $H^{m,p}(\Omega)$ 上.

注 26.A.1 考察一下构造延拓映射 ε_Ω 的方法即可发现, 它可以选择得与 $p(1 \leqslant p < +\infty)$ 无关, 并使得对每个 $k=0, 1, \cdots, m$, 它是从 $H^{k,p}(\Omega)$ 到 $H_0^{k,p}(\Omega_0)$ 中的连续映射.

习 题

26.1 令 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的一有界开子集, 具有 C^∞ 边界 Γ; 假设 Ω 在 Γ 的一侧. 令 m 是一不小于零的任意整数. 证明, $H_0^m(\Omega)$ 是 $H^m(\mathbf{R}^n)$ 的一子空间在限制映射 r_Ω($\mathbf{R}^n$ 中的广义函数在 Ω 上的限制)下的象, 此子空间由 $H^m(\mathbf{R}^n)$ 中支集包含在 $\overline{\Omega}$ 中的函数组成.

26.2 令 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的一有界开子集, 关于原点它是星形的 (star-shaped) (这意味着, 如果 x_0 是 Ω 中的任一点, 则连接 0 到 x_0 的闭直线段包含于 Ω 中). 证明, $\mathbf{R}^n$ 中的 C^∞ 函数在 Ω 上的限制在 $H^m(\Omega)$ 中稠.

26.3 令 $\Omega=\{(x, y)\in\mathbf{R}^2;\ x^2+y^2<1\}$, $\Omega_0=\Omega\backslash\{0\}$. 证明, 在 Ω_0 上的限制映射把 $H^m(\Omega)$ 映到 $H^m(\Omega_0)$ 的一闭线性子空间上.

26.4 利用与习题 26.3 中相同的记号. 给 $H^1(\Omega_0)$ 赋予内积 $D(u, v)=\int_\Omega (\operatorname{grad} u)\cdot(\operatorname{grad} \bar{v})dx$ (它确定一等价于标准结构的 Hilbert 空间结构). 证明, 如果 $u\in H^1(\Omega_0)$ 正交于[对于 $D(u, v)$ 而言] $H^1(\Omega)$ 的所有元素的限制, 则必定有

$$u=Q(D)(\log r)+h,$$

其中 h 是单位圆盘 Ω 中的调和函数, 而 $Q(D)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的常系数微分算子. 由此推导, u 必须恒等于零, 并且, 在 Ω_0 上的限制把 $H^1(\Omega)$, 因而也把 $H^1(\mathbf{R}^n)$, 映到 $H^1(\Omega_0)$ 上.

26.5 用与习题 26.4 中相同的记号. 证明,从 $C_c^\infty(\Omega_0)$到 $C_c^\infty(\Omega)$ 中的自然内射可延拓为一个从 $H_0^1(\Omega_0)$ 到 $H_0^1(\Omega)$ 上的等距映射. 由此推导,存在属于 $H_0^1(\Omega_0)$ 的 C^∞ 函数,它在原点的一邻域中恒等于 1.

26.6 令 $\mathbf{E}$ 是一复 Hilbert 空间.证明,存在一有界线性算子 $\varepsilon: H^1(\mathbf{R}_+^1;\mathbf{E}) \to H^1(\mathbf{R}^1;\mathbf{E})$, 使得对于任何 $u \in H^1(\mathbf{R}_+^1;\mathbf{E})$, εu 在 $\mathbf{R}_+^1$ 上的限制等于 u (应用定理 26.A.3 证明中的方法). 再令 Ω' 是 $\mathbf{R}^{n-1}$ 的一开子集. 利用上面的结果证明, 存在一个从 $H^1(\Omega'\times\mathbf{R}_+^1)$ 到 $H^1(\Omega'\times\mathbf{R}^1)$ 中的连续线性延拓映射(即,限制映射的一个连续右逆). 令$(\mathbf{R}_+)^n$ 表示 n个开的正半直线的积.证明,存在一个从 $H^1((\mathbf{R}_+)^n)$ 到 $H^1(\mathbf{R}^n)$中的连续延拓映射. 令 Ω 是一凸多面体, 也就是一个有限点集的凸包的内点集. 证明, 存在一连续的延拓映射 $H^1(\Omega) \to H^1(\mathbf{R}^n)$.

26.7 令 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的一有界开子集, 使得"$\mathbf{R}^n$ 中的函数在 Ω 上的限制"的映射 r_Ω,即看作连续线性映射 $H^m(\mathbf{R}^n) \to H^m(\Omega)$,有一连续右逆 ε_Ω (参看定理 26.A.3). 证明, 对于任何整数 $k<m$(k 可以是负的), 从 $H^m(\Omega)$ 到 $H^k(\Omega)$ 中的自然内射是紧映射(这是经典的 *Rellich* 引理的一个标准的叙述; 另一叙述是命题 25.5).

27. 回到 Dirichlet 问题. 直到边界的正规性

令 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的一有界开子集, 其边界是一 C^∞ 超曲面 Γ, Ω 位于 Γ 的一侧. 由于在 § 26 中所得到的结果, 现在我们可以对于(非齐次) Dirichlet 问题的弱形式给出一个简洁的表述:

(27.1) 给定任一 $f \in H^{-1}(\Omega)$ 和任一 $g \in H^{1/2}(\Gamma)$, 求 $u \in H^1(\Omega)$, 使得:

$$(\lambda-\Delta)u=f \quad \text{在 } \Omega \text{ 中}, \tag{27.2}$$

$$\gamma(u)=g. \tag{27.3}$$

我们回忆一下, $\gamma(u)$是 u 在 Γ 上的迹. 由于定理 26.2 我们知道, 存在 $v \in H^1(\Omega)$, 使 $\gamma(v)=g$. 因而, 令 $w=u-v$, 就把上述问题变为求解下述问题[在 $H^1(\Omega)$ 中]:

$$(\lambda-\Delta)w=F \quad \text{在 } \Omega \text{ 中}, \quad \gamma(w)=0, \tag{27.4}$$

其中 $F=f-\lambda v+\Delta v$. 由定理 26.9 我们知道, $\gamma(w)=0$ 等价于 $w\in H_0^1(\Omega)$. 如果应用定理 23.1, 则对于实的非负的 λ, (27.4) 与问题(27.2)—(27.3)一样, 都有一唯一的解. 我们可把它叙述为

定理 27.1 令 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的一有界开子集, 其边界是一 C^∞ 超曲面 Γ, Ω 位于 Γ 的一侧. 令 λ 是任一非负的数. 则映射

$$(27.5)\qquad u\mapsto(\lambda u-\Delta u,\ \gamma(u))$$

是从 $H^1(\Omega)$ 到 $H^{-1}(\Omega)\times H^{1/2}(\Gamma)$ 上的同构.

现在, 来研究下述问题. 假设我们加强问题(27.1)中数据 f, g 的正规性要求; 此时, 关于解 u 的正规性我们能说些什么呢? 作为这个问题的部分回答, 我们将证明下述结果:

定理 27.2 在与定理 27.1 相同的假设下, 令 m 是任一严格大于零的整数. 则映射(27.5)是从 $H^m(\Omega)$ 到 $H^{m-2}(\Omega)\times H^{m-1/2}(\Gamma)$ 上的同构.

证明 我们必须证明的是: 如果 $f\in H^{m-2}(\Omega)$, $g\in H^{m-1/2}(\Gamma)$, 则(27.2)—(27.3)的解 u——我们知道它属于 $H^1(\Omega)$——事实上属于 $H^m(\Omega)$. 因为我们总能用 $u-v$ 代替 u, 这里 $v\in H^m(\Omega)$, 且使 $\gamma(v)=g$ (由定理 26.2), 因此只需在 $g=0$ 时证明此事实即可.

为了证明我们的结论, 我们将利用局部化和边界的平坦化. 事实上将利用 § 26 开首处引进的 $\bar{\Omega}$ 的同一开覆盖 $V_0, V_1, \cdots, V_r$ 和同一单位分解 $\zeta_0, \zeta_1, \cdots, \zeta_r$. 注意, 对每一个 $j=0, 1, \cdots, r$, 有

$$(27.6)_j\qquad (\lambda-\Delta)(\zeta_j u)=f_j\quad \text{在 } \Omega \text{ 中},$$

其中

$$(27.7)\qquad f_j=\zeta_j f+2\langle\operatorname{grad}\zeta_j,\ \operatorname{grad}\bar{u}\rangle+(\Delta\zeta_j)u.$$

假设我们已经证明了 $u\in H^k(\Omega)$, $1\leqslant k<m$. 此时 f_j 显然属于 $H^{k-1}(\Omega)$. 我们将证明这蕴涵着 $u\in H^{k+1}(\Omega)$. 因为当 $k=1$ 时我们的假设 $u\in H^k(\Omega)$ 是确实的, 因而由关于 k 的归纳将得到我们的论断.

由下述引理容易解决 $j=0$ 的情形:

引理 27.1 令 $v\in H_c^k(\mathbf{R}^n)$ $(k\geqslant 0)$ 使得 $(\lambda-\Delta)v\in H^{k-1}(\mathbf{R}^n)$. 则

$v \in H^{k+1}(\mathbf{R}^n)$.

证明 我们有 $(1-\Delta)v=(\lambda-\Delta)v+(1-\lambda)v$, 并且 $1-\Delta$ 是一个从 $H^{s+1}(\mathbf{R}^n)$ 到 $H^{s-1}(\mathbf{R}^n)$ 上的等距映射(对于任何实数 s). 证毕.

从现在起我们把注意力集中于 $j>0$ 的情形. 这意味着 V_j 与边界超曲面 Γ 相交. 注意, 我们可以把每个 V_j 选得如我们所要求的那样小(自然, 这或许会迫使我们增加覆盖 $\{V_j\}$ 中元素的个数 r, 并扩大"中心"元素 V_0——但这些事实不会影响下面的论证).

这样, 我们将对于 $j>0$ 研究方程 $(27.6)_j$. 事实上将去掉下标 j. 记 u 以代替 $\zeta_j u$, 记 V 以代替 V_j, 记 f 以代替 f_j, 等等. 这样, 就有

(27.8) $$(\lambda-\Delta)u=f \quad 在 V\cap\Omega 中,$$

这里 $u\in H_0^1(V\cap\Omega)$. 此外必须记住, 现在

(27.9) V 中 $\operatorname{supp} u$, $\operatorname{supp} f$ 的闭包是 V 的紧子集.

我们必须证明的是下述结论, 它蕴涵着我们所要的结果:

(27.10) 如果 $1\leqslant k<m$, 并且如果 $u\in H^k(V\cap\Omega)$, $f\in H^{k-1}(\Omega\cap V)$, 则 $u\in H^{k+1}(V\cap\Omega)$.

我们再一次指出, 如果(27.10)中的假设被满足, 则 $(1-\Delta)u=f+(1-\lambda)u\in H^{k-1}(V\cap\Omega)$. 这意味着我们可以假设 λ 等于 1.

我们从把边界平坦化开始. 这样的手续可以用我们所愿意的任何一种方式来施行, 但是我们将利用 Laplace 算子的特殊性质来施行此种手续(尤其是利用 Laplace 算子的旋转不变性). 这将简化我们的叙述, 但决不是本质的. 同样的推理适用于所有的有 C^∞ 系数的、其主部是 Hermite 二次型的二阶椭圆算子.

首先, 不妨假设点 x_0 是 $\mathbf{R}^n$ 中的原点. 其次, 如有必要, 在 $\mathbf{R}^n$ 中作一个旋转, 之后就可以假设 Γ 在 x_0 处的法线是 x^n 坐标轴. 事实上, 此时可设 $V\cap\Gamma$ 由方程 $x^n=\varphi(x')$ 所定义, 这里, 如往常一样, $x'=(x^1, \cdots, x^{n-1})$. 然后令 $y'=x'$, $y^n=x^n-\varphi(x')$. 因为我们可能要缩小 V (至多有限次!), 我们就能指出: 在 $\overline{V}$ 的 x' 方向投影的一个固定的开邻域 W' 中, φ 有定义并为 C^∞ 的. 上面的变量

变换把算子 $1-\Delta_x$ 变为

$$Q=1-\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{\partial}{\partial y^j}-\frac{\partial\varphi}{\partial x^j}(y')\frac{\partial}{\partial y^n}\right)^2-\left(\frac{\partial}{\partial y^n}\right)^2.$$

必须注意

(27.11) $$\operatorname{grad}\varphi(0)=0.$$

再令 U, F 表示 u, f 在新坐标 y 中的表达式. 我们有

(27.12) $$QU=F\quad \text{在 } V\cap\Omega \text{ 中},$$

显然 $U\in H_0^1(V\cap\Omega)$. 事实上, $\operatorname{supp}U$ 和 $\operatorname{supp}F$ 都包含在 V 的紧子集中, 因而可把 U 视作 $H_0^1(\mathbf{R}_+^n)$ 的一元素, 同时可把 F 视作 $H^{k-1}(\mathbf{R}_+^n)$ 的一元素. 于是我们必须证明, 如果 $U\in H^k(\mathbf{R}_+^n)$, 那么事实上 $U\in H^{k+1}(\mathbf{R}_+^n)$.

记 $$Q=(1-\Delta)+R,$$

其中

$$R=2\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial y^j}\frac{\partial^2}{\partial y^j\partial y^n}-|\operatorname{grad}\varphi|^2\left(\frac{\partial}{\partial y^n}\right)^2+(\Delta\varphi)\frac{\partial}{\partial y^n}.$$

使 Q 和 R 作用在支集包含在 V 的紧子集中的函数上. 这样, 在 V 之外 R 无定义这一事实将无关紧要. 虽然如此, 为了避免在叙述时过分复杂, 我们将把 φ (用任何方式) 延拓为整个空间 $\mathbf{R}^n$ 中的 C_c^∞ 函数, 这样, R 就处处有定义了.

我们来指出[1]如何证明论断(27.10). 构造一个线性算子 G_0, 使得对任意整数 $k=0, 1, \cdots$, 下述事实成立:

(27.13) G_0 诱导出一个有界线性算子 $H^{k-1}(\mathbf{R}_+^n)\to H^{k+1}(\mathbf{R}_+^n)$;

(27.14) 对于任何支集包含在 V 中的 $w\in H^{k+1}(\mathbf{R}_+^n)$, G_0Qw-w 属于 $H^{k+2}(\mathbf{R}_+^n)$.

于是, 如果假设 $U\in H^k(\mathbf{R}_+^n)$ 和 $F=QU\in H^{k-1}(\mathbf{R}_+^n)$, 这里 $k\geqslant 1$, 则从(27.13)就推得 $G_0F\in H^{k+1}(\mathbf{R}_+^n)$, 从(27.14)就推得 $U-G_0F$ 也属于 $H^{k+1}(\mathbf{R}_+^n)$, 因而 U 也属于 $H^{k+1}(\mathbf{R}_+^n)$.

---

1) 译者注: 从此处至定理 27.2 证明的结束, 原书有误. 这一部分是根据作者寄来的修改稿翻译的.

算子 G_0 的构造

令 y_0' 是 V 的任意一点. 我们用下述记号:

$$Q_0 = Q_0(y_0', \partial y)$$
$$= 1 - \Delta + 2\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \varphi}{\partial y^j}(y_0') \frac{\partial^2}{\partial y^j \partial y^n} - |\operatorname{grad} \varphi(y_0')|^2 \left(\frac{\partial}{\partial y^n}\right)^2.$$

因为显然存在 $\mathbf{R}^n$ 中的一个线性变换, 把 Q_0 变为 $1-\Delta$, 因此 Q_0 就确定一个从 $H_0^1(\mathbf{R}_+^n)$ 到 $H^{-1}(\mathbf{R}_+^n)$ 上的同构. 我们先着手给出其逆同构——用 $G_\#(y_0')$ 表示——的一个明显表达式. 取函数 $\chi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^{n-1})$, 它在 V 中等于 1; 对于任一 $v \in H^{k-1}(\mathbf{R}_+^n)$, 令

$$G_0 v(y) = \chi(y') [G_\#(y_0') v(y)] |_{y_0'=y'}.$$

自然, 只需对于 $H^{k-1}(\mathbf{R}_+^n)$ 的一个稠子集中的 v 定义 $G_0 v$ 即可. 把 v 取为在 $\mathbf{R}_+^n$ 的闭包中是 C^∞ 的, 在一个有界集的外部等于零. 我们必定有

$$Q_0 G_\# v = v. \tag{27.15}$$

关于 $y' = (y^1, \cdots, y^{n-1})$ 施行 Fourier 变换是自然的; 令 $\hat{v}$ 表示 v 关于 y' 的 Fourier 变换. 记

$$\rho = (1 + |\eta'|^2)^{1/2}, \quad \eta' \in \mathbf{R}_{n-1}.$$

方程(27.15)可改写为

$$\left(\frac{\partial}{\partial y^n} - \rho_-\right)\left(\frac{\partial}{\partial y^n} + \rho_+\right) \widehat{G_\# v} = -\hat{v},$$

其中

$$\rho_\pm = (1 + |\operatorname{grad} \varphi(y_0')|^2)^{-1} \{ [1 + |\eta'|^2 - (\eta' \cdot \operatorname{grad} \varphi(y_0'))^2]^{1/2}$$
$$\pm \sqrt{-1}\, \eta' \cdot \operatorname{grad} \varphi(y_0') \}.$$

由于(27.11)我们看到, 如果 V 充分小, 则 $\rho_\pm$ 的实部具有 ρ 的阶. 这样就归结为在 $y^n > 0$ 中求解一个依赖于参数 η' (和 y_0') 的常微分方程. 关于其解, 我们有两个基本的要求: 第一, 当 $y^n = 0$ 时解必须等于零; 这相应于 $G_\# v$ 必须属于 $H_0^1(\mathbf{R}^n)$ 这一事实. 第二, 关于 η', 解必须是缓增的; 这是必要的, 如果 $\widehat{G_\# v}$ 是 $\mathbf{R}_+^n$ 中的一个广义

函数关于 y' 的 Fourier 变换. 我们将看到, 满足这两个要求是可能的.

分别求两个因子

$$L_+=\frac{\partial}{\partial y^n}+\rho_+,\qquad L_-=\frac{\partial}{\partial y^n}-\rho_-$$

的逆是有益的. 令

$$E_-(y_0')\hat{v}(\eta',\ y^n)=-\int_{y^n}^{+\infty}\exp[\rho_-(y^n-t)]\hat{v}(\eta',\ t)dt.$$

显然, $L_-E_-\hat{v}=\hat{v}$, 并且 $E_-\hat{v}$ 关于 η' 是缓增的. 也可以定义

$$E_+(y_0')\hat{v}(\eta',\ y^n)=\int_0^{y^n}\exp[-\rho_+(y^n-t)]\hat{v}(\eta',\ t)dt,$$

则有 $L_+E_+\hat{v}=\hat{v}$; $E_+\hat{v}$ 关于 η' 是缓增的. 最后, 令

$$\widehat{G_\#(y_0')v}=-E_+(y_0')E_-(y_0')\hat{v}$$
$$=\int_0^{y^n}\int_t^{+\infty}\exp[-\rho_+(y^n-t)+\rho_-(t-s)]\hat{v}(\eta',\ s)dsdt.$$

用 $H(t)$ 记 Heaviside 函数, 令(对于 $y^n\geqslant 0$):

(27.16) $G(y,\ s,\ \eta')$

$$=\int_0^{y^n}H(s-t)\exp[-\rho_+(y^n-t)+\rho_-(t-s)]dt\,|_{y_0'=y'}.$$

与我们早先说过的一致, 取

(27.17)

$$G_0v(y)=(2\pi)^{1-n}\chi(y')\iint e^{i\langle y',\eta'\rangle}G(y,\ s,\ \eta')\hat{v}(\eta',\ s)d\eta'ds.$$

G_0 把 $H^{k-1}(\mathbf{R}_+^n)$ 映入 $H^{k+1}(\mathbf{R}_+^n)$ 的证明

我们利用特征根 $\rho_\pm$ 的表达式. 从这些表达式我们推导, $\rho_\pm$ 关于 y_0' 的任何导数被一常数乘以 ρ 所界. 另一方面, 对于适当选取的 $c>0$, $c_k>0$, 当 $t\geqslant 0$ 时 $(\rho t)^k|\exp(-\rho_\pm t)|\leqslant c_k\exp(-c\rho t)$. 因而, 对于任何 $n-1$ 重指标 α', 可以找到一个常数 $C>0$, 使得

$$(27.18)\qquad |D_{y'}^{\alpha'}G(y,\ s,\ \eta')|\leqslant C\int_0^{y^n}H(s-t)\exp[-c\rho(y^n-t)+c\rho(t-s)]dt.$$

这意味着

$$\left|\int D_{y'}^{\alpha'} G(y,\ s,\ \eta')\hat{v}(\eta',\ s)ds\right| \leqslant CE_\rho * E_\rho * |\hat{v}(\eta',\ y^n)|,$$

其中记 $E_\rho=\exp(-c\rho y^n)$，而卷积是关于 y^n 施行的. 由关于卷积的 Hölder 不等式,得到

$$\int\left|\int D_{y'}^{\alpha'} G(y,\ s,\ \eta')\hat{v}(\eta',\ s)ds\right|^2 dy^n \leqslant (C/c^4)\rho^{-4}\int|\hat{v}(\eta',\ y^n)|^2 dy^n. \tag{27.19}$$

在估计 G_0v 关于 y' 的 Fourier 变换 $\widehat{G_0v}(\eta',\ y^n)$ 时我们利用 (27.19). 在关于 y' 分部积分 $2M$ 次后,从(27.17)推得

$$\widehat{G_0v}(\zeta',\ y^n)=(2\pi)^{1-n}\iiint e^{i\langle y',\eta'-\zeta'\rangle}(1+|\eta'-\zeta'|^2)^{-M}$$
$$\times(1-\Delta_{y'})^M[\chi(y')G(y,\ s,\ \eta')]\hat{v}(\eta',\ s)ds\,d\eta' dy',$$

这里 M 是一个整数,将在下面选取. 应用 Leibniz 公式和(27.19),得到

$$\left\{\int|\widehat{G_0v}(\zeta',\ y^n)|^2dy^n\right\}^{1/2} \leqslant C'\int(1+|\eta'-\zeta'|^2)^{-M}(1+|\eta'|^2)^{-1} \times\left\{\int|\hat{v}(\eta',\ y^n)|^2dy^n\right\}^{1/2}d\eta'. \tag{27.20}$$

其中我们已经用了下述事实: 积分(在 $L^2(\mathbf{R}^1_{y^n})$中)的范数不大于范数的积分. 因而, 利用 $\operatorname{supp}\chi$ 的紧性就完成了关于 y' 的积分.

在(27.20)的左端乘以 $(1+|\zeta'|^2)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}k}$, 并应用(25.2),得到

$$(1+|\zeta'|^2)^{\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}}\left\{\int|\widehat{G_0v}(\zeta',\ y^n)|^2dy^n\right\}^{1/2}$$
$$\leqslant C''\int(1+|\eta'-\zeta'|^2)^{\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}-M}(1+|\eta'|^2)^{\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}}$$
$$\times\left\{\int|\hat{v}(\eta',\ y^n)|^2dy^n\right\}^{\frac{1}{2}}d\eta'.$$

取 $M>\frac{1}{2}(k+n)$, 并再次——这次是关于 η'——利用 Hölder 不等式,就得到

$$(27.21)\qquad \iint (1+|\eta'|^2)^{k+1}|\widehat{G_0 v}(\eta', y^n)|^2 d\eta' dy^n \leqslant C^* \iint (1+|\eta'|^2)^{k-1}|\hat{v}(\eta', y^n)|^2 d\eta' dy^n.$$

另一方面，我们有

$$\left(\frac{\partial}{\partial y^n}\right)\int G(y, s, \eta')\hat{v}(\eta', s)ds = \int_{y^n}^{+\infty} \hat{v}(\eta', s)\exp[\rho_-(y^n-s)]ds - \rho_+\int G(y, s, \eta')\hat{v}(\eta', s)ds,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y^n}\right)^2\int G(y, s, \eta')\hat{v}(\eta', s)ds = \hat{v}(\eta', y^n) + \rho_-\int_{y^n}^{+\infty} \hat{v}(\eta', s)\exp[\rho_-(y^n-s)]ds - \rho_+\left(\frac{\partial}{\partial y^n}\right)\int G(y, s, \eta')\hat{v}(\eta', s)ds.$$

由归纳法，我们可以得到 $\int G\hat{v}ds$ 关于 y^n 的相继的导数. 在上面的公式中，可以认为 y_0' 已由 y' 所代替. 因而可以关于 y' 微商 α' 次，得到与(27.19)类似的估计:

$$\int\left|\int D_{y'}^{\alpha'}\left(\frac{\partial}{\partial y^n}\right)^j G(y, s, \eta')\hat{v}(\eta', s)ds\right|^2 dy^n \leqslant C' \sum_{l=0}^{j-2} \rho^{2(j-l-2)}\int\left|\left(\frac{\partial}{\partial y^n}\right)^l \hat{v}(\eta', y^n)\right|^2 dy^n.$$

当 $j\geqslant 2$ 时这是对的; 当 $j=1$ 时它仍然成立，如果在其右端只保留 $l=0$ 的项. 通过和 $j=0$ 的情形完全相同的推理，我们推得

(27.22)

$$\iint (1+|\eta'|^2)^{k+1-j}\left|\left(\frac{\partial}{\partial y^n}\right)^j G_0\hat{v}(\eta', y^n)\right|^2 d\eta' dy^n \leqslant C^* \sum_{l=0}^{j-2}\iint (1+|\eta'|^2)^{k-l-1}\left|\left(\frac{\partial}{\partial y^n}\right)^l \hat{v}(\eta', y^n)\right|^2 d\eta' dy^n.$$

这即蕴涵着(27.13).

(27.14)的证明

现在令 w 属于 $H^{k+1}(\mathbf{R}_+^n)$，它的支集包含在 V 中. 用 $Q_0(y', \partial_y)$

表示微分算子 Q_0, 其中令 $y_0'=y'$. 注意到 $Q=Q_0(y', \partial_y)+(\Delta\varphi)\dfrac{\partial}{\partial y^n}$, 由此即得 $[Q-Q_0(y', \partial_y)]w$ 属于 $H^k(\mathbf{R}_+^n)$. 如果用 G_0 作用在这个函数上, 就得到 $H^{k+2}(\mathbf{R}_+^n)$ 的一个元素. 因而, 为了证明(27.14), 只需证明 $G_0Q_0(y', \partial_y)w-w$ 属于 $H^{k+2}(\mathbf{R}_+^n)$ 即可.

根据(27.19), 我们有

$$
\begin{aligned}
&G_0Q_0(y', \partial_y)w\\
&=(2\pi)^{1-n}\chi(y')\iint e^{i\langle y'-z', \eta'\rangle}G(y, z^n, \eta')Q_0(z', \partial z)w(z)\,dzd\eta'\\
&=(2\pi)^{1-n}\chi(y')\iint e^{i\langle y'-z', \eta'\rangle}G(y, z^n, \eta')[Q_0(z', \partial z)\\
&\qquad\qquad -Q_0(y', \partial z)]w(z)\,dzd\eta'\\
&\quad+(2\pi)^{1-n}\chi(y')\iint e^{i\langle y'-z', \eta'\rangle}G(y, z^n, \eta')Q_0(y', \partial z)w(z)\,dzd\eta'.
\end{aligned}
$$

考察最后一项, 我们知道它不是别的, 而是

$$\chi(y')\{G_\#(y_0')Q_0(y_0', \partial y)w(y)\,|_{y_0'=y'}\}=w(y).$$

另一方面, $[Q_0(z', \partial z)-Q_0(y', \partial z)]w(z)$ 是 $w(z)$ 的二阶导数的线性组合, 线性组合的系数是(z', y')的光滑函数, 当 $z'=y'$ 时等于零. 因而, 问题就归结为证明形如

$$(27.23)\quad \chi(y')\iint e^{i\langle y'-z', \eta'\rangle}G(y, z^n, \eta')(z_j-y_j)a(z', y')v(z)\,dzd\eta'$$

的 y 的函数属于 $H^{k+2}(\mathbf{R}_+^n)$. 在 (27.23) 中, $1\leqslant j\leqslant n-1$; $v\in H^{k-1}(\mathbf{R}_+^n)$, 且 $\operatorname{supp} v\subset V$; $a(z', y')$ 是光滑的, 并且因为 χ 和 v 都有紧支集, 因此我们可以并且将假设 a 也有紧支集. 在这些假设下我们来证明, 加之于 v 的 (27.23) 确定一个有界线性映射 $H^{k-1}(\mathbf{R}_+^n)\to H^{k+2}(\mathbf{R}_+^n)$. 为了推导所需的估计, 我们将把函数 v 限于在 $\mathbf{R}_+^n$ 的闭包中属于 C^∞. 关于 η_j 分部积分, (27.23) 即等于[1)]

$$
\begin{aligned}
h(y)&=\chi(y')\iint e^{i\langle y'-z', \eta'\rangle}[D_{\eta_j}G(y, z^n, \eta')]a(z', y')v(z)\,dzd\eta'\\
&=\chi(y')\iint e^{i\langle y', \eta'\rangle}(D_{\eta_j}G)(y, s, \eta')\hat{v}_1(y', s, \eta')\,dsd\eta',
\end{aligned}
$$

1) 译者注: 原文将下式用 $g(y)$ 表示. 为了避免与 (27.3) 中的 g 相混淆, 改用 $h(y)$ 表示.

其中,我们用 $\hat{v}_1(y', s, \eta')$ 表示 $a(z', y')v(y', s)$ 关于 z' 的 Fourier 变换;当然,它等于 $a(z', y')$ 的 Fourier 变换和 v 的 Fourier 变换的卷积. 应用(25.2), 由此即得, 对于任何 k, l, α', 对于适当的 $C>0$, 我们有

$$(27.24)\quad \iint (1+|\eta'|^2)^k \left| D_{y'}^{\alpha'}\left(\frac{\partial}{\partial y^n}\right)^l \hat{v}_1(y', y^n, \eta')\right|^2 dy^n d\eta' \leqslant C\iint (1+|\eta'|^2)^k \left|\left(\frac{\partial}{\partial y^n}\right)^l \hat{v}(\eta', y)\right|^2 dy^n d\eta'.$$

另一方面,从(27.16)我们推得

$$(27.25)\quad D_{\eta_j}G(y, s, \eta') = -\int_0^{y^n} H(s-t)[(D_{\eta_j}\rho_+)(y^n-t) + (D_{\eta_j}\rho_-)(s-t)]\exp[-\rho_+(y^n-t)+\rho_-(t-s)]dt,$$

其中已令 $y'_0=y'$. 这里的要点是 $|D_{\eta_j}\rho_\pm|$ 是有界的. 这个事实导致两个不同类型的估计:

$$(27.26)\quad \begin{aligned} &|D_{\eta_j}G| \leqslant C\rho^{-1}\int_0^{y^n} H(s-t)\exp[-c\rho(y^n-2t+s)]dt,\\ &|D_{\eta_j}G| \leqslant C\int_0^{y^n} H(s-t)(y^n-2t+s)\exp[-c\rho(y^n-2t+s)]dt. \end{aligned}$$

其中第二种类型的估计指出, 当把 G 看为关于 (y^n, s) 的核时, 它的性状象一个三重卷积的核. 当用 $D_{y'}^{\alpha'}G$ 代替 G 时,我们有类似的估计.

还是从(27.25),我们推得

$$\left|\frac{\partial}{\partial y^n} D_{\eta_j}G\right| \leqslant C\rho^{-2}\int_0^{y^n} H(s-t)\exp[-c\rho(y^n-2t+s)]dt,$$

用 $D_{y'}^{\alpha'}G$ 代替 G 时, 再一次得到类似的估计. 这指出了, 在某些方面 $\frac{\partial}{\partial y^n} D_{\eta_j}G$ 有一些类似于 G 的性质, 例如 (27.18). 表达式 (27.25) 指出, Dirac 广义函数 $\delta(y^n-s)$ 将只出现在 $D_{\eta_j}G$ 关于 y^n 的微商三次之后, 它的 k 阶导数只出现在微商 $k+3$ 次之后.

如果利用所有这些性质, 我们就得到一个不等式

$$\int\left|\int D_{y'}^{\alpha'}\left[\left(\frac{\partial}{\partial y^n}\right)^m (D_{\eta_j}^{\beta}G)(y,\ s,\ \eta')\hat{v}_1(y',\ s,\eta')\right]ds\right|^2 dy^n$$
$$\leqslant C'\sum_{\beta'\leqslant\alpha'}\sum_{l=0}^{m-3}\rho^{2(m-l-3)}\int\left|D_{y'}^{\alpha'}\left(\frac{\partial}{\partial y^n}\right)^l\hat{v}_1(y',\ y^n,\ \eta')\right|^2 dy^n.$$

从这点开始，我们可以与从(27.19)推导(27.21)几乎完全一样地进行. 我们计算 $h(y)$ 关于 y' 的 Fourier 变换，它导致处理

$$\iint e^{i\langle y',\eta'-\zeta'\rangle}(1+|\eta'-\zeta'|^2)^{-M}$$
$$\times(1-\Delta_{y'})^M\{\chi(y')(D_{\eta_j}G)(y,\ s,\ \eta')\hat{v}_1(y',\ s,\ \eta')\}ds dy' d\eta'$$

以及一个类似的量，其中 G 用 $\left(\frac{\partial}{\partial y^n}\right)^l G$ 代替. 应用 Leibniz 公式，并选取 M 充分大，我们得到下述形式的估计：

$$\iint(1+|\eta'|^2)^{k+2-m}\left|\left(\frac{\partial}{\partial y^n}\right)^m\hat{h}(\eta',\ y^n)\right|^2 d\eta' dy^n \tag{27.27}$$
$$\leqslant C^*\sup_{y'}\sum_{|\alpha'|\leqslant M}\sum_{l=0}^{m-3}\iint(1+|\eta'|^2)^{k-l-1}$$
$$\times\left|D_{y'}^{\alpha'}\left(\frac{\partial}{\partial y^n}\right)^l\hat{v}_1(y',\ y^n,\ \eta')\right|^2 d\eta' dy^n.$$

组合(27.24)和(27.27)，我们就得到所求者.

这样，就完成了定理 27.2 的证明.

推论 27.1 我们作与定理 27.1 和 27.2 中相同的假设. 如果 $f\in C^\infty(\bar{\Omega})$ 和 $g\in C^\infty(\Gamma)$，则 (27.2)—(27.3)的解 u 属于 $C^\infty(\bar{\Omega})$.

从

$$C^\infty(\bar{\Omega})=\bigcap_{m=0}^{+\infty}H^m(\Omega) \tag{27.28}$$

这一事实即得此推论.

习 题

27.1 令 $\Omega=\{(x,\ y)\in\mathbf{R}^2;\ x^2+y^2<1\}$. 对于在 Ω 中 (几乎处处) 定义的函数施行 Fourier 级数展开：

$$u(r,\ \theta)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}c_m(r)e^{im\theta}. \tag{27.29}$$

关于其 Fourier 系数 $c_m(r)$，叙述并证明使 $u(r,\ \theta)\in H^k(\Omega)$($k$ 是一正整数) 的必要和充分的条件. 利用在习题 25.4 中所描述的 $H^s(\mathbf{T}^1)(s\in\mathbf{R})$ 的特性以及所找到的充要条件，证明下述论断：

(1) 任给 $k\geqslant 1$ 和 $u\in H^k(\Omega)$，如果 $0\leqslant j<k$，则 $(\partial/\partial r)^j u$ 在 $\partial\Omega$ 上的迹属于 $H^{k-j-1/2}(\partial\Omega)$；

(2) 任给 $k\geqslant 1$ 和 $H^{k-1/2}(\partial\Omega)$ 的元素 g，则在 Ω 中存在一个唯一的调和函数，它属于 $H^k(\Omega)$，且 g 是它在 $\partial\Omega$ 上的迹.

27.2　令 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的一有界开子集，它有 C^∞ 边界 $\partial\Omega$，并且，Ω 在 $\partial\Omega$ 的一侧．令 m 是一整数，$m\geqslant 1$，并用 $\mathscr{N}^m(\Omega)$ 表示 Ω 中属于 $H^m(\Omega)$ 的调和函数的空间．证明，$H^m(\Omega)$ 是 $\mathscr{N}^m(\Omega)$ 与 $H^m(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ 的拓扑直接和.

27.3　令 Ω 是 $\mathbf{R}^2$ 中的单位圆盘 $x^2+y^2<1$．给出函数 $u\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ 的一个例子，它使得 $\Delta\tilde{u}\notin L^2(\mathbf{R}^2)$，其中 $\tilde{u}$ 是通过在 $\mathbf{R}^2\backslash\Omega$ 中令 $\tilde{u}=0$ 而得到的 u 对于 $\mathbf{R}^2$ 的延拓.

27.4　令 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 是开的，有界的，有光滑的边界，并且，它在其边界的一侧．证明，对于任意给定的一组函数

$$f\in H^{-1}(\Omega),\quad g_j\in H^{2(k-j)-3/2}(\partial\Omega)\quad (j=0,\cdots,k-1),$$

存在一个唯一的函数 $u\in H^{2k-1}(\Omega)$，使得

$$\Delta^k u=f \quad \text{在 } \Omega \text{ 中}, \tag{27.30}$$

$$\gamma(\Delta^j u)=g_j,\quad j=0,\cdots,k-1, \tag{27.31}$$

其中 γ 是在 $\partial\Omega$ 上的迹.

关于一个变量 X 的具有实系数的多项式 $P(X)$，给出一个适当的条件，使得在用

$$P(\Delta)u=f \quad \text{在 } \Omega \text{ 中} \tag{27.32}$$

代替方程(27.30)之后，相同的结论仍成立.

28．弱极大值原理

在这一节中，我们首先致力于从弱 Dirichlet 问题或广义 Dirichlet 问题的 L^2 理论到所谓经典理论的过渡．在经典理论中，关于数据，开集 Ω，它的边界 $\Gamma=\partial\Omega$，右端 f，边界值 g 等的正规性假设被放松了，或者，更正确地说，不同于它们在 L^2 理论中的假设．例如，我们必须会处理开集 Ω 是平面中的一正方形，或者是 $\mathbf{R}^3$ 中的一立方体的情形．另一特性是：边界值 g 的正规性将不能用空间 $H^{1/2}(\Gamma)$ 来描述．例如，g 可以只是一连续函数．类似地，右端 f 将不必属于 $H^{-1}(\Omega)$，等等.

暂时，我们略去关于 $\partial\Omega$ 的任何光滑性要求．只假设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的一有界开子集．事实上，在很多命题中，甚至有界性的假设也可去掉．

在这一节中，所有的函数和广义函数都是实值的．这样的处理只是技术性的，对于结论没有多大影响：所研究的算子 $\lambda-\Delta(\lambda\geqslant 0)$ 把实函数变为实函数，而复函数 $(\lambda-\Delta)u=f$ 可被分解为两个同类型的实方程．空间 $H^m(\Omega)$，$C^\infty(\Omega)$ 等将都由实函数和实广义函数组成；$H^m(\Omega)$ 将被视作一个实 Hilbert 空间．

我们从引进一个新概念开始，这个新概念是关于 $H^1(\Omega)$ 的元素的（部分）次序关系．记住，$C^\infty(\Omega)\cap H^1(\Omega)$ 在 $H^1(\Omega)$ 中是稠的（命题 24.1）．

定义 28.1 令 E 是 $\overline{\Omega}$ 的任一子集，u 是 $H^1(\Omega)$ 的任一元素．我们说，*在 $H^1(\Omega)$ 的意义下 u 在 E 上是非负的*，如果在 $C^\infty(\Omega)\cap H^1(\Omega)$ 中存在一个在 $H^1(\Omega)$ 中收敛于 u 的序列 $\{u_\nu\}$，使对每个 ν 下述事实成立：

(28.1) 在 $\mathbf{R}^n$ 中存在 E 的一个开邻域 U_ν，使得在 $U_\nu\cap\Omega$ 中 $u_\nu>0$．

此时，我们记为：在 E 上 $u\succcurlyeq 0$．

如果在 E 上 $-u\succcurlyeq 0$，则记为：在 E 上 $u\preccurlyeq 0$；此时我们说，*在 $H^1(\Omega)$ 的意义下 u 在 E 上是非正的*．如果在 E 上同时有 $u\succcurlyeq 0$ 和 $u\preccurlyeq 0$，则记为：在 E 上 $u\approx 0$．这样，通过在 E 上检验是否有 $u-v\succcurlyeq 0$ 或 $u-v\preccurlyeq 0$，就能在 E 上比较 $H^1(\Omega)$ 的任意两个元素 u, v．自然，此时我们就分别写为在 E 上 $u\succcurlyeq v$ 或 $u\preccurlyeq v$，等等．我们说，*在 $H^1(\Omega)$ 的意义下 u 在 E 上是有界的*，如果对某个实数 M，在 E 上 $u\preccurlyeq M$．这些数 M 的下确界称为 u 在 E 上的*极大值*，并记为 $\max_E u$．还可以定义 u 在 E 上的*极小值*；用 $\min_E u$ 表示．我们还注意，使得在 E 上 $u\succcurlyeq 0$ 的函数 $u\in H^1(\Omega)$ 的集合是 $H^1(\Omega)$ 中的一个*闭凸锥*．

人们也许希望把“在 E 上 $u\succcurlyeq 0$”这一概念与更通常的概念“在 E 上几乎处处 (a.e.) $u\geqslant 0$”加以比较．容易证明下述命题，它在以

后将用到：

命题 28.1 如果在 Ω 中 a.e.$u\geqslant 0$，则在 Ω 上 $u\succcurlyeq 0$.

如果 E 是 Ω 的一个子集，又如果在 E 上 $u\succcurlyeq 0$，则在 E 中 a.e.$u\geqslant 0$.

证明 事实上，如果我们回到命题 24.1 的证明，那么第一个论断的证明是显然的：在此证明中所构造的函数 v_ν 和 v 在 Ω 中 $\geqslant 0$，并且 $v+\varepsilon$——在 Ω 中它 >0——当 ε 趋于 $+0$ 时在 $H^1(\Omega)$ 中收敛于 u.

接着我们来证明第二个论断. 令 $u_\nu\in C^\infty(\Omega)\cap H^1(\Omega)$ 在 $H^1(\Omega)$ 中收敛于 u，并对每个 ν，令 U_ν 是 E 在 Ω 中的一个开邻域，在 U_ν 中 $u_\nu>0$. 令 F 表示所有的 U_ν 的交集；则 $E\subset F$，且 F 是可测的. 因为 u_ν 在 $L^2(\Omega)$ 中收敛于 u，因此存在 $\{u_\nu\}$ 的一个在 Ω 中 a.e. 收敛于 u 的子序列. 因为这个子序列的元素在 F 上都 >0，因而，我们就得到在 F 中 u 必然几乎处处 $\geqslant 0$ 这一结论.

证毕.

现在考虑一个在实直线上是一致 Lipschitz 连续的（实值）函数 $G(t)$，即使得对某个常数 $K>0$，有

(28.2) $\quad |G(t)-G(t')|\leqslant K|t-t'|$ 对所有的 $t,\ t'\in\mathbf{R}^1$.

显然，G 的广义导数 G' 属于 $L^\infty(\mathbf{R}^1)$，并且其 L^∞ 范数界于 K. 事实上，任给 $\varphi\in C_c^\infty(\mathbf{R}^1)$，有

$$
\begin{aligned}
\langle G',\varphi\rangle &= -\int G(t)\varphi'(t)\,dt\\
&=\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}}\int G(t)\,\frac{1}{h}[\varphi(t)-\varphi(t+h)]\,dt\\
&=\lim_{h}\int \frac{1}{h}\,[G(t)-G(t-h)]\varphi(t)\,dt,
\end{aligned}
$$

因而，由 (28.2)，$|\langle G',\varphi\rangle|\leqslant K\|\varphi\|_{L^1}$，这证明了我们的论断[注意，其逆亦真：若 $G'\in L^\infty(\mathbf{R}^1)$，则 (28.2) 成立，其中 $K=\|G'\|_{L^\infty}$].

我们有

引理 28.1 令 G 在 $\mathbf{R}^1$ 中是一致 Lipschitz 连续的，并令 G' 表示其广义函数导数的一个有界的表达式. 则 $u\mapsto G(u)$ 把 $H^1(\Omega)$ 映

入自身，并且

(28.3) $(\partial/\partial x^j)G(u)=G'(u)(\partial/\partial x^j)u, \quad j=1, \cdots, n,$

这里约定，当右端的任一因子等于零时，右端也等于零．此外，如果 $G(0)=0$，则 $u\mapsto G(u)$ 把 $H_0^1(\Omega)$ 映入自身．

证明 令 $\{u_\nu\}$ 是 $C^\infty(\Omega)\cap H^1(\Omega)$ 中的一个序列，它在 $H^1(\Omega)$ 中收敛于 u．我们将反复应用 (28.2)：首先，对于每个 ν，有 $|G(u_\nu(x))|\leqslant|G(u_\nu(x_0))|+K|u_\nu(x_0)|+K|u_\nu(x)|$，其中 x 是 Ω 中的动点，而 x_0 是 Ω 的一个任意选取的固定点．这指出了每个 $G(u_\nu)$ 属于 $L^2(\Omega)$（注意，所有这些函数在 Ω 中都是连续的）．其次，我们有 $\|G(u_\nu)-G(u_\mu)\|_{L^2(\Omega)}\leqslant K\|u_\nu-u_\mu\|_{L^2(\Omega)}$，这指出了 $G(u_\nu)$ 构成 $L^2(\Omega)$ 中的一 Cauchy 列．再次，对每个 $x\in\Omega$，有 $|G(u(x))-G(u_\nu(x))|\leqslant K|u_\nu(x)-u(x)|$，这指出了 $G(u)$ 属于 $L^2(\Omega)$ 和

(28.4) $\|G(u_\nu)-G(u)\|_{L^2(\Omega)}\leqslant K\|u_\nu-u\|_{L^2(\Omega)};$

这样，$G(u_\nu)$ 在 $L^2(\Omega)$ 中收敛于 $G(u)$．由直接计算[$G(u)$ 的广义导数]看到，公式(28.3)是对的．特别，对每个 ν，它蕴涵着

(28.5) $\|(\partial/\partial x^j)G(u_\nu)\|_{L^2(\Omega)}\leqslant K\|u_\nu\|_1.$

从 (28.4) 和 (28.5) 得到，$\{G(u_\nu)\}$ 是 $H^1(\Omega)$ 中的一个有界序列；因而，它有一子序列在 $H^1(\Omega)$ 中弱收敛——当然弱收敛于 $G(u)$，因而 $G(u)$ 属于 $H^1(\Omega)$．

现在假设 $G(0)=0$ 和 $u\in H_0^1(\Omega)$．我们可以在 $C_c^\infty(\Omega)$ 中取上面给出的序列 $\{u_\nu\}$．此时 $G(u_\nu)$ 有包含于 Ω 中的紧支集，因而 $G(u_\nu)$ 属于 $H_0^1(\Omega)$（命题 24.3）．另一方面，我们已看到 $G(u)$ 属于 $\{G(u_\nu)\}$ 的弱闭凸包．由 Hahn-Banach 定理的一个直接推论知道，$\{G(u_\nu)\}$ 的弱闭凸包与其强闭凸包是一样的，而后者包含在闭线性子空间 $H_0^1(\Omega)$ 中．　证毕．

命题 28.2 令 u 属于 $H^1(\Omega)$［或者，属于 $H_0^1(\Omega)$］．则 $|u|$，$u^+=\sup(u, 0)$，$u^-=\inf(u, 0)$ 亦然．令 v 是 $H^1(\Omega)$［或者，$H_0^1(\Omega)$］的另一个元素．则 $\sup(u, v)$ 和 $\inf(u, v)$ 也属于 $H^1(\Omega)$［或者，属于 $H_0^1(\Omega)$］．

证明 关于 $|u|$ 的命题，只需对于 $G(t)=|t|$ 应用引理 28.1．而

$u^+=\frac{1}{2}(u+|u|)$, $u^-=u-u^+$, $\sup(u,\ v)=u+(v-u)^+$, $\inf(u,\ v)=u+(v-u)^-$. 证毕.

我们现在需要 Lax-Milgram 定理（引理 23.1）的一个推广. 令 H 是一实 Hilbert 空间[对我们而言, H 将为 $H_0^1(\Omega)$, 或者, 在推论 28.1 中, $H=H^1(\Omega)$]; 令 K 是 H 的一个闭凸子集. 用 H' 表示 H 的对偶空间, 用 $\langle,\rangle$ 表示H和 H' 间的对偶性括号. 对于任一 $u\in K$, 我们令

(28.6) $\qquad K_u=\{v\in H;\ \exists\rho>0,\ 使得\ u+\rho v\in K\}.$

当K是一仿射子簇(affine subvariety)时（即, 某一线性子空间的平行集合), 我们有 $K_u=K-u$, 它是一线性子空间. 一般地, K_u 是一凸锥; 我们有: $K_u=H$, 当且仅当 u 属于K的内点集.

引理 28.2 令 $a(u,\ v)$ 是 $H\times H$ 上的一个连续双线性形式. 假设 a 在H上是强制的（定义 23.1), 对称的, 并假设其相伴二次形式 $a(v,\ v)$是非负的.

则, 任给 $f\in H'$, 存在 K 的唯一一个元素 u, 使得

(28.7) $\qquad a(u,\ v)\geqslant\langle f,\ v\rangle \quad 对每个\ v\in K_u.$

在引理 28.2 中令 $K=H$, 则在实 Hilbert 空间的情形, 我们得到 Lax-Milgram 定理(引理 23.1). 在这个情形, $K_u=H$, 并且, $v\in K_u$ 当且仅当 $-v\in K_u$, 因而, 我们必须同时有 $a(u,\ v)\geqslant$ 和 $\leqslant\langle f,\ v\rangle$. 当 K_u 是某些直线(而不仅是半直线)的并集时, 例如, 当 K_u 是一线性子空间时(即, 当K是一仿射子簇时), 此论证仍然有效.

引理 28.2 的证明 令

$$I(u)=a(u,\ u)-2\langle f,\ u\rangle.$$

我们来证明, 存在一数 $d>-\infty$, 使得对于每个 $u\in K$, 有 $I(u)\geqslant d$, 并且, 对于某一唯一的 $u\in K$, 有 $I(u)=d$. 此论证与证明 Hilbert 空间中对于一闭凸集合的正交投影的存在性的论证是相同的, 事实上, 引理 28.2 是此存在性的重述.

首先, 由 $a(u,\ v)$的强制性, 有

$$I(u)\geqslant c^2\|u\|_H^2-2\|f\|_{H'}\|u\|_H=\left(c\|u\|_H-\frac{1}{c}\|f\|_{H'}\right)^2-c^{-2}\|f\|_{H'}^2,$$

因而，$d=\inf_{u\in K}I(u)>-\infty$.

对于每个 $j=1, 2, \cdots$，令 $K_j=\{w\in K;\ I(w)\leqslant d+1/j\}$. 如果 w_1，w_2 属于 K_j，则 $\frac{1}{2}(w_1+w_2)\in K$，因为$K$是凸的．并且，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}a(w_1-w_2,\ w_1-w_2)\\&\quad=a(w_1,\ w_1)+a(w_2,\ w_2)-2a\left(\frac{w_1+w_2}{2},\ \frac{w_1+w_2}{2}\right)\\&\quad=I(w_1)+I(w_2)-2I\left(\frac{w_1+w_2}{2}\right)\leqslant2\left(d+\frac{1}{j}\right)-2d=\frac{2}{j}.\end{aligned}$$

如果再一次利用 $a(u, v)$ 的强制性，我们就看到 K_j 的直径 $\leqslant 2/(c\sqrt{j})$．因为K是闭的，因而K_j的交集只由单一个点$u\in K$ 组成．自然，$I(u)=d$.

现在令 $v\in H$ 是使得对于某个 $\rho>0$ 有 $u+\rho v\in K$ 的一元素．因为 K 是凸的，所以对于所有的 t $(0\leqslant t\leqslant\rho)$，我们即有 $u+tv\in K$，我们知道，在 $(0, \rho)$ 上，函数 $I(u+tv)-I(u)=t^2a(v, v)+t\{a(u, v)-\langle f, v\rangle\}\geqslant0$．但是，为要这是可能的，当且仅当(28.7)成立．

现假设用 $u_1\in K$ 代替 u 后，(28.7)仍然成立．注意，我们有 $v=u_1-u\in K_u$，而 $-v\in K_{u_1}$．从(28.7)推得

$$a(u, v)\geqslant\langle f, v\rangle,\qquad -a(u_1, v)\geqslant-\langle f, v\rangle,$$

把这两个不等式相加，即得 $a(v, v)\leqslant0$．因为 $a(v, v)\geqslant c^2\|v\|_H^2$，因而必有 $u=u_1$． 证毕．

推论 28.1 令 $a(u, v)$ 是 $H\times H$ 上的一连续对称双线性泛函，它在 H 的一闭线性子空间 H_0 上是强制的．

令K是H的一闭凸子集，使得对某个 $h^0\in H$，有 $K\subset H_0+h^0$．则存在K的唯一一个元素 u，使得

(28.8) $$a(u, v)\geqslant0\quad 对每个\ v\in K_u.$$

证明 令 $K^0=K-h^0$．显然，K^0 是 H_0 的一闭凸子集．并且，$u\in K\Leftrightarrow u-h^0\in K^0$ 和

$$u-h^0+\rho v\in K^0 \Leftrightarrow u+\rho v\in K,$$

因而，$K_u=\{v\in H_0;\ \exists\rho>0,\ 使得\ u-h^0+\rho v\in K^0\}$. 我们可以应用引理 28.2，其中用 H_0 代替 H，用 K^0 代替 K，而 f 为 f: $h\to -a(h^0, h)$. 我们推得，存在一唯一的 $u-h^0\in K^0$，使得

$$a(u-h^0, v)\geqslant -a(h^0, v) \quad 对每个\ v\in K_u.$$

定义 28.2 我们说，Ω 中的广义函数 u 是 $\lambda-\Delta$ 的一个下解(subsolution)，如果 $(\Delta-\lambda)u$ 是 Ω 中的正 Radon 测度. 我们说，u 是一上解(supersolution)，如果 $-u$ 是一下解.

当 $\lambda=0$ 时，即，当所研究的算子是负 Laplace 算子时，下解就称为下调和 (subharmonic) 广义函数(或函数)，上解称为上调和 (superharmonic)广义函数(这样，如果 Δu 是一正 Radon 测度，则 u 是下调和的).

经典的 L. Schwartz 定理说，任一正广义函数是一正 Radon 测度；因而，u 是 $\lambda-\Delta$ 的下解意味着

$$(28.9)\qquad \langle(\lambda-\Delta)u,\ \varphi\rangle=\langle u,\ (\lambda-\Delta)\varphi\rangle\leqslant 0,$$

对使得在 Ω 中 $\varphi\geqslant 0$ 的每个 $\varphi\in C_c^\infty(\Omega)$.

此外，如果还知道 $u\in H^1(\Omega)$，则可以用下述方式重述(28.9)：

$$(28.10)\qquad a_\lambda(u, \varphi)=\lambda\int_\Omega u\varphi dx+\sum_{j=1}^n\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x^j}\frac{\partial\varphi}{\partial x^j}dx\leqslant 0,$$

对所有 $\varphi\in C_c^\infty(\Omega)$，$\varphi\geqslant 0$.

定理 28.1 令 $u, v\in H^1(\Omega)$ 是 $-\Delta+\lambda$ 的两个下解，则 $\sup(u, v)$ 也是 $-\Delta+\lambda$ 的下解.

证明 令 $w=\sup(u, v)$，并用 K 表示使得

$$(28.11)\qquad f\preccurlyeq w \quad 在\ \Omega\ 上，f-w\in H_0^1(\Omega)$$

的 $f\in H^1(\Omega)$ 的集合. 作为 $H^1(\Omega)$ 的一闭凸锥和一闭仿射子簇的交集，K 是 $H^1(\Omega)$ 的一闭凸子集. 由于适用于 $a_\lambda(u, v)$ 的推论 28.1，我们得到，存在一唯一的 $\eta\in K$，使得

$$(28.12)\qquad a_\lambda(\eta, g)\geqslant 0 \quad 对所有的\ g\in K_\eta.$$

这时，我们注意，K_η 包含所有在 Ω 中 $\leqslant 0$ 的函数 $\varphi\in C_c^\infty(\Omega)$. 事实上，若 $\eta\preccurlyeq w$，则对任意的 $\rho>0$，我们也有 $\eta+\rho\varphi\preccurlyeq w$，并且，如

果 $\eta-w$ 属于 $H_0^1(\Omega)$，则 $\eta+\rho\varphi-w$ 也属于 $H_0^1(\Omega)$. 如果在(28.12)中用这样的函数 φ 代替 g，即得到：η 是 $-\Delta+\lambda$ 的一个下解.

现在令 $\zeta=\sup(u,\ \eta)=u+(\eta-u)^+=\eta-(\eta-u)^-$. 显然（参看命题 28.2），在 Ω 上 $\zeta\preccurlyeq w$. 我们知道，$\eta-w$ 是 C_c^∞ 的一元素序列 $\{\varphi_\nu\}$ 在 $H^1(\Omega)$ 中的极限. 如果回到 $H^1(\Omega)$ 的两个元素的上确界的定义(参看命题 28.1)，就得到，$\zeta-w$ 属于函数集合 $\{\sup(u-w,\ \varphi_\nu)\}$ 的闭凸包，并且，在 φ_ν 的支集之外 $\sup(u-w,\ \varphi_\nu)$ 等于零(因为处处有 $u\leqslant w$)，因而它有紧支集，所以属于 $H_0^1(\Omega)$，因此，我们看到 $\zeta-w\in H_0^1(\Omega)$. 总之，$\zeta\in K$，并且，自然有 $\zeta-\eta\in K_\eta$. 从(28.12)我们得到

$$a_\lambda(\eta,\ \zeta-\eta)\geqslant 0. \tag{28.13}$$

从 ζ 的定义立即得到 $(\zeta-u)(\zeta-\eta)=-(\eta-u)^+(\eta-u)^-$ 在 Ω 中恒等于零. 另一方面，$(\zeta-u)$ 和 $(\zeta-\eta)$ 的一阶广义函数导数是局部可积函数. 由此即得

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)(\zeta-u)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)(\zeta-\eta)\equiv 0 \quad 在\ \Omega\ 中 \tag{28.14}$$

(记住，用我们的术语，一个函数总是被视作一广义函数，当其表示式的任意一个——并且，每一个——几乎处处等于零时，它"恒等于"零). 从(28.14)即得

$$a_\lambda(\zeta-u,\ \zeta-\eta)=0,$$

即
$$a_\lambda(\zeta,\ \zeta-\eta)=a_\lambda(u,\ \zeta-\eta).$$

现在我们将利用 $\zeta-\eta\in H_0^1(\Omega)$ 和在 Ω 中 $\zeta\geqslant\eta$ 这一事实. 通过截断和正规化，我们看到，$\zeta-\eta$ 是 $C_c^\infty(\Omega)$ 的一非负元素序列在 $H^1(\Omega)$ 中的极限，因而，由(28.10)，我们有 $a_\lambda(u,\ \zeta-\eta)\leqslant 0$. 所以，

$$a_\lambda(\zeta,\ \zeta-\eta)\leqslant 0. \tag{28.15}$$

从(28.15)减去(28.13)，我们看到 $a_\lambda(\zeta-\eta,\ \zeta-\eta)\leqslant 0$，因而，因为 a_λ 是强制的，则 $\zeta=\eta$.

这样，几乎处处有 $u\leqslant\eta\leqslant w$. 类似地，几乎处处有 $v\leqslant\eta\leqslant w$.

通过修改 u, v 和 η，或者更确切地说，通过适当地选取 u, v 和 η 的表示式，我们不妨假设这些不等式处处成立. 因而，对于任给的 $x\in\Omega$，如果 $w(x)=u(x)$，我们就有 $\eta(x)=w(x)$；相同的结论亦真，若 $w(x)=v(x)$. 我们得到了 $w=\eta$ 这一结论. 因为我们已经证明了 η 是一下解，因而就完成了定理 28.1 的证明.

推论 28.2 如是 $u, v\in H^1(\Omega)$ 是下调和的，则 $\sup(u, v)$ 亦然.

推论 28.3 如果 $u\in H^1(\Omega)$ 是下调和的，则对任意实数 θ，

$$\{u\}_\theta=\sup(u, \theta)$$

亦然. 特别，$u^+=\sup(u, 0)$ 是下调和的.

推论 28.4 令 $\lambda\geqslant 0$ 且 $u\in H^1(\Omega)$ 是 $-\Delta+\lambda$ 的一下解. 则对任给的数 $\theta\leqslant 0$，$\{u\}_\theta$ 也是 $-\Delta+\lambda$ 的下解.

事实上，$(\Delta-\lambda)\theta=-\lambda\theta\geqslant 0$.

现在我们来证明这一节的主要结果：

定理 28.2 令 $u\in H^1(\Omega)$ 是 $-\Delta+\lambda(\lambda\geqslant 0)$ 的一下解. 如果几乎处处 $u\geqslant 0$，则

$$\max_{\Omega} u\leqslant\max_{\partial\Omega} u. \tag{28.16}$$

注 28.1 由于命题 28.2，不等式(28.16)就意味着在 Ω 中几乎处处有 $u\leqslant\max_{\partial\Omega} u$.

定理 28.2 的证明 假设 $M=\max_{\partial\Omega} u<+\infty$. 我们需要下述引理.

引理 28.3 令 $u\in H^1(\Omega)$ 在 $H^1(\Omega)$ 的意义下是在 $\partial\Omega$ 上有界的. 如果 θ 是任一严格大于 $\max_{\partial\Omega} u$ 的实数，则 $(u-\theta)^+\in H_0^1(\Omega)$.

证明 由假设，在 $C^\infty(\Omega)\cap H^1(\Omega)$ 中可找到一序列 $\{\varphi_\nu\}$，它在 $H^1(\Omega)$ 中收敛于 u，且使得对每个 ν，在一集合 $U_\nu\cap\Omega$ 上有 $\varphi_\nu<\theta$，这里 U_ν 是 $\partial\Omega$ 在 $\mathbf{R}^n$ 中的一开邻域. 但是，$(u-\theta)^+$ 属于函数集合 $\{(\varphi_\nu-\theta)^+\}$ 在 $H^1(\Omega)$ 中的闭凸包(参阅引理 28.1 的证明)；对于每个 ν，$(\varphi_\nu-\theta)^+$ 在 $U_\nu\cap\Omega$ 中恒为零，因而 $(\varphi_\nu-\theta)^+$ 属于 $H_0^1(\Omega)$ (命题 24.3)，所以 $(u-\theta)^+\in H_0^1(\Omega)$. 证毕.

现假设在 Ω 中几乎处处 $u\geqslant 0$. 如果 $-\infty\leqslant M<0$，则从引理 28.3 应推得：对任意 θ，$M<\theta<0$，有 $(u-\theta)^+=u+|\theta|\in H_0^1(\Omega)$.

但是，读者容易弄清楚，这是与在Ω中几乎处处有$u+|\theta|\geqslant|\theta|>0$这一事实相矛盾的。这样，必有$M\geqslant 0$.

除了在Ω中几乎处处$u\geqslant 0$这一假设外，现在再假设u是$-\Delta+\lambda$的下解。再令θ是任一大于M的数。显然，$u-\theta$是$-\Delta+\lambda$的下解，因而，由推论 28.4，$(u-\theta)^+$也是$-\Delta+\lambda$的下解。所以，对所有在Ω中$\geqslant 0$的$\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$，有

(28.17) $$a_\lambda((u-\theta)^+, \varphi)\leqslant 0.$$

由连续性，可把(28.17)推广到在Ω中几乎处处$\geqslant 0$的所有$\varphi\in H_0^1(\Omega)$上。因而，由引理 28.3，可以取$\varphi=(u-\theta)^+$，又由a_λ的强制性，我们推得$(u-\theta)^+=0$，即，几乎处处$u\leqslant\theta$. 自然，这蕴涵着几乎处处$u\leqslant M$. 证毕.

推论 28.5 令$u\in H^1(\Omega)$是$-\Delta+\lambda(\lambda\geqslant 0)$的下解。则

(28.18) $$\max_{\Omega} u\leqslant\max_{\partial\Omega} u^+.$$

事实上，在Ω中$u\leqslant u^+$，可以应用(28.16)，其中用u^+代替u（由于推论 28.4）.

推论 28.6 令$u\in H^1(\Omega)$是下调和的，则

(28.19) $$\max_{\Omega} u\leqslant\max_{\partial\Omega} u.$$

证明 以M记(28.19)的右端，假设$M<+\infty$，并令θ是一严格大于M的实数。则$u-\theta$显然是下调和的（这里$\lambda=0$），因而，由(28.18)知道，在Ω中几乎处处$u-\theta\leqslant\max_{\partial\Omega}(u-\theta)^+$. 但是$(u-\theta)^+\in H_0^1(\Omega)$（引理 28.3），因而$\max_{\partial\Omega}(u-\theta)^+=0$. 这样，在$\Omega$中几乎处处$u\leqslant\theta$，因而在$\Omega$中几乎处处$u\leqslant M$. 证毕.

推论 28.7 令$u\in H^1(\Omega)$是$-\Delta+\lambda(\lambda\geqslant 0)$的上解，在$\Omega$中几乎处处$u\leqslant 0$. 则

(28.20) $$\min_{\partial\Omega} u\leqslant\min_{\Omega} u.$$

证明 $-u$是$-\Delta+\lambda$的一下解，几乎处处非负，因而，当用$-u$代替u时，(28.16)成立. 证毕.

推论 28.8 令$u\in H^1(\Omega)$适合：在Ω中$(-\Delta+\lambda)u=0$. 则

(28.21) $$\max_{\Omega}|u|\leqslant\max_{\partial\Omega}|u|.$$

证明 注意，u 和 $-u$ 是 $-\Delta+\lambda$ 的下解，因而，u^+ 和 $-u^-=\sup(-u, 0)$ 也是 $-\Delta+\lambda$ 的下解. 我们可以应用(28.16)于 u^+ 和 $-u^-$，这样就直接得到(28.21). 证毕.

推论 28.9 令 $u\in H^1(\Omega)$ 是 $-\Delta+\lambda$ 的一下解，$h\in H^1(\Omega)$ 适合：在 Ω 中 $(-\Delta+\lambda)h=0$. 如果 $u-h\in H_0^1(\Omega)$，则在 Ω 中几乎处处 $u\leqslant h$.

证明 显然，$u-h$ 是 $-\Delta+\lambda$ 的下解，因而 $(u-h)^+$ 亦然. 由命题 28.1，后者属于 $H_0^1(\Omega)$，因而由定理 28.2，在 Ω 中几乎处处 $(u-h)^+\leqslant 0$. 证毕.

推论 28.10 令 $u\in H_0^1(\Omega)$ 是 $-\Delta+\lambda$ 的下解，则在 Ω 中几乎处处 $u\leqslant 0$.

注 28.2 如果我们研究较 $-\Delta+\lambda$ 更为一般的二阶椭圆算子，则本节中的全部论证同样有效. 我们可以把这些论证应用于(23.6) 型的任一算子 L，L 的相伴双线性形式 $a(u, v)$ [参阅(23.7)] 在 $H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)$ 上是对称的，连续的，在 $H_0^1(\Omega)$ 上是强制的. 对称性要求甚至可被去掉——但这时我们需要进一步推广 Lax-Milgram 定理：在引理 28.2 中，$a(u, v)$是对称的这一条件应被证明是多余的. 可以做到这一点，但是相应的证明大大地难于引理 28.2 的证明.

我们应该问一下，与 Laplace 算子 Δ 有关的一些结果，如推论 28.2, 28.3 和 28.6，在研究(23.6)型的一般算子 L 时，是否有类似的结果. 检查它们的证明即发现，用到的唯一事实是，常数函数是($-\Delta$ 的)下解. 因而，在(23.6)中的零阶项 $c(x)$ 恒等于零时，对于(23.6)型的任何算子 L，类似的命题仍成立. 一般说来，在关于下解的命题的证明中，当 $c(x)$ 不恒等于零时，非正的常数函数是下解这一条件是必要的：这就要求在 Ω 中几乎处处 $c(x)\geqslant 0$.

29. 应用：经典 Dirichlet 问题的解

我们用与 § 28 中相同的记号：Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的有界开子集，在 Ω

中我们研究算子 $\lambda-\Delta$，这里 $\lambda\geqslant 0$．除非另有声明，否则，我们假设所有的函数和广义函数都是实值的．

令 g 是边界 $\partial\Omega$ 上的任一连续函数．可以把 g 延拓为 $\mathbf{R}^n$ 中具有紧支集的连续函数 $\tilde{g}$，并可构造 $\mathbf{R}^n$ 中的 C^∞ 函数序列，譬如说一个多项式序列，它在 $\tilde{g}$ 的支集上一致收敛于 $\tilde{g}$．再令 $\{g_j\}$ $(j=0, 1, \cdots)$ 是此序列在 $\bar{\Omega}$ 上的限制．对于每个 j，存在唯一的一个函数 $u_j\in H^1(\Omega)$，使得

$$(29.1)\qquad (\lambda-\Delta)u_j=0 \quad 在\ \Omega\ 中,$$

$$(29.2)\qquad u_j-g_j\in H_0^1(\Omega).$$

由弱极大值原理(推论 28.8)，我们有

$$(29.3)\qquad \max_{\Omega}|u_j-u_{j'}|\leqslant\max_{\partial\Omega}|u_j-u_{j'}|\leqslant\max_{\partial\Omega}|g_j-g_{j'}|.$$

(29.3) 立即蕴涵着 u_j 在 Ω 中一致收敛；令 $u\in C^0(\Omega)$ 是其极限．自然，在 Ω 中我们有 $(\lambda-\Delta)u=0$．显然，u 不依赖于序列 $\{g_j\}$ 的选取（因而不依赖于序列 $\{u_j\}$），这是把 u 与别的这样的序列的极限加以比较而得到验证的．

定义 29.1　刚才给出的函数 u 称为经典 *Dirichlet* 问题

$$(29.4)\qquad (\lambda-\Delta)u=0 \quad 在\ \Omega\ 中,$$

$$(29.5)\qquad u=g \quad 在\ \partial\Omega\ 上$$

的广义解，并用 $H_\lambda(g)$ 表示．

假设存在满足 (29.4)—(29.5) 的 $u\in C^0(\bar{\Omega})$；否则，假设可用某种方法把 g 延拓到 Ω 上，使得延拓后得到的函数 $\tilde{g}$ 属于 $C^0(\bar{\Omega})\cap H^1(\Omega)$，并假设存在 $u\in H^1(\Omega)$，满足 (29.4) 且使得 $u-\tilde{g}\in H_0^1(\Omega)$．在这两种情形中，$u=H_\lambda(g)$（习题 29.1）．

用 $\mathscr{B}^0(\Omega)$ 表示 Ω 中有界连续函数 f 的空间，赋予范数 $\sup_\Omega|f|$．从 (29.3) 和 $\max_\Omega|u_j|\leqslant\max_{\partial\Omega}|g_j|$ 这一事实得到

命题 29.1　H_λ 确定一个从 $C^0(\partial\Omega)$ 到 $\mathscr{B}^0(\Omega)$ 中的连续线性映射．

令 x 是 Ω 的一固定的然而是任意的点．则线性映射

$$(29.6)\qquad g\mapsto H_\lambda(g)(x)$$

在 $C^0(\partial\Omega)$ 上是连续的，因而它定义 $\partial\Omega$ 上一个 Radon 测度 m_x:

$$(29.7)\qquad H_\lambda(g)(x)=\int_{\partial\Omega} g(y)\,dm_x(y),\quad x\in\Omega.$$

$\lambda=0$ 的情形值得特别一提. 在此情形，测度 m_x 称为 $\partial\Omega$ 上的**调和测度**. 因为 Ω 中的在 $\partial\Omega$ 上恒等于 1 的唯一调和函数是在 Ω 中恒等于 1 的函数，我们即看到，m_x 的总质量是 1. 由于"极小值原理"，对于 $\partial\Omega$ 上任何非负的连续函数 g，我们有

$$\int_{\partial\Omega} g(y)\,dm_x(y)\geqslant 0,\quad \forall x\in\Omega,$$

即，m_x 是 $\partial\Omega$ 上的正 Radon 测度. 总之，我们看到，m_x 是 $\partial\Omega$ 上的一**概率**. 这个事实导致了 (Laplace 方程的) Dirichlet 问题一个新的用概率论语言的解释. 这个途径(或更确切一些，它的第一步)的一个简短描述可在 § 31 中找到.

很清楚，Radon 测度的积分理论现在使我们能够拓广泛函 H_λ 的定义域:

定义 29.2　$\partial\Omega$ 中的实值函数 g(不一定连续) 称为是**分解的** (resolutive)，如果对于 Ω 中的每个 x，它关于 m_x 是可积的. 在此情形，公式(29.7)还定义了 Dirichlet 问题(29.4)—(29.5)的广义解.

对于 $f\in C^0(\bar{\Omega})$，$g\in C^0(\partial\Omega)$，我们还能定义非齐次 Dirichlet 问题

$$(29.8)\qquad (\lambda-\Delta)u=f\quad 在\ \Omega\ 中,$$

$$(29.9)\qquad u=g\quad 在\ \partial\Omega\ 上$$

的广义解.

令 $\tilde{f}$ 在 $\bar{\Omega}$ 中等于 f，在 $\mathbf{R}^n\backslash\bar{\Omega}$ 中等于零. 令 E 是 $\lambda-\Delta$ 的任一基本解. 我们来证明下述引理.

引理 29.1　卷积 $E*\tilde{f}$ 在 $\mathbf{R}^n$ 中是 Lipschtz 连续的，并且对于 $\mathbf{R}^n$ 的每个紧子集 K，存在一常数 $C>0$，使得

$$(29.10)\qquad \sup_K|(E*\tilde{f})(x)|\leqslant C\|f\|_{L^\infty},$$

$$(29.11)\qquad \sup_{x,x'\in K}|(E*\tilde{f})(x)-(E*\tilde{f})(x')|\leqslant C|x-x'|\|f\|_{L^\infty}.$$

证明 因为我们处理的是 $\lambda-\Delta$ 的什么样的基本解这一点无关紧要，因此不妨取 $E=G_\lambda$，即在习题 9.7 中所考虑的广义函数。从 (9.27) 和 (9.28) 立即得到，E 和 $\operatorname{grad} E$ 在 $\mathbf{R}^n$ 中是局部可积的，因而得到 $f\mapsto E*\tilde{f}$ 和 $f\mapsto \operatorname{grad}E*\tilde{f}$ 是从 $L^\infty(\Omega)$ 分别到 $L^\infty_{loc}(\mathbf{R}^n;\mathbf{R})$ 和 $L^\infty_{loc}(\mathbf{R}^n;\mathbf{R}^n)$ 中的连续线性映射. 证毕.

现在，令 v 表示 $E*\tilde{f}$ 在 Ω 上的限制，$\dot{v}$ 表示 $E*\tilde{f}$ 在 $\partial\Omega$ 上的限制. 这两个限制都是连续的. 此时在(29.8)—(29.9)中可以取

(29.12) $$u=v+H_\lambda(g-\dot{v}).$$

研究 $g=0$ 的情形是有意义的. 此时，考虑到(29.7)，可把(29.12)更明确地写为

(29.13) $$u(x)=\int_\Omega E(x-x')f(x')dx' -\int_{\partial\Omega}\left(\int_\Omega E(y-x')f(x')dx'\right)dm_x(y),$$

即

(29.14) $$u(x)=\int_\Omega G(x,x')f(x')dx',$$

其中

(29.15) $$G(x,x')=E(x-x')-\int_{\partial\Omega}E(y-x')dm_x(y).$$

显然，$G(x,x')$ 是 $\Omega\times\Omega$ 中的一广义函数；在 $\Omega\times\Omega$ 的对角线的余集中它是一 C^∞ 函数. 事实上，在 $\Omega\times\Omega$ 中 $G(x,x')-E(x-x')$ 是 C^∞ 函数. 当 $g(x)=E(x-x')$ 时，$G(x,x')-E(x-x')$ 是(29.4)—(29.5)的广义解.

函数 $G(x,x')$不依赖于基本解 E 的选取. 事实上，任一别的基本解与 E 相差一函数，此函数是 $(\lambda-\Delta)h=0$ 在全空间中的解. 然而，此时

$$h(x-x')=\int_{\partial\Omega}h(y-x')dm_x(y),\quad x,x'\in\overline{\Omega}.$$

定义 29.3 $\Omega\times\Omega$ 中的广义函数 $G(x,x')$ 称为 Ω 中的算子 $\lambda-\Delta$ 的 Dirichlet 问题的 *Green 函数*.

在某种类似于定义 29.1 的意义下，我们有

(29.16) $(\lambda-\Delta_x)G(x,\ x')=(\lambda-\Delta_{x'})G(x,\ x')=\delta(x-x')$

在 $\Omega\times\Omega$ 中,

(29.17) $G(x,\ x')=0$ 对于 $x\in\partial\Omega$ $(x'\in\Omega)$.

对于"一般的"f 和 g, 在(29.12)中给出的(29.8)—(29.9)的广义解可写为

(29.18) $u(x)=\int_\Omega G(x,\ x')f(x')dx'+\int_{\partial\Omega}g(y)dm_x(y),\quad x\in\Omega.$

强调一下下述事实是重要的: 即使 g 是 $\partial\Omega$ 中的连续函数而 x_0 是 $\partial\Omega$ 的任意点, 在 $x\in\Omega$ 趋于 x_0 时, $u(x)$ 也不一定收敛于 $g(x_0)$. 我们现在来看一下发生刚才所述事情[即, 当 $x\to x_0$ 时 $u(x)\to g(x_0)$]的那些点.

定义 29.4 边界 $\partial\Omega$ 的点 x_0 称为正规的(regular),如果对 $\partial\Omega$ 上的任意连续函数 g,当 $x\in\Omega$ 收敛于 x_0 时, $H_\lambda(g)(x)$ 收敛于 $g(x_0)$.

不难得到一个点是正规点的必要条件. 首先,有

命题 29.2 令 $x_0\in\partial\Omega$ 对于 $\lambda-\Delta$ 是正规的. 那么,对于 Ω 中的任意的点 x', 当 $x\in\Omega$ 趋于 x_0 时, $G(x,\ x')$ 趋于零,并且, 对于 $\overline{\Omega}$ 中的任何连续函数 f, $\int_\Omega G(x,\ x')f(x')dx'\to 0$.

由于(29.13)到(29.15),这是明显的.

命题 29.3 令 $x_0\in\partial\Omega$ 对于 $\lambda-\Delta$ 是正规的. 则存在具有下述性质的函数 $\beta\in H^1(\Omega)$:

(29.19) $(\lambda-\Delta)\beta=-1$ 在 Ω 中;

(29.20) 在 Ω 中 $\beta<0$, 并且, 对于任意的 $y\in\partial\Omega$, $y\neq x_0$, 有 $\overline{\lim\limits_{\Omega\ni x\to y}}\ \beta(x)<0$;

(29.21) $\beta(x)\to 0$ 当 $x\in\Omega$ 趋于 x_0 时.

证明 考虑 $w(x)=1-\exp(M|x-x_0|^2)$. 容易验证,一旦 $2nM>\lambda$, 即有 $(\lambda-\Delta)w>\lambda\geqslant 0$. 令 β 是(29.19)在 $H^1(\Omega)$ 中使得 $\beta-w\in H_0^1(\Omega)$ 的唯一解. 因为 β 是下解, w 是上解, 从推论 28.10 即推得在 Ω 中 $\beta<w$, 因而推得(29.20). 由定义 29.1, 我们有 $\beta(x)=-\int_\Omega G(x,\ x')dx'+\int_{\partial\Omega}w(y)dm_x(y)$, 由 x_0 是正规的这一假设, 同

时注意到命题29.2,就得到:当 $x\in\Omega$ 趋于x_0 时 $\beta(x)\to w(x_0)=0$.

证毕.

我们将证明命题 29.3 的某种逆命题. 首先,引进下述经典定义:

定义 29.5 令 x_0 是边界 $\partial\Omega$ 上的一个点. Ω 中的连续函数 β 称为 x_0 处的一个闸 (barrier) 函数(对于 $\lambda-\Delta$), 如果 β 是 $\lambda-\Delta$ 的下解, 且满足(29.20)和(29.21).

在叙述和证明这一节的主要结果(定理 29.1)之前, 注意下述 $\partial\Omega$ 中的函数

(29.22)
$$\beta^*(y)=\overline{\lim_{\Omega\ni x\to y}}\,\beta(x),\quad y\in\partial\Omega$$

是上半连续的. 特别地, 在 $\partial\Omega$ 的任一紧子集上, 它达到它的极大值.

定理 29.1 点 $x_0\in\partial\Omega$ 是正规点的充要条件是, 存在一个属于 $H^1(\Omega)$ 的 x_0 处的闸函数 β.

证明 必要性从命题 29.3 即得,现在我们来证明充分性. 令 g 是 $\partial\Omega$ 上的任一连续函数,并令 $u=H_\lambda(g)$. 我们将证明: 任给 $\varepsilon>0$, 在 $\mathbf{R}^n$ 中存在 x_0 的一个开邻域 $U(x_0)$, 使得

(29.23) $|u(x)-g(x_0)|<\varepsilon$ 对每个 $x\in U(x_0)\cap\Omega$.

如果回到本节开头处 $H_\lambda(g)$ 的定义 (用序列 g_j 和 u_j), 我们就看到, 只需在 g 可以被延拓为 $\mathbf{R}^n$ 中的 C^∞ 函数这一情形证明我们的论断即可;我们仍用 g 表示此延拓.

令 η, τ 是两个大于零的数(η 小, τ 大). 令 h_+ (相应地, h_-) 是 $\mathbf{R}^n$ 中满足 $(\lambda-\Delta)h_\pm=0$, 并使得

$$h_\pm(x_0)=g(x_0)\pm\eta$$

的一函数. 我们令

$$v=h_-+\tau\beta,\ w=h_+-\tau\beta;$$

则 v 是 $\lambda-\Delta$ 的下解, w 是上解. 我们将证明, 如果 τ 足够大, 则在 Ω 中 $v<g<w$. 事实上,在 x_0 在 $\mathbf{R}^n$ 中的一充分小的邻域 $N(x_0)$ 中,我们有

$$h_-<g<h_+,$$

因而，由于在 Ω 中 $\beta<0$，有

(29.24) $v(x)<g(x)<w(x),\ \forall x\in N(x_0)\cap\Omega.$

假设 $N(x_0)$ 是开的，并设 Γ_0 是 $N(x_0)\cap\partial\Omega$ 关于 $\partial\Omega$ 的余集．根据我们预先的注释，如果 β^* 是在(29.22)中定义的 $\partial\Omega$ 上的函数，则存在一数 $c>0$，使得对所有的 $y\in\Gamma_0$，有 $\beta^*(y)<-c$．但是这就蕴涵着，如果稍微减小 c，就将有

$$\beta<-c \quad 在\ \Omega\backslash N(x_0)\ 中.$$

自然，这意味着可以选取 τ 如此大，以致于有

(29.25) $v<\inf g-\eta,\quad \sup g+\eta<w$ 在 $\Omega\backslash N(x_0)$ 中．

结合(29.24)和(29.25)就得到在 Ω 中 $v<g<w$.

令 $V=v-u$；显然，V 属于 $H^1(\Omega)$ 并为 $\lambda-\Delta$ 在 Ω 中的一下解．类似地，$W=w-u\in H^1(\Omega)$ 并为 Ω 中的上解．由推论 28.5，我们有

(29.26) $$\max_{\Omega} V\leqslant\max_{\partial\Omega} V^+.$$

注意，$V^+=(v-g-(u-g))^+=\sup(v-g,\ u-g)-(u-g)$.

我们知道 $u-g\in H_0^1(\Omega)$．令 $\{\phi_j\}$，$j=1,\ 2,\ \cdots$，是 $C_c^\infty(\Omega)$ 中的一函数序列，它在 $H^1(\Omega)$ 中收敛于 $u-g$．我们还知道，$\sup(v-g,\ u-g)$ 属于由函数集 $\{\sup(v-g,\ \phi_j)\}$ 张成的闭凸包（参阅引理 28.1 的证明)，并且因为在 Ω 中 $v<g$，在 $\phi_j=0$ 处就有 $\sup(v-g,\ \phi_j)=0$．我们得到，每个函数 $\sup(v-g,\ \phi_j)$ 属于 $H_0^1(\Omega)$，并且 $\sup(v-g,\ u-g)$ 也属于 $H_0^1(\Omega)$，因而 V^+ 亦然．然而，$\max_{\partial\Omega}V^+=0$，并且由于(29.26)，在 Ω 中我们就有 $V\leqslant 0$ a.e.．但是，在 Ω 中 v 是连续的，u 是解析的，因而在 Ω 中处处有 $v\leqslant u$．类似地，在 Ω 中 $u\leqslant w$．与性质(29.21)一起，利用 v，w 的定义及 $h_\pm$ 的连续性，我们看到，可以选取充分小的 η 和 $U(x_0)$，以致满足 (29.23)．

证毕．

我们通过给出下述事实的一个充分条件来结束这一节：存在一个在边界 $\partial\Omega$ 的一给定点 x_0 处的闸函数．此判别准则是经典的；必须注意，它不依赖于 $\lambda\geqslant 0$.

命题 29.4 如果在 $\mathbf{R}^n$ 中存在一闭球 $\overline{B}$, 使得

$$\{x_0\}=\overline{\Omega}\cap\overline{B}, \tag{29.27}$$

则存在 $\mathbf{R}^n$ 中的一广义函数 β, 使得

(29.28) $\Delta\beta=1$ 在 B 的球心的余集中;

(29.29) $\beta(x_0)=0$, $\beta(x)<0$ 对所有的 $x\in\overline{\Omega}$, $x\neq x_0$.

我们经常把条件(29.27)说成为: 对于 $\overline{\Omega}$, 在 x_0 处存在一密切球面.

证明 不妨假设球 B 的中心是原点; 令 R 是 B 的半径. 我们把 β 取为只是 $s=|x|^2$ 的函数; 则

$$\Delta\beta=4s(\partial/\partial s)^2\beta+2n(\partial/\partial s)\beta.$$

$$\beta(x)=\frac{1}{2n}(|x|^2-R^2)+C(|x|^{2-n}-R^{2-n})\quad 若\ n>2,$$

$$\beta(x)=\frac{1}{4}(|x|^2-R^2)-C\log(|x|/R)\qquad 若\ n=2.$$

对于任何的常数 $C>0$, 在 $\mathbf{R}^n\backslash\{0\}$ 中 $\Delta\beta=1$ (事实上, 在 $\mathbf{R}^n$ 中 $\Delta\beta=1+C'\delta$). 再者, 当 $|x|=R$ 时 $\beta(x)=0$, 特别, $\beta(x_0)=0$. 因此, 只剩下选取足够大的 C, 使得对每个 $x\in\overline{\Omega}$, $x\neq x_0$, 有

$$|x|^2-R^2<2nC(R^{2-n}-|x|^{2-n})\quad 若\ n>2,$$

$$|x|^2-R^2<2C\log(|x|^2/R^2)\qquad 若\ n=2.$$

因为 Ω 是有界的, 因此只需在 $|x|=R+\varepsilon$ ($\varepsilon>0$ 充分小)时验证它即可, 然而, 在这个情形, 它是特别明显的. 证毕.

我们不妨说, $\lambda-\Delta$ 的经典的 Dirichlet 问题在 Ω 中是适定的, 如果对于每个 $f\in C^0(\overline{\Omega})$ 和每个 $g\in C^0(\partial\Omega)$, 存在 $u\in C^0(\overline{\Omega})$, 在 Ω 中它满足 $(\lambda-\Delta)u=f$, 在 $\partial\Omega$ 中它满足 $u=g$. 由命题 29.3 我们看到, 此 Dirichlet 问题是适定的, 当且仅当在 $\partial\Omega$ 的每一点处存在一个属于 $H^1(\Omega)$ 的闸函数. 由命题 29.4 我们看到, 很大一类开集有这个性质. 例如: (i) 所有凸集; (ii) 所有边界为 C^1 超曲面的集合 Ω (并且, Ω 位于其边界的一侧). 容易作出更多的例子.

习 题

29.1 证明紧接在定义 29.1 下面的论断.

29.2 给出平面 $\mathbf{R}^2$ 的有界开子集 Ω 的一个例子，它不是凸的，边界不是 C^1 曲线，但它仍然有下述性质：对于 Ω 的边界中的任意一点 x_0，存在 $\mathbf{R}^2$ 中的一闭圆盘，它与 $\bar{\Omega}$ 只交于 x_0（参阅命题 29.4）.

29.3 证明，$\mathbf{R}^n$ 的一有界开子集 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 中的具有下述性质的点 x_0 的集合在 $\partial\Omega$ 中稠：对于点 x_0，在 $\mathbf{R}^n\backslash\Omega$ 中存在一个具有性质 (29.27) 的开球 B.

29.4 令 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的任一有界开子集，$G(x, x')$ 是算子 $\lambda-\Delta(\lambda\geqslant 0)$ 在 Ω 中的 Green 函数. 证明，G 是 $\Omega\times\Omega$ 中的对称的广义函数[这意味着

$$(29.30)\qquad \int_\Omega G(x, x')\phi(x')dx'=\int_\Omega G(x', x)\phi(x')dx', \quad \forall\phi\in C_c^\infty(\Omega)].$$

29.5 Ω 和 $G(x, x')$ 如习题 29.4 中所述. 证明，在 $\Omega\times\Omega$ 中，当 $n\geqslant 3$ 时有

$$(29.31)\qquad G(x, x')\sim\frac{n-2}{|S^{n-1}|}|x-x'|^{-n+2} \quad \text{当 } |x-x'|\sim 0 \text{ 时},$$

然而，当 $n=2$ 时有

$$(29.32)\qquad G(x, x')\sim\frac{1}{2\pi}\log|x-x'| \quad \text{当 } |x-x'|\sim 0 \text{ 时}.$$

给这些关系以明确的意义.

29.6 证明，相应于 $\mathbf{R}^n$ 中开球 $|x|<R$ 的调和测度等于

$$(29.33)\qquad dm_x(y)=\frac{1}{|S^{n-1}|R}\,\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^n}\,d\sigma_y,$$

其中 $d\sigma_y$ 是球面 $|y|=R$ 上的典则面元测度. 现在用 x^* 表示 x 关于球面 $|y|=R$ 的反演:

$$x^*=\frac{R^2}{|x|^2}x.$$

证明，相应于开球 $|x|<R$ 的 Laplace 算子的 Green 函数，当 $n\geqslant 3$ 时等于

$$(29.34)\qquad G(x, x')=C_n\left\{\frac{1}{|x-x'|^{n-2}}-\left(\frac{R}{|x|}\right)^{n-2}\frac{1}{|x^*-x'|^{n-2}}\right\},$$

其中 $C_n=(n-2)/|S^{n-1}|$，然而，当 $n=2$ 时它等于

$$(29.35)\qquad G(x, x')=\frac{1}{2\pi}\log\left(\frac{|x|}{R}\,\frac{|x^*-x'|}{|x-x'|}\right).$$

29.7 令 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的一有界开子集，它的边界是 C^1 的，并且它位于边界的一侧. 令 $G(x, x')$ 是 $\lambda-\Delta(\lambda>0)$ 关于 Ω 的 Green 函数，$dm_x(y)$ 是由

(29.7)定义的“元调和”测度．从公式(10.8)推导：

$$dm_x(y)=\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,\ y),\quad x\in\Omega,\ y\in\partial\Omega, \tag{29.36}$$

其中 $\partial/\partial\nu$ 是关于 y 变量的、在 $\partial\Omega$ 的内法向上的法向导数．

29.8　在 $\lambda=0$ 和 Ω 是半径 $R>0$，中心在原点的开球的情形下验证公式(29.36)．

29.9　令 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的一有界开子集，$G(x,\ x')$ 是 $\lambda-\Delta$ 在 Ω 中的 Green 函数．证明，映射

$$C_c^\infty(\Omega)\ni\phi\mapsto\left(x\mapsto\int_\Omega G(x,\ x')\phi(x')\,dx'\right)$$

可被延拓为从 $H^{-1}(\Omega)$ 到 $H_0^1(\Omega)$ 上的一个同构．

29.10　用 $x,\ y,\ z$ 表示 $\mathbf{R}^3$ 中的坐标，并令 $r^2=x^2+y^2$．用 Ω 表示 $\mathbf{R}^3$ 中由

$$r^2+z^2<1,\ r>\exp(-1/2z)\quad 若\ z>0 \tag{29.37}$$

定义的开集．描绘 Ω，并证明，Ω 的每个异于原点的边界点是正规的(定义29.4)．

令 μ 是正 Radon 测度 $\phi\mapsto\int_0^1\phi(0,\ 0,\ z)\,z\,dz$，并把卷积 $E*\mu$ 在 Ω 上的限制记为 u，这里 $E=(4\pi)^{-1}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$．证明，相差一个常数因子，有

$$\begin{aligned}u=&(r^2+(z-1)^2)^{1/2}-(r^2+z^2)^{1/2}\\&+z\log|(r^2+z^2)^{1/2}+z||(r^2+(z-1)^2)^{1/2}\\&+1-z|-2z\log r.\end{aligned} \tag{29.38}$$

证明，u 在 Ω 中是调和的，并且，u 在边界 $\partial\Omega$ 上的限制在 $\partial\Omega$ 上是连续的．

对于 α 的不同的值，$0<\alpha<1$，计算当 $(x,\ y,\ z)$ 沿着曲面

$$r=\exp(-\alpha/2z),\quad z>0$$

趋于 0 时 u 的极限．由此推断原点不是正规的(相对于 Laplace 方程和开集 Ω；$\partial\Omega$ 的如这个习题中的原点这样的点称为 Lebesgue 刺(spine)．

29.11　令 Ω 是平面 $\mathbf{R}^2$ 中的一有界开子集，z_0 是 Ω 的边界中的一点，对于它，存在一条完全包含于 $\mathbf{R}^2\backslash\Omega$ 中的直线段$[z_0,\ z_1]$($z_0\neq z_1$)．证明，对于 Ω 中的 Laplace 方程，z_0 是正规的．[提示：考虑适应于这个情形的 $\log(z-z_0)$ 的一个分枝，并研究函数 $-\mathrm{Re}\{1/\log(z-z_0)\}$．]

29.12　令 $a<b$ 是两个(有限的)实数；令 $L=b-a$．证明，任给一复数 λ——它不等于数 $-k^2\pi^2/L^2$ 中的任何一个，k 是 $\geqslant1$ 的整数——对于开区间$]a,\ b[$中的微分算子 $\lambda-d^2/dx^2$，存在 Green 函数 $G_\lambda(x,\ x')$．令

$$E_\lambda(x)=\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\{H(x)e^{-x\sqrt{\lambda}}+H(-x)e^{x\sqrt{\lambda}}\},$$

其中$\sqrt{z}$是平方根的这样的分枝，对于正实的 z 它是正的；给出

$$G_\lambda(x, x')-E_\lambda(x-x')$$

的明显表达式. 描述当 a 趋于$-\infty$, 或 b 趋于$+\infty$ 时发生的情形, 并描述当 λ 趋于临界值 $-k^2\pi^2/L^2(k=1, 2, \cdots)$之一时发生的情形($a$ 和 b 仍然有限).

30. Laplace 方程理论：上调和函数和位势

在上两节中, 通过修改经典的 *Perron* 方法, 并结合弱极大值原理 (参阅 § 28) 的利用, 在数据只是连续的时候我们"解决了" Dirichlet 问题. 这种手段的好处在于两个方面: 第一, 它是变分方法——它导致弱解——的自然推广；第二, 也是更重要的，虽然我们仅将其应用于典型的算子 $\lambda-\Delta$, 实际上还可将其推广到很广泛的一类二阶椭圆型方程, 甚至不必要求这些方程的系数是连续的(参阅[2]). 然而必须注意, 在原来的 Laplace 算子$-\Delta$的研究中，我们要处理比一般情形更为细微的信息，它们比一般情形中的信息更有价值. 特别, 我们曾利用了遵从极大值(或极小值)原理的下解(和上解). 在 Laplace 方程的情形, 它们即为下调和(或上调和)函数，它们满足更明确的不等式，即，在球心处的函数值至多等于(至少等于, 若我们研究上调和函数)函数在此球面上的平均值. 在这一节中将会看到, 这个事实对于它们的正规性有深刻的影响.

上调和函数的重要性在于它们包括着所谓的位势(下面将看到，大致地说，每个上调和函数可表示为一个位势与一个调和函数之和). 自然，在应用于引力理论，静电学和磁学，热传导等等的时候，位势是很重要的. 历史上(十八世纪和十九世纪)，在一个牢固的数学基础上建立上述这些理论的过程中, Laplace 方程已经起了基本的作用. 用这个方程描述的许多现象的类型必须符合于一

个明确和简单的模式：它们都和一均匀介质(它充满了空间的某一区域 $\mathscr{R}$)的“态”有关，并且，它们是稳定的，即不随时间的改变而改变．在介质中有一个场，对我们来说，这意味着在 $\mathscr{R}$ 中给出了一个向量场 X．这个场有两个基本的性质：不存在环流(circulation)，流量不变．用通常的语言说，第一个性质意味着不存在涡流(eddy)．用数学的语言说，这意味着 $\operatorname{curl} X=0$，这也意味着(至少局部地)，X 是一数量函数 U——位势——的梯度．X 通过一块曲面 σ 的流量在数学上定义为 X 的法分量展布在 σ 上的积分．它的守恒意味着从力管纵截面的一端进入的流量等于从另一端出去的流量．用数学的语言说，这意味着场 X 是没有散度的：$\operatorname{div} X=0$．如果将此与 $X=\operatorname{grad} U$ 这一事实结合起来，即得到 $\Delta U=0$．

然而，此场必须由某一物产生：此物是“电荷”或“质量”(取决于所考虑的理论)．它们在空间的一(紧)区域 $\mathfrak{R}$ 中的存在可由下述事实察觉：场 X 通过包围 $\mathfrak{R}$ 的任一闭曲面 Σ 的流量不为零；此流量不依赖于此曲面，因为在 $\mathfrak{R}$ 的余集中 $\operatorname{div} X=0$ (自然，如果 Σ 离 $\mathfrak{R}$ 不太远)．它的值可取作由 $\mathfrak{R}$ 所承载的总电荷或总质量的某种度量．根据物理学家所同意的假定，在重力和电的情形，习惯于把总的电荷等同于通过 Σ 的进入的流量，即等于

$$-\int_{\Sigma}(X\cdot\nu)d\sigma,$$

其中 ν 是 Σ 的外法向．由公式(10.6)，这等于 $-\Delta U$ 在 Σ 的内部即在 $\mathfrak{R}$ 上的积分．如果假设在 Σ 内部存在一个“生长”(creation，相对于吸收)，我们就看到 $-\Delta U$ 的总质量至少为零．如果将此论证推进到无限小的量级，我们就看到 $-\Delta U$ 必须是一正(Radon)测度；即，U 必须是一上调和广义函数．这就是我们要仔细考察一下这类广义函数的原由．

除有特别的声明之外，在这一节所考虑的函数和广义函数都是实值的．给定一定义在闭球 $|x-x_0|\leqslant r$ 上(并且在其上足够正规)的函数 f，我们引进它在球面 $|x-x_0|=r$ 上的平均值

$$(30.1)\qquad f^{\#}(x_0;r)=|S^{n-1}|^{-1}\int_{S^{n-1}}f(x_0+r\dot{x})\,d\dot{x}$$

和它在球 $|x-x_0|\leqslant r$ 上的平均值

$$(30.2)\qquad f^{@}(x_0;\ r)=|B^n|^{-1}\int_{B^n}f(x_0+ry)dy,$$

其中 B^n 是 $\mathbf{R}^n$ 中的单位球，而 $|B^n|$ 是 B^n 的"体积".

令 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的一开子集. 下面我们将研究定义于 Ω 中的函数，其值或是（有限的）实数或是 $\pm\infty$. 这样的一个函数称为在 Ω 的点 x_0 处是*下半连续的*，如果对每个（有限的）实数 $\alpha<f(x_0)$，在 Ω 中存在 x_0 的一个邻域 U_α，使得对 U_α 中所有的 x，有 $f(x)>\alpha$; f 在 Ω 的一子集 A 中是下半连续的，如果它在 A 的每个点处是下半连续的. 容易看到，一个函数 f 在 Ω 中是下半连续的充分必要条件是，f 是 Ω 中一族连续函数的上包络(upper envelope)[1].

定义 30.1 Ω 中一函数 f 称为是*超调和的*(hyperhamonic)，如果它是下半连续的，对于每个 $x\in\Omega$ 有 $f(x)>-\infty$，并且

$$(30.3)\qquad f^{\#}(x;\ r)\leqslant f(x),\quad \forall x\in\Omega,\ \forall r<d(x,\ \complement\Omega).$$

在(30.3)的两端关于 r 积分，我们立即得到

$$(30.3')\qquad f^{@}(x;r)\leqslant f(x),\quad \forall x\in\Omega,\ \forall r<d(x,\ \complement\Omega).$$

由下述事实——我们把它的证明留给读者作为一习题——术语"超调和"是恰当的：

(30.4) 如果在 Ω 中 f 是超调和的，u 是调和的，且若对 Ω 的边界的任一点 y(或在无穷远处，若 Ω 是无界的)，有 $\varliminf\limits_{x\to y}(f(x)-u(x))\geqslant 0$，则在 Ω 中 $f\geqslant u$.

我们用 $\varliminf$ 表示下极限. 特别，如果 B 是闭包包含在 Ω 中的任一开球，并用 I_f^B 表示 f 关于 B 的 *Poisson 积分*［它在公式(10.36)中定义：在 ∂B 上的积分显然可被延拓为半连续函数］，则在 B 中处处有 $f\geqslant I_f^B$.

Ω 中的超调和函数形成一*凸锥*：这样的函数的任一正系数有

1) 译者注：这里所说的上包络，即上确界，见第 269 页.

限线性组合仍然是这样的函数. 超调和函数的另外两个重要的, 然而几乎是显然的性质为:

(30.5) Ω 中超调和函数的任一递增的有序集合的上包络在 Ω 中是超调和的

["递增的有序的"意味着, 任给此集合中的两个元素 f, g, 存在第三个元素 h, 使得 $h \geqslant \sup(f, g)$].

(30.6) 如果 f, g 在 Ω 中是超调和的, 则 $\inf(f, g)$ 亦然.

下面的性质不太显然:

命题 30.1 令 f 是 Ω 中的一超调和函数. 则在 Ω 的每个连通分枝中, f 或者恒等于 $+\infty$, 或者是局部 Lebesgue 可积的.

证明 Ω 的由下述点组成的子集 A 显然是开的: 在这些点的一邻域中 f 是可积的. 令 $x_0 \in \Omega \backslash A$. 由下半连续性, 存在一数 r, $0<r<d(x_0, \complement\Omega)$, 和一有限常数 M, 使得对每个 $x \in B_r(x_0)$, 即, 对每个 x, $|x-x_0|<r$, 有 $f(x)+M \geqslant 0$ (我们在这里利用了 f 无处等于 $-\infty$ 这一性质). 如果 $|x_1-x_0|<r/2$, 则 $x_0 \in B_{r/2}(x_1) \subset \Omega$, 且 $f(x)+M$ 在 $B_{r/2}(x_1)$ 上不能是可积的(否则 f 本身在 x_0 的一邻域上将是可积的). 由 (30.3′), 我们有 $(f+M)(x_1) \geqslant (f+M)^{@}(x_1; r/2)=+\infty$. 这指出了 $\Omega \backslash A$ 也是开的, 且在此集合中 $f \equiv +\infty$.

证毕.

Ω 中一函数 g 称为低调和的(hypoharmonic), 如果 $-g$ 是超调和的. 由中值定理(定理 10.1)我们看到, 调和函数既为超调和的又为低调和的; 事实上, 它们是唯一的这样的函数(下文的推论 30.1).

现在我们来介绍下面的经典术语:

定义 30.2 在 Ω 中局部可积的超调和函数称为上调和的.

一个函数 f 称为下调和的, 如果 $-f$ 是上调和的.

如果 f 在 Ω 中是调和的, 则 $-|f|$ 是上调和的. 一类重要的上调和函数是下面的例.

例 30.1 Newton 位势

这是函数

(30.7) $$G(x)=\frac{1}{(n-2)|S^{n-1}|}\frac{1}{r^{n-2}},$$

其中假设 $n\geqslant 3$ 和 $r=|x|$. 如果回到 § 9 中 Laplace 方程基本解 E 的定义, 我们即看到

(30.8) $$-\Delta G=\delta \text{ (Dirac 测度)}, \quad \text{在 } \mathbf{R}^n \text{ 中}.$$

当 $n=2$ 时, 我们取 G 为对数位势:

(30.9) $$G(x)=\frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{r}.$$

显然, G 在 $\mathbf{R}^n$ 中是局部可积的; 我们将把 G 视为一个"真正的"函数, 而不把它看作几乎处处相等的函数的一个等价类; 我们约定 $G(0)=+\infty$.

此时, 引进标准软化子 $\rho_\varepsilon(\varepsilon>0)$: $\rho_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-n}\rho(x/\varepsilon)$; $\rho\in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$, 处处有 $\rho\geqslant 0$, $\int\rho dx=+1$. 则正规化 $G*\rho_\varepsilon$ 是 $-\Delta T=\rho_\varepsilon$ 的解, 因而是 $\mathbf{R}^n$ 中的 C^∞ 函数, 对于所有的 $x_0\in\mathbf{R}^n$, $r>0$, 它满足 $(G*\rho_\varepsilon)^\#(x_0;\ r)\leqslant(G*\rho_\varepsilon)(x_0)$ (习题 10.1). 在 $\varepsilon\to+0$ 时取极限, 得到

(30.10) $$G^\#(x_0;\ r)\leqslant G(x_0), \quad \forall x_0\in\mathbf{R}^n,\ \forall r>0$$

(注意, G 在任一球面上的限制在此球面上是可积的). 自然, 此时还有

(30.11) $$G^{@}(x_0;\ r)\leqslant G(x_0), \quad \forall x_0\in\mathbf{R}^n,\ \forall r>0.$$

显然, $G(x)$ 是下半连续的.

例 30.2 $\mathbf{R}^n$ 中的位势

定义 30.3 令 μ 是 $\mathbf{R}^n$ 中具有紧支集的一个广义函数. 若 $n\geqslant 3$, G 是 Newton 位势(30.7), 若 $n=2$, G 是对数位势(30.9).

卷积 $G*\mu$ 称为 μ 的位势，并用 U^μ 表示.

上面定义的这种类型的位势是"整体的"，即它们定义于整个 Euclid 空间中. 以后我们将介绍 Green 位势，它定义于 $\mathbf{R}^n$ 的一给定的开子集 Ω 中.

广义函数 $\mu\in\mathscr{E}'$ 的位势 U^μ 满足非齐次 Laplace 方程

$$(30.12)\qquad -\Delta U^\mu=\mu \quad 在\ \mathbf{R}^n\ 中.$$

记住(Weyl 引理，定理 9.1)，U^μ 是 $\operatorname{supp}\mu$ 的余集中的解析函数.

命题 30.2 如果 $\mu\in\mathscr{E}'$，则其位势 U^μ 是(30.12)的在无穷远处趋于零的唯一解.

证明 唯一性是显然的，因为如果(30.12)存在另一在无穷远处衰减的解 V^μ，则差 $U^\mu-V^\mu$ 应为在整个空间中的调和函数，在无穷远处是衰减的，因而，由极大值原理，它恒等于零. 我们必须证明 U^μ 本身在无穷远处是衰减的. 这只需注意，给了 $\mathbf{R}^n$ 的某个包含 μ 的支集的有界开子集 Ω，当 $d(x,\ \Omega)\to+\infty$ 时，$y\mapsto G(x-y)$ 在 $C^\infty(\Omega)$ 中收敛于零，因而 $U^\mu(x)=\langle\mu_y,\ G(x-y)\rangle\to 0$. 证毕.

今后我们将限于考察 μ 是正 Radon 测度的情形，首先考察 μ 有紧支集的情形. 这样一个测度与一下半连续函数——例如 G——的卷积是下半连续的. 此外有

命题 30.3 如果 μ 是 $\mathbf{R}^n$ 中具有紧支集的正 Radon 测度，则其位势 U^μ 在 $\mathbf{R}^n$ 中是局部 Lebesgue 可积的.

证明 首先考虑 $n\geqslant 3$ 的情形. 令 f 是 $\mathbf{R}^n$ 的一任意紧子集的特征函数. 由关于 Radon 测度的 Fubini 定理和引理 29.1 的一个简单的应用，得到

$$\int U^\mu f dx=\int (G*f)\,d\mu\leqslant \text{const} \sup_{x\in\operatorname{supp}\mu} |(G*f)(x)|<+\infty.$$

在高于二维的情形，处处有 $G\geqslant 0$，因而处处有 $U^\mu\geqslant 0$. 这就蕴涵着我们所要求证的.

现在假设 $n=2$. 因为 μ 的支集是紧的，因而，任给平面的一紧集 K，存在一数 $R>0$，使得

$$U^\mu=(\chi_R G)*\mu=(\chi_R G+\tau\mathbf{1})*\mu-\tau\int d\mu \quad 在\ K\ 中,$$

其中 χ_R 表示圆盘 $|x|<R$ 的特征函数, $\mathbf{1}$ 表示等于 1 的常数函数, τ 表示一个大正数. 只需证 $(\chi_R G+\tau\mathbf{1})*\mu$ 是局部 L^1 的即可. 对于足够大的 τ, 处处有 $\chi_R G+\tau\mathbf{1}\geqslant 0$, 再应用与 $n\geqslant 3$ 的情形相同的推理. 证毕.

因为对于 $\mathbf{R}^n$ 的每个 x, $y\mapsto G(x-y)$ 是下半连续的, 我们就可以构作任一正 Radon 测度 μ (不必具有紧支集) 的位势

(30.13) $$U^\mu(x)=\int G(x-y)d\mu(y).$$

自然, $U^\mu(x)$ 可以是无限的. 注意到 μ 是具有紧支集的 Radon 测度的一个递增序列 $\{\mu_\alpha\}$ [例如, 当 $R\to+\infty$ 时的测度 $\chi_R(x)\mu$] 的(弱)极限这一事实, 我们就看到, U^μ 等于下半连续函数的一个递增序列的上包络(至少当 $n\geqslant 3$ 时是如此; 当 $n=2$ 时, 如同在命题 30.3 的证明中一样, 必须加上一个适当的常数函数), 因而 U^μ 是下半连续的.

我们可以计算(30.13)两端 (右端为积分号下的函数) 在任一球面 $|x-x_0|=r$ 上的平均值. 此时, 不等式(30.10)蕴涵着

(30.14) $$(U^\mu)^\#(x_0;r)\leqslant U^\mu(x_0),\quad \forall x_0\in\mathbf{R}^n,\ \forall r>0.$$

我们可将所得综合为

命题 30.4 令 μ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个正 Radon 测度, 其位势 U^μ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的超调和函数. 如果 μ 的支集是紧的, 则 U^μ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的上调和函数.

显然, U^μ 应该是上调和的, 即为局部 Lebesgue 可积的, 即使在 μ 的支集不是紧集的情形也是这样.

我们记得, Ω 中的一个上调和广义函数是这样一个广义函数 T, 它使得 $-\Delta T$ 是 Ω 中的一个正 Radon 测度.

命题 30.5 令 T 是 Ω 中的一个上调和广义函数. 则对 Ω 的一个任意给定的相对紧开子集 Ω', 存在 $\mathbf{R}^n$ 中的一个具有紧支集的正 Radon 测度 μ, 使得 $T-U^\mu$ 是 Ω' 中的调和函数.

证明 任一在 Ω' 中等于 $-\Delta T$ 的具有紧支集的正 Radon 测度 μ 满足此命题的要求. 证毕.

下面的命题证明了引进定义 30.1 和 30.2 的合理性：

命题 30.6 对于 Ω 中的任一广义函数 T，下述两性质是等价的：

(30.15) T 是 Ω 中的上调和广义函数；

(30.16) T 是一函数(在广义函数论的意义下)，并且，它的一个表达式且仅有一个表达式是 Ω 中的上调和函数.

证明

I．(30.15) 蕴涵 (30.16). 这从命题 30.5 即得 [在 (30.16) 中，表达式的唯一性是下述事实的推论：几乎处处相等的两个上调和函数是处处相等的].

II．(30.16) 蕴涵 (30.15). 对于 $d>0$，令 Ω_d 表示 Ω 的一子集，它由满足 $d(x, \complement\Omega)>d$ 的点 x 组成，显然，若 $f\in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$，则

$$(\rho_\varepsilon * f)(x)=\int \rho_\varepsilon(x-y)f(y)dy$$

在 Ω_ε 中定义并为 C^∞ 的. 取 f 为 T 的在 Ω 中是上调和函数的表达式. 对于 $d>\varepsilon$，$x_0\in\Omega_d$ 和 $r<d-\varepsilon$，从 (30.3) 推得

$$(\rho_\varepsilon * f)^\#(x_0;\ r)\leqslant(\rho_\varepsilon * f)(x_0).$$

把公式 (10.32) 应用于 $u=\rho_\varepsilon * f$，在 Ω_d 中得到 $-\Delta u=-\rho_\varepsilon * \Delta f\geqslant 0$. 此时，只需首先取 $\varepsilon\to+0$ 时，然后取 $d\to+0$ 时的极限即可. 证毕.

推论 30.1 在 Ω 中既为超调和的又为低调和的函数是调和的.

事实上，f 是连续的，并由命题 30.6，在 Ω 中 $\Delta f=0$.

例 30.3 Green 位势

和通常一样，令 Ω 表示 $\mathbf{R}^n$ 的一有界开子集，并用 $G(x, x')$ 表示 $-\Delta$ 在 Ω 中的 Green 函数，我们有

$$G(x, x')=G(x-x')-\int_{\partial\Omega}G(y-x')dm_x(y), \tag{30.17}$$

其中 dm_x 是 $\partial\Omega$ 上的调和测度，不妨取 $G(x)$ 为 Newton 位势 (30.7)，若 $n\geqslant 3$；或者取为对数位势 (30.9)，若 $n=2$ [参阅 (29.15)].

(30.17)右端的第一项是 $\mathbf{R}^n$ 中的上调和函数；第二项是 Ω 中的调和函数，因而，若 μ 是 Ω 中的一个正 Radon 测度，则可构作

$$(30.18)\qquad U^{\mu}(x)=\int_{\Omega}G(x,\ x')d\mu(x'),$$

它称为 μ 的 Green 位势．注意，μ 在 $\mathbf{R}^n$ 中的位势(可能是无限的)

$$(30.19)\qquad V^{\mu}(x)=\int_{\Omega}G(x-x')d\mu(x')$$

必定是超调和的(注意，μ 不一定拓广为 $\mathbf{R}^n$ 上的测度)．我们注意，

$$\int_{\partial\Omega}V^{\mu}(y)dm_x(y)$$

是调和的，然而在 Ω 的某个连通分枝中它可能是常数并等于 $+\infty$．在某种意义下，它在边界上取值 V^{μ}．从调和测度 m_x 的总质量是 1 这个事实容易推得，对每个 $x\in\Omega$，有 $\int_{\partial\Omega}V^{\mu}(y)dm_x(y)\leqslant V^{\mu}(x)$．我们有

$$(30.20)\qquad U^{\mu}(x)=V^{\mu}(x)-\int_{\partial\Omega}V^{\mu}(y)dm_x(y),\quad x\in\Omega.$$

如果 ν 是 Ω 中另一正 Radon 测度，则由关于 Radon 测度的 Fubini 定理，就得到*互反公式*(reciprocity formula)

$$(30.21)\qquad \int_{\Omega}U^{\mu}d\nu=\int_{\Omega}U^{\nu}d\mu.$$

我们知道(由命题 30.1)，在 Ω 的每一连通分枝中，Green 位势 U^{μ} 或恒等于 $+\infty$，或者是一上调和函数．容易得到使后一情形发生的一个充分条件：

命题 30.7 如果 Ω 中的正 Radon 测度 μ 的总质量是有限的，则其 Green 位势 U^{μ} 在 Ω 中是上调和的．

证明 μ 的总质量是有限的这一事实等价于 μ 可延拓为 $\mathscr{B}^0(\Omega)$ 上的一连续线性泛函，这里 $\mathscr{B}^0(\Omega)$ 是 Ω 中有界连续函数空间．根据命题 29.1，对于任何的 $x\in\Omega$，

$$h(x,\ x')=\int_{\partial\Omega}G(y-x')dm_x(y)$$

在 Ω 中是 x' 的有界函数，因而 $\int_{\Omega}h(x,\ x')d\mu(x')<+\infty$．另一方

面，在 $\mathbf{R}^n \backslash \bar{\Omega}$ 中令 $\tilde{\mu}=0$，我们可把 μ 延拓为 $\mathbf{R}^n$ 上的一个正 Radon 测度 $\tilde{\mu}$；此时，$\tilde{\mu}$ 在 $\mathbf{R}^n$ 中的位势 $G*\tilde{\mu}$ 等于 $\int_\Omega G(x-x')d\mu(x')$；它是一上调和函数. 证毕.

注 30.1 我们说正 Radon 测度 μ 的总质量是有限的，等价于说 μ 可被延拓为 $\mathbf{R}^n$ 上由 $\bar{\Omega}$ 所支撑的(或者，由 Ω 所"承载的"，因为 Ω 的边界在延拓后的测度的意义下必定是零测的) 一个 Radon 测度. 在这些情形中，记号 U^μ 是有二义性的，因为我们必须区分 μ (在 Ω 中)的 Green 位势和延拓后的测度在 $\mathbf{R}^n$ 中的位势. 对于在这里我们所局限的情形而言，这种二义性将是无害的.

自然，我们可以很容易地定义 Ω 中任意 Radon 测度 μ 的 Green 位势. 由线性性，记 $\mu=\mu^+-\mu^-$，其中 μ^+ 和 μ^- 是正测度；并且令

$$U^\mu=U^{\mu^+}-U^{\mu^-}.$$

具有有限能量的位势

定义 30.4 令 μ 是有界开集 Ω 中的一个 Radon 测度，U^μ 是它的 Green 位势. 我们说 μ 和 U^μ 有有限能量，若 U^μ 在 Ω 中是局部可积的，且若它的 Dirichlet 积分

$$\int_\Omega |\operatorname{grad} U^\mu(x)|^2 dx \tag{30.22}$$

是有限的. 这时称它为 U^μ (或 μ)的能量.

将用 $|U^\mu|_e^2$，有时也用 $|\mu|_e^2$ 表示 U^μ 的能量(30.22). 如果 ν 是 Ω 中另一 Radon 测度，令

$$(\mu,\ \nu)_e=(U^\mu,\ U^\nu)_e=\int_\Omega (\operatorname{grad} U^\mu)\cdot(\operatorname{grad} U^\nu)\,dx. \tag{30.23}$$

当 $\Omega=\mathbf{R}^n$ 时可以引入类似的定义.

以后，我们将限于研究 Ω 是有界的这一情形. 在这个情形我们知道，$-\Delta$ 确定了一个从 $H_0^1(\Omega)$ 到 $H^{-1}(\Omega)$ 上的同构. 当限制于 $C_c^\infty(\Omega)$ 中时，甚至限制于 $C_c^0(\Omega)\subset H^{-1}(\Omega)$ 中时，其逆等于

Green 核映射:

$$\phi \mapsto \int_\Omega G(\cdot, x')\phi(x')dx' \tag{30.24}$$

(习题 29.9). 令 μ 是一个属于 $H^{-1}(\Omega)$ 的 Radon 测度. 通过截断和光滑化,可找到一个函数序列 $\phi_j \in C_c^\infty(\Omega)$, 它在 $H^{-1}(\Omega)$ 中收敛于 μ, 并使得

$$\int_\Omega G(x, x')\phi_j(x')dx' \to U^\mu(x) \qquad \text{对每个 } x \in \Omega.$$

这蕴涵着 U^μ 是 $(-\Delta)^{-1}\phi_j$ 的点态极限; 后者在 $H_0^1(\Omega)$ 中收敛于 $(-\Delta)^{-1}\mu$. 这意味着 U^μ (在 Lebesgue 积分论的意义下)的等价类属于 $H_0^1(\Omega)$. 用广义函数论的语言我们可叙述为:

命题 30.8　Ω 中具有有限能量的位势属于 $H_0^1(\Omega)$.

具有有限能量的位势形成 $H_0^1(\Omega)$ 的一个稠的,但是非闭的子集: 事实上, 一方面, 此集合包含着 $H^{-1}(\Omega)$ 的稠子集 $C_c^0(\Omega)$ 在 $-\Delta$ 下的象; 另一方面, 回想到 $n>1$ 时, 在 $H^{-1}(\Omega)$ 中存在不是 Radon 测度的元素. 然而,注意到任何正广义函数是正 Radon 测度,以及这样的广义函数序列的极限也是一正 Radon 测度这些事实,我们就得到

命题 30.9　具有有限能量的 Ω 中正 Radon 测度的 Green 位势的锥在 $H_0^1(\Omega)$ 中稠. 它与所有属于 $H_0^1(\Omega)$ 的非负上调和函数的集合一致.

考虑到命题 30.8 以及 $H_0^1(\Omega)$ 与 $H^{-1}(\Omega)$ 之间的对偶性, 我们就看到, 如果 μ 和 ν 是 Ω 中属于 $H^{-1}(\Omega)$ 的两个 Radon 测度, 则

$$(\mu, \nu)_e = (U^\mu, U^\nu)_e = \int_\Omega U^\mu d\nu. \tag{30.25}$$

自然, $\|\mu\|_e^2 = \int_\Omega U^\mu d\mu$. 量(30.25)称为测度(或"负荷",或"质量") μ, ν 的互能 (mutual energy). 这样, 在现在的假设下(能量有限性的假设), 互反公式(30.21)只是表示内积 $(\mu, \nu)_e$ 的对称性. 注意, 因为 Ω 是有界的, 所以能量范数 $\|U^\mu\|_e$ 等价于 $H_0^1(\Omega)$ 上的

范数 $\|U^\mu\|_1$，并且范数 $\|\mu\|_e$ 等价于 $H^{-1}(\Omega)$ 上的范数 $\|\mu\|_{-1}$．这样，在属于 $H^{-1}(\Omega)$ 的 Radon 测度的集合上，内积 $(,)_e$ 定义了一个 pre-Hilbert 空间结构(是 Hausdorff 的，但不是完备的)．还注意，如果 μ 和 ν 是正 Radon 测度，则它们的互能 $\geqslant 0$．由此即得，若 $\mu\geqslant\nu$，则 $\|\mu\|_e^2\geqslant\|\nu\|_e^2$．

上面的论证不能推广到 $\mathbf{R}^n$ 上，因为 $-\Delta$ 不是从 $H_0^1=H^1$ 到 H^{-1} 上的同构．

上调和函数的 Riesz 表示

令 f 是 $\mathbf{R}^n$ 的一开子集 Ω 中的上调和函数，并假设至少存在 Ω 中的一个下调和函数 v，对于每个 $x\in\Omega$ 有 $v(x)>-\infty$，并使得在整个 Ω 中 $v\leqslant f$．令 f^* 是所有这样的下调和函数 v 的上包络．我们断言，f^* 在 Ω 中是调和的．事实上，若 $v\leqslant f$ 是下调和的，且若 B 是闭包包含在 Ω 中的任一开球，则在 $\Omega\backslash B$ 中等于 v，在 B 中等于Poisson 积分 I_v^B 的函数 $\tilde{v}$ 也是下调和的[这通过验证下述事实即可看到：对于每个 $x\in\Omega$ 和每个充分小的 r，有 $\tilde{v}(x)\leqslant\tilde{v}^{\#}(x;r)$]，并小于 v，因而小于 f，所以 f^* 等于这些函数 $\tilde{v}$ 的上包络——它在 B 中是调和的．函数 f^* 称为 f 的**最大的调和幼函数**(greatest harmonic minorant)[1]．

现假设 Ω 是有界的且 $f\geqslant 0$．任给 $\varepsilon>0$，用 Ω_ε 表示使得 $d(x,\complement\Omega)>\varepsilon$ 的 $x\in\Omega$ 的集合．函数 $x\mapsto f^{@}(x;\varepsilon)$ 在 Ω_ε 中有定义并显然为上调和的．再者，在 Ω_ε 中 $f^{@}(x;\varepsilon)\leqslant f(x)$，并且 $f^{@}(x;\varepsilon)$ 是 $x\in\Omega_\varepsilon$ 的连续函数．当 $\varepsilon\to+0$ 时，$f^{@}(x;\varepsilon)\to f(x)$．对于每个 ε，令 Ω_ε' 是 Ω_ε 的一个相对紧开子集，它包含 $\Omega_{2\varepsilon}$，边界是一 C^∞ 超曲面，并使得 Ω_ε' (局部地) 位于它的一侧．令 h_ε 表示开集 $\Omega\backslash\Omega_\varepsilon'$ 中 $-\Delta$ 的在 $\partial\Omega_\varepsilon'$ 上具有边界数据 $f^{@}(\cdot;\varepsilon)$，在 $\partial\Omega$ 上为零的齐次 Dirichlet 问题的广义解．因为 $\partial\Omega_\varepsilon'$ 的所有点都是正规的，因而在

1) 译者注：正如我们把 "majorant" 译作 "长函数" 一样，我们把"minorant 译作"幼函数"．

Ω'_ε 中等于 $f^{@}(\cdot;\ \varepsilon)$；在 $\Omega\backslash\Omega'_\varepsilon$ 中等于 h_ε 的函数在整个 Ω 中是连续的．我们用 f_ε 表示此函数；它是上调和的，并且 $\mu_\varepsilon=-\Delta f_\varepsilon$ 有紧支集(包含在 $\overline{\Omega}'_\varepsilon$ 中)．再者，有 $f_\varepsilon\leqslant f$ 以及 f_ε 点态收敛于 f (事实上，若 $2\varepsilon<\varepsilon'$，则 $f_\varepsilon\geqslant f_{\varepsilon'}$)．

如果用 U^{μ_ε} 表示 μ_ε (在 Ω 中)的 Green 位势，则我们注意到，$f_\varepsilon-U^{\mu_\varepsilon}$ 在 Ω 中是调和的，并且，在某种意义上它在 $\partial\Omega$ 上趋于零：即，它是一函数序列 $u_j\in H^1(\Omega)$ 的一致极限(在 Ω 上)，这些函数 u_j 在 Ω 中是调和的，使得 $u_j-g_j\in H_0^1(\Omega)$，这里 $g_j\in C^0(\overline{\Omega})\cap H^1(\Omega)$ 在 $\overline{\Omega}$ 上一致地收敛于零．由此容易推得 $f_\varepsilon-U^{\mu^\varepsilon}$ 恒等于零．换句话说，

$$f_\varepsilon=U^{\mu_\varepsilon}=\int_\Omega G(\cdot,\ x')d\mu_\varepsilon(x'). \tag{30.26}$$

但是测度 μ_ε 在 Ω'_ε 中等于 $\mu=-\Delta f$，因而(30.26)的右端不小于

$$\int_{\Omega'_\varepsilon} G(\cdot,x')d\mu(x'),$$

当 $\varepsilon\to+0$ 时它收敛于 U^μ [事实上，$G(x,\ x')$ 关于 $d\mu(x')$ 是可积的和非负的]．当 $\varepsilon\to+0$ 时取极限，就得到 $U^\mu\leqslant f$．自然，$f-U^\mu$ 在 Ω 中是调和的(注意，它 $\geqslant 0$ 并且 $\leqslant f$，因而是局部可积的)．

因为 $f\geqslant 0$，因而它有一个也是 $\geqslant 0$ 的最大调和幼函数 f^*．我们可以把上面应用于 f 的推理应用于 $f-f^*$；U^μ 保持不变，因为 μ 亦不变．我们推得 $f-U^\mu-f^*=f_1^*$ 在 Ω 中是调和的并 $\geqslant 0$．然而 $f^*+f_1^*$ 在 Ω 中是调和的并 $\leqslant f$．由于 f^* 的极大性，我们得到 $f_1^*\equiv 0$，并得到 Riesz 的上调和函数的表示公式：

$$f(x)=\int_\Omega G(x,\ x')d\mu(x')+f^*(x), \tag{30.27}$$

其中 $\mu=-\Delta f$，而 f^* 是 f 的最大调和幼函数(记住，f^* 是非负的)．

从(30.27)我们得到

命题 30.10 令 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的一有界开子集．为了 Ω 中的一非负上调和函数是 Ω 中一正 Radon 测度的 Green 位势，必要和充分的条件是，其最大调和幼函数恒等于零．

令 $\mathscr{F}$ 表示 Ω 中局部可积函数 f 的空间，f 的 Dirichlet 积分

是有限的(即，使得 grad f 是平方可积的). 我们说 $\|f\|_e=0$, 等价于说 f 在 Ω 中局部地为常数. 令 $\dot{\mathscr{F}}$ 表示 $\mathscr{F}$ 模 Ω 中局部常数函数的商空间，用 $\|\dot{f}\|_e$ 表示 $\dot{\mathscr{F}}$ 上与能量范数相联系的范数. 它是一 Hilbert 范数，但 $\dot{\mathscr{F}}$ 当然不是完备的. 然而，$H_0^1(\Omega)$ 可视作 $\dot{\mathscr{F}}$ 的一闭子空间(这里再次利用 Ω 是有界的这一事实)，并且，Ω 中具有有限能量的正 Radon 测度的 Green 位势的锥可视为 $\dot{\mathscr{F}}$ 中的一(闭凸)锥，我们用 Γ 表示它. 虽然 $\dot{\mathscr{F}}$ 不是完备的，但由于 Γ 是完备的,就可以引进 $\dot{\mathscr{F}}$ 到 Γ 上的正交投影 [对于内积 $(,)_e$]. 用 π 表示这个投影算子. 令 f 是 Ω 中任一非负上调和函数，$\dot{f}$ 是它的模局部常数函数的等价类. 我们知道，对于内积 $(,)_e$ 而言，$\dot{f}-\pi\dot{f}$ 正交于位势 $U^\nu\in H_0^1(\Omega)$，其中 ν 是一正 Radon 测度；然而，当 ν 不一定是正的时候，这也是对的. 我们知道，这些 U^ν 形成 $H_0^1(\Omega)$ 的一稠线性子空间，因而 $\dot{f}^*=\dot{f}-\pi\dot{f}$ 正交于 $H_0^1(\Omega)$ 的这一子空间. 这就蕴涵着 $\dot{f}^*$ 在 Ω 中是调和的. 但是，

$$-\Delta(\pi\dot{f})=-\Delta f=\mu,\quad \text{即}\quad \pi\dot{f}=U^\mu,$$

并且，在 $\mathscr{F}$ 中存在 $\dot{f}^*$ 的一个代表 f^*，使得

$$f=U^\mu+f^*, \tag{30.28}$$

这是在目前的特殊情形下的表示公式(30.27). 这样，(30.27)可视为与能量范数相联系的正交分解公式的一个推广.

容量位势和容量(Capacity)

令 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的一有界开子集，K 是 Ω 的一紧子集. 用 W_K 表示在 Ω 中 $\geqslant 0$ 而在 K 上 $\leqslant 1$ 的所有上调和函数 v 的下包络(即，下确界). 立即看出 $W_K(x)\geqslant W_K^\#(x;\ r)$, $0<r<d(x,\ \mathbf{R}^n\backslash\Omega)$. 然而，$W_K$ 可能不再是上调和函数，因为它可能不再是下半连续的. 此时用 V_K 表示 Ω 中 $\leqslant W_K$ 的所有下半连续函数 w 的上包络(即，上确界). 确定下面一些事实是容易的：

(30.29) $0\leqslant V_K\leqslant W_K\leqslant 1$ 在 Ω 中；

(30.30) $V_K=W_K=1$ 在 K 的内点处；

(30.31) 在 $\Omega\backslash K$ 中 $V_K=W_K$，并且，在 $\Omega\backslash K$ 中 V_K，W_K 是调和的.

命题 30.11 函数 V_K 是由 K 所承载的一正测度 μ_K (在 Ω 中)的 Green 位势.

证明 从 V_K 的定义容易得到 V_K 在 Ω 中是上调和的(它自然是下半连续的,因而需要验证的只是：它在球面上取到极大值,而这是容易的). 为了简单起见,假设 Ω 是连通的(否则,在每个连通分枝中分别讨论). 任意固定 $x_0\in\Omega$; Green 函数 $G(x, x_0)$ 是一位势 [Dirac 测度 $\delta(x-x_0)$ 的位势]，且在 Ω 中处处大于零，因而它在 K 上有一极小值 $c>0$，因而 $0\leqslant V_K\leqslant c^{-1}G(\cdot, x_0)$. cV_K 的最大调和幼函数是 $G(\cdot, x_0)$的一个非负调和幼函数. 应用命题 30.10 两次：第一次，因为 $G(\cdot, x_0)$ 是一位势，即得到 V_K 的最大调和幼函数是零; 第二次,由此推断 V_K 本身是一位势. 因为 V_K 在 $\Omega\backslash K$ 中是调和的,因而 $\mu_K=-\Delta V_K$ 由 K 所承载. 证毕.

定义 30.5 位势 V_K 称为 K 的容量位势，测度 μ_K 称为 K 的容量广义函数，μ_K 的总质量(它是 $\mu_K(K)$) 称为 K (关于 Ω) 的容量. K 的容量记为 $\mathscr{C}(K)$.

我们把下面两个论断的证明作为习题留给读者：

(30.32) 容量位势 V_K 是由 K 所支撑的正 Radon 测度 μ 的最大 Green 位势 U^μ，它有性质：在 Ω 中 $\leqslant 1$.

(30.33) 容量 $\mathscr{C}(K)$ 是当 μ 跑遍由 K 所支撑的、其 Green 位势在 Ω 中不超过 1 的所有正 Radon 测度集合时的总质量 $\mu(K)$ 的上确界.

容量的概念在现代位势理论中起着一个很基本的作用,这就是我们决定在这里叙述其定义及一些基本性质(看下文)的原因,虽然我们不给出证明. 可以想像,容量的概念来源于静电学:它是在平衡状态下,处在一种不荷电的介质(这里 $\Omega\backslash K$) 中的一个导体(充满一紧集 K) 所能负载的最大电荷的一种度量，此介质本身为一接地的曲面所界(在这里是 $\partial\Omega$：“接地的”一词意味着位势 V_K

在 $\partial\Omega$ 上保持零值)．在 Ω 中 V_K 不超过 1 这一要求是一"标准化"条件，它使我们能够比较容量．

命题 30.12 令 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的一有界开子集，$\mathscr{C}(K)$ 是 Ω 的一个任意的紧子集 K 关于 Ω 的容量．则有下述性质：

(30.34) $\mathscr{C}(\emptyset)=0$ 且有 $K_1\subset K_2\Rightarrow\mathscr{C}(K_1)\leqslant\mathscr{C}(K_2)$；

(30.35) $\mathscr{C}(K_1\cup K_2)+\mathscr{C}(K_1\cap K_2)\leqslant\mathscr{C}(K_1)+\mathscr{C}(K_2)$；

(30.36) 如果 $\{K_j\}$ ($j=1, 2, \cdots$) 是 Ω 的一个递减的紧子集序列，它们的交是 K，则 $\mathscr{C}(K)=\lim\limits_{j\to+\infty}\mathscr{C}(K_j)$．

证明请参阅[H, 定理 7.20]．

根据性质(30.34)到(30.36)，人们可以用延拓 Radon 测度的类似方法来延拓容量(把它看作一集合函数)．可以定义 Ω 的任一子集 A 的*内容量*为：当 K 跑遍 A 中紧集全体时 $\mathscr{C}(K)$ 的上确界，可以定义 A 的*外容量*为包含 A 的所有开集的内容量的下确界．此时，一个集合称为*可容的*，若其内容量与其外容量相等(于是称此值为它的容量)．一个属于 H. Cartan 的有意义的结果指出，在极集合(参阅习题 30.6，定义 30.6)和零容集合之间有一个同一性(这里，外围的 Ω 不是重要的)．

习　　题

30.1 令 f 是在闭球 $|x-x_0|\leqslant R$($x_0\in\mathbf{R}^n$, $R>0$) 的一开邻域中 $>-\infty$ 的上调和函数．从(30.4) 后的注记和 Poisson 积分公式(10.36)推导：f 在球面 $|x-x_0|=R$ 上的限制是可积的(关于面积测度)．

30.2 令 ϕ 是从实直线的区间]a, b[($-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty$)到 $\mathbf{R}$ 中的凸映射[凸意味着 $\phi(\alpha t_1+\beta t_2)\leqslant\alpha\phi(t_1)+\beta\phi(t_2)$，若 $\alpha+\beta=1$, α, $\beta\geqslant0$]．

令 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的一开子集，h 是 Ω 中的一个调和函数，对于所有的 $x\in\Omega$, $h(x)\in$]a, b[．证明，$\phi\circ h$ 在 Ω 中是下调和的．

此外再证明，如果 ϕ 是单调增的，则对于象在区间]a, b[中的任何下调和函数 $f\in\Omega$, $\phi\circ f$ 在 Ω 中是下调和的．

30.3 令 f 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个上调和函数，$f^{\circledast}(\cdot;\ r)$ 是它在半径 $r>0$ 的球上的平均值(球心在所考虑的点处)．证明，$f^{\circledast}(\cdot;\ r)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中连续的上调

和函数．当 f 是 (30.7) 中或 (30.9) 中给出的 $-\Delta$ 的基本解时，$f^{@}$ 是什么？对于这个 f，计算球面平均值 $f^{\#}$ [参阅(30.1)和(30.2)]．

从 $f^{@}$ 的上面的性质推导，任给整数 $m\geqslant 0$，f 是 $\mathbf{R}^n$ 中 C^m 上调和函数的一个递增序列的点态极限．

30.4　令 f 是 $\mathbf{R}^n$ 的一开子集 Ω 中的上调和函数．利用在 (30.2) 中定义的球平均值 $f^{@}(\cdot;\ r)$，证明 f 是 Ω 中 C^2 上调和函数的一个递增序列的点态极限．

30.5　令 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的一有界开子集，$G(x, x')$ 是 $-\Delta$ 在 Ω 中的 Green 函数．令 μ_f 是 Ω 中的测度 $f(x)dx$，这里 $f\in L^1(\Omega)$．证明，μ_f 的 Green 位势[参阅(30.20)]是 Ω 中的连续函数．[提示：把证明归结为 f 的支集包含在一闭球 $\bar{B}\subset\Omega$ 中的情形，并利用球的 Green 函数的性质 (29.34) 或 (29.35)．]

30.6　此习题与下述重要的概念有关：

定义 30.6　$\mathbf{R}^n$ 的子集 S 称为极 (polar)，如果存在 S 的一开邻域 U 和 U 中的一上调和函数 f，它在 S 上等于 $+\infty$．

证明，极集合有(Lebesgue)零测度，并且，它与任一球面 $|x-x_0|=R$ 的交集有(面积)零测度．

30.7　令 (x, y, z) 表示 $\mathbf{R}^3$ 中的变点，J 表示线段 $x=y=0$，$0\leqslant z\leqslant 1$．考虑测度 $\mu:\phi\mapsto\int_0^1\phi(0, 0, z)dz$ (由 J 所承载) 和它在 $\mathbf{R}^3$ 中的位势 U^μ (定义 30.3)．证明，如果 $0\leqslant z\leqslant 1$，则 $U^\mu(0, 0, z)=+\infty$，并由此推得，$\mathbf{R}^n(n\geqslant 3)$ 中的每一直线段是极集合(定义 30.6)．

30.8　令 r 是一正数，并用 Π_r 表示 $\mathbf{R}^n$ 中的超平面片

$$|x^j|<r\quad(1\leqslant j\leqslant n-1),\quad x^n=0. \tag{30.37}$$

证明 Π_r 不是极(定义 30.6)．[提示：若假设存在 Π_r 的一开邻域 U 和 U 中的一个在 Π_r 上等于 $+\infty$ 的上调和函数 f．则通过旋转和平移(它们保持上调和性不变)得到，存在一数 r'，$0<r'<r$，和一在超立方体 $\{x\in\mathbf{R}^n;\ |x^j|<r', j=1, \cdots, n\}$ 的一开邻域中定义并为上调和的函数 F，它在此超立方体的边界上等于 $+\infty$．从关于上调和函数的极小值原理推得：这是不可能的，因而得到 Π_r 不可能是极．]

30.9　令 Ω 是 $\mathbf{R}^n(n\geqslant 2)$ 中半径为 $R>0$ 的一开球，球心在原点，K 是半径为 R'，$0<R'<R$，球心也在原点的闭球．计算 K 关于 Ω 的容量(定义 30.5)．K 关于 Ω 的容量位势和广义函数是什么？当我们取 K 为球面

$|x|=R'$ 时，同一个问题的答案是什么？

30.10. 证明下述属于 Hartog 的结果：令 $\{v_k\}$ ($k=1, 2, \cdots$) 是开集 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 中的一个上调和函数序列，它使得：

（i）任给 Ω 的一紧子集 K，存在一常数 $M_K>0$，使得对每个指标 k 和每个 $x\in K$，有 $v_k(x)\geqslant -M_K$；

（ii）存在一常数 $C>0$，使得对每个 $x\in\Omega$，当 $k\to+\infty$ 时，数 $v_k(x)$ 的下极限 $\geqslant -C$。

那么，给定 Ω 的任一紧子集 K 和任一数 $\varepsilon\geqslant 0$，存在一个指标 k_0，使得

$$v_k(x)\geqslant -C-\varepsilon,\quad \forall k\geqslant k_0, \forall x\in K. \tag{30.38}$$

31. Laplace 方程和 Brown 运动

31.1 离散的情形

令 $\mathbf{Z}^N$ 表示 $\mathbf{R}^N$ 中的点 $x=(x^1, \cdots, x^N)$ 的格(lattice)，这些点的坐标 x^j ($j=1, 2, \cdots, N$) 是整数($\geqslant 0$ 或 <0)。我们说 $\mathbf{Z}^N$ 中的两个点 x 和 y 是*相邻点*，如果它们的 Euclid 距离恰好等于 1. $\mathbf{Z}^N$ 中的每个点有 $2N$ 个相邻点. $\mathbf{Z}^N$ 中的一*途径* (path) 是从 $\mathbf{Z}$ 的一个区间到 $\mathbf{Z}^N$ 中的一个映射，使得两个相邻整数的像是一对相邻的点. 如果定义了上述映射的区间有有限的下极限，则称此途径有一*起点*(starting point)；如果此区间有有限的上极限，则称此途径有一*终点*(arriving point).

现在我们来看一下在格 $\mathbf{Z}^N$ 上运动的一个"质点"(读者不妨把它想像为在无限的 N 维棋盘上挪动的一个"棋子"). 该质点的运动如下实现：在每一次动作前，我们掷一有 $2N$ 个面的骰子，骰子的每一面上标有一个 N 数组，确切地说，即标有原点的一个相邻点的坐标. 把掷得的结果从原点平移到质点现在所在的点处，就可决定质点下一步应在哪个相邻点处. 从位置 x 出发，接连投掷(或*试验*)骰子就给出质点所遵循的途径. 质点在上述规则下的运动，称为*随机徘徊* (random walk). 随机徘徊的一个重要特性是，每一次试验都与以前的试验无关. 用 $x(0)=x, x(1), \cdots, x(n)$ 表示

质点的相继位置．可以引进迁移(transition)概率 $p(n, x, B)$：B 是 $\mathbf{Z}^N$ 的一子集，而 $p(n, x, B)$ 是从 $x(0)=x$ 出发的质点在第 n 步落在集合 B 中即 $x(n)\in B$ 的概率．如果 B 由单个点 y 组成，就记作 $p(n, x, y)$．定义 $p(0, x, y)$ 当 $x=y$ 时为1，否则为零是自然的．注意，

$$(31.1)\qquad p(1, x, y)=\begin{cases}1/2N, & \text{如果 } x \text{ 和 } y \text{ 是相邻点,}\\ 0, & \text{其它情形.}\end{cases}$$

函数 $B\mapsto p(n, x, B)$ 定义 B 上一个具有总质量1的正测度：事实上它是一个概率．如果 x 和 B 之间的距离超过 n，则 $p(n, x, B)=0$；换句话说，$y\mapsto p(n, x, y)$ 有(容易描述的)紧的(有限的)支集．

令 Ω 是 $\mathbf{Z}^N$ 的一子集．假设 Ω 是连通的，即 Ω 的任意两点可用一完全包含在 Ω 中的途径来连接．Ω 的一个点称为内点，如果它的所有相邻点都属于 Ω；不然，就称为 Ω 的边界点．

Ω 中的一个(譬如，向量值)函数 f 称为是调和的，如果它在任一内点 $x\in\Omega$ 处的值等于它在 x 的相邻点集合上的平均值：

$$(31.2)\qquad f(x)=\frac{1}{2N}\sum_{|x-y|=1}f(y).$$

注意，(31.2)的右端不过是

$$(31.3)\qquad \mathrm{P}f(x)=\sum_{y\in\mathbf{Z}^N}p(1, x, y)f(y).$$

算子 $f\mapsto \mathrm{P}f$ 常称为(一步)移位(shift)算子或平均(averaging)算子．一个实值函数 f 称为上调和的，如果在每个内点 x 处 $f(x)\geqslant \mathrm{P}f(x)$；在 Markoff 过程理论中，非负上调和函数称为过剩(excessive)函数．

显然，对于 Ω 中的复值调和函数，极大值原理成立．此外，在整个格 $\mathbf{Z}^N$ 中有界的任何调和函数必定是常数函数．

我们可以令

$$(31.4)\qquad \Delta=-2(I-P),$$

其中 P 是移位算子(31.3)（I 是恒等算子）；Δ 是离散 *Laplace* 算子．由定义，一个函数 f 是调和的，如果 $\Delta f=0$．

现假设集合 Ω 是有界的，并令 $\partial\Omega$ 表示它的边界．令 g 是一个在 $\partial\Omega$ 中定义的实值函数．在离散情形的 *Dirichlet* 问题是求解问题

(31.5) $\Delta u=0$ 在 Ω 的内点集，

(31.6) $u=g$ 在 $\partial\Omega$ 上．

此问题有一种值得注意的概率解释，它的唯一解也有一种这样的解释！事实上，我们可以把 g 解释为支付 (payoff)：如果从内点集的某点 x 处出发的质点，在点 y 处首先碰到边界，那么我们就有等于 $g(y)$ 的赢值和输值[赢或输取决于 $g(y)$ 的符号]．下面将证明，这时解 u 在 x 处的值是在 x 处的期望赢值（或输值）[expected winnings (or losses)] 的值．

令 B 是边界 $\partial\Omega$ 的一个任意子集．如果 x 是一内点，我们把 $m_x(B)$ 定义为从 x 出发的质点随机徘徊，首先在集合 B 的点 y 处碰到边界的概率．立即看到，m_x 在 $\partial\Omega$ 上定义一个总质量 $\leqslant 1$ 的正测度．固定 B，考虑非负函数 $x\mapsto m_x(B)$；它在 Ω 的内点处有定义，然而可以把它的定义延拓到边界点 x，即当 $x\in B$ 时令它等于 1，否则等于零．显然，如果 x 是一内点，则

(31.7) $$m_x(B)=\sum_{|x-y|=1} m_y(B)p(1,x,y)=\frac{1}{2N}\sum_{|x-y|=1} m_y(B),$$

它指出 $m_x(B)$ 是调和的．现在令 $B=\partial\Omega$：当 x 是一边界点时，我们有 $m_x(\partial\Omega)=1$，因而 $m_x(\partial\Omega)$ 是 Ω 中的一个在边界上恒等于 1 的调和函数．由极大值原理，它必须在整个 Ω 上恒等于 1．这蕴涵着，对每个 $x\in\Omega$，测度 m_x 的总质量在 $\partial\Omega$ 上是 1．

现在，为了对任意的 g 得到 (31.5)—(31.6) 的解 u，只需取

(31.8) $$u(x)=\sum_{y\in\partial\Omega} g(y)m_x(\{y\})$$

即可．事实上，作为调和函数的有限和，u 是调和的，且因为调和测度 m_x 的性质[参阅 (29.7)]，它在边界点 y 处取值 $g(y)$．由于 $m_x(\{y\})$ 的定义（质点首先在点 y 处碰到边界的概率），(31.8) 把 $u(x)$ 定义为支付 g 在点 x 处的数学期望 (mathematical expectation)．

可以把 $\mathbf{Z}^N$ 上任一函数 f 的值解释为一个 Fourier 级数的系数. 事实上, 令

$$\tilde{f}(\theta)=\sum_{y\in\mathbf{Z}^N} f(y)e^{i\theta\cdot y}, \tag{31.9}$$

其中 θ 是 N 维环面 $\mathbf{T}^N$ 中的变量: $\theta=(\theta_1, \cdots, \theta_N)$, 对每个 j, $0\leqslant\theta_j\leqslant 2\pi$, 而 $\theta\cdot y=\theta_1 y^1+\cdots+\theta_N y^N$. 级数(31.9)无疑是收敛的, 如果 f 有有限的支集(自然, 还需在一些较松的条件下). 此时, 我们有

$$f(y)=(2\pi)^{-N}\int_{\mathbf{T}^N} e^{-i\theta\cdot y}\tilde{f}(\theta)d\theta. \tag{31.10}$$

对于固定的 x 和 n, 可将(31.10)应用于函数 $p(n, x, y)$. 注意到,

$$\tilde{p}(0, x, \theta)=e^{i\theta\cdot x}, \tag{31.11}$$

另一方面, 对于 $n\geqslant 1$, 由全概率公式, 得

$$\begin{aligned} p(n, x, y) &= \sum_{|x-x'|=1} p(1, x, x')p(n-1, x', y) \\ &= \frac{1}{2N}\sum_{|x-x'|=1} p(n-1, x', y), \end{aligned} \tag{31.12}$$

因而,

$$\tilde{p}(n, x, \theta)=\frac{1}{2N}\sum_{|x-x'|=1}\tilde{p}(n-1, x', \theta). \tag{31.13}$$

因为 $|x-x'|=1$ 蕴涵着对于某个 j, $1\leqslant j\leqslant N$, 有 $x'\cdot\theta=x\cdot\theta\pm\theta_j$, 因而取 $n=1$ 并应用(31.11), 即导致

$$\tilde{p}(1, x, \theta)=e^{i\theta\cdot x}\Phi(\theta), \tag{31.14}$$

其中已令

$$\Phi(\theta)=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\cos\theta_j. \tag{31.15}$$

如果回到(31.13), 并对 $n=1, 2, \cdots$ 应用归纳法, 就直接得到

$$\tilde{p}(n, x, \theta)=e^{i\theta\cdot x}\Phi^n(\theta), \tag{31.16}$$

而(31.11)指出, 对于 $n=0$ 这也是对的. 应用 Fourier 反演公式(31.10)即得

$$p(n, x, y)=(2\pi)^{-N}\int_{\mathbf{T}^N} e^{i\theta\cdot(x-y)}\Phi^n(\theta)d\theta. \tag{31.17}$$

考虑所有的幂 Φ^n $(n=0, 1, \cdots)$ 之和 $(1-\Phi)^{-1}$; 显然, 在 $\theta=0$ 处

它有一极点；$(1-\Phi(\theta))^{-1}$ 在此极点处的阶是 2，意即

(31.18) 对于 $\theta\sim 0$，$(1-\Phi(\theta))^{-1}\sim 2N|\theta|^2$ $[|\theta|=(\theta_1^2+\cdots+\theta_N^2)^{1/2}]$.

由此推得，如果 $N\geqslant 3$，则函数 $(1-\Phi)^{-1}$ 在环面 $\mathbf{T}^N$ 上是可积的，因而函数

(31.19) $$G(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}p(n,z,0)=(2\pi)^{-N}\int_{\mathbf{T}^N}e^{i\theta\cdot z}(1-\Phi(\theta))^{-1}d\theta$$

是有界的．应用全概率公式(31.12)就得到

(31.20) $$-\frac{1}{2}\Delta G(x)=\delta(x),$$

其中 δ 是 Dirac 测度的类似物：当 $x=0$ 时它等于 1，否则它等于零．这样，G 在原点的余集中是调和的．我们还用 G 表示卷积算子

(31.21) $$G:\ \mu\mapsto G*\mu(x)=\sum_y G(x-y)\mu(y)$$

(譬如说，它定义于函数——在 $\mathbf{Z}^N$ 上与测度是同一回事——集合上，具有紧支集)．此时(31.20)可改写为形式

(31.22) $$(I-P)G=I,\ 恒等算子,$$

即，$G=(I-P)^{-1}$．如果回过头来看(31.15)和(31.19)，就知道 $\Phi(\theta)$ 是移位算子 P 的 Fourier 变换，$(1-\Phi(\theta))^{-1}$ 是 G 的 Fourier 变换．(31.19)的作用在于，从它容易得到当 $N\geqslant 3$ 时 $G(z)$ 是有界的．从(31.19)我们还能容易推得

(31.23) 当 $|x|\sim+\infty$ 时，$G(x)\sim c_N|x|^{2-N}$

[我们将其推导作为一个习题留给读者：自然，其基本的思路是利用(31.18)，并在(31.19)的积分中作变数变换 $\theta=|z|^{-1}\theta'$]．

刚才给出的性质指出，G 是 Newton 位势的类似物(参看例 30.1)．(31.20)中因子 $\frac{1}{2}$ 的出现只是由于我们现在采用的某种约定(实际上，它是在位势论和概率论中通常采用的一个约定)．自然，在 $\mathbf{Z}^N$ 中我们可以用公式

(31.24) $U^\mu=G*\mu$ (参阅定义 30.3)

来定义一个测度(即，一个函数)μ——具有紧支集——的位势．易

见(参阅命题30.2), U^μ 是非齐次 Laplace 方程

$$(31.25)\qquad -\frac{1}{2}\Delta U^\mu=\mu \quad (\text{在 } \mathbf{Z}^N \text{ 中})$$

的在无穷远处趋于零的唯一解.

如果改写(31.24)为

$$(31.26)\qquad U^\mu(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{y\in\mathbf{Z}^N}p(n,\ x,\ y)\mu(y)\Big),$$

就得到位势的概率解释. 这里, 仍必须把给定的函数 $\mu(y)$ 看作支付. 其第 n 项

$$(31.27)\qquad \sum_y p(n,\ x,\ y)\mu(y)$$

是赢值 μ 在第 n 次试验时的数学期望. 因而, 方程(31.26)指出, $U^\mu(x)$ 是从点 x 出发的质点在一次随机徘徊中支付的全数学期望(或者, 等价地, 平均值).

我们用计算 $\mu(y)=|y|^2$ ($y\in\mathbf{Z}^N$ 的 Euclid 范数的平方) 时的量 (31.27) 来结束这一节的前半部分. 其结果就是一个从 x 点出发的质点在一随机徘徊中所达到的(离原点的)距离的平方的平均值. 记此值为 $d^2(n,\ x)$. 对于 $n\geqslant 1$, 我们有

$$(31.28)\qquad d^2(n,\ x)=\frac{1}{2N}\sum_{|x-x'|=1}d^2(n-1,\ x').$$

自然, 我们有 $d^2(0,\ x)=|x|^2$. 通过关于 n 的归纳法, 从(31.28)得到

$$(31.29)\qquad d^2(n,\ x)=|x|^2+n.$$

事实上, (31.28)蕴涵着

$$d^2(n,\ x)=n-1+(2N)^{-1}\sum_{|x-x'|=1}|x'|^2.$$

然而, 由于显然的对称性, 有

$$\sum_{|x-x'|=1}|x'|^2=N(|x+\mathbf{e}_1|^2+|x-\mathbf{e}_1|^2)=2N(|x|^2+1),$$

其中 $\mathbf{e}_1$ 是沿着 x^1 轴的单位向量.

在 § 31.2 中, 我们将利用 (31.29), 更确切地说, 将利用它的推论[也是中心极限定理的一个直接推论], 即, 一个质点在随机徘徊中第 n 步所达到的距离的平均值是 $\sqrt{n}$ 阶的(对于大的 n).

31.2 连续的情形

我们可以不研究 § 3.1 中的格 $\mathbf{Z}^N$，而研究它的任一个位似像 (homothetical image) $h\mathbf{Z}^N$ ($\mathbf{Z}^N$ 的点乘以 h 就得到 $h\mathbf{Z}^N$ 的点). 此时，在 $h\to+0$ 时取极限，我们得到连续的随机徘徊的概念. 然而，在取极限的过程中我们不应忽视下述事实，即，在随机徘徊中走过的距离这一概念必不可让其消失！特别是，在 $\mathbf{Z}^N$ 中的一个随机徘徊中所走过的距离必须与在 $h\mathbf{Z}^N$ 中在"同一时间"的随机徘徊中所走过的距离本质上是一样的. 但是，实际上我们不可能谈论在一个随机徘徊中所走过的距离，我们只能谈论它的平均值，由 § 31.1 末尾的注，我们知道这个平均值是 $\sqrt{n}$ 阶的. 这样，如果希望用 h^{-1} 去除它的步长，那就必须用 h^{-2} 去除每一步的"时间"；即必须用 h^{-2} 去乘在一给定时间中所实现的步数. 转变到"时间"用语不是偶然的：§ 31.1 中的步数变量 n，现在将用时间变量 t 来代替，也就是用随机徘徊的时间来代替. 为了记号的简便，我们将用 Nh^{-2} 而不是用 h^{-2} 来除每一步的时间.

这样就回到了全概率公式(31.12)，但现在是在格 $h\mathbf{Z}^N$ 中，根据上面的注，我们把它重写为

$$(31.30)\qquad p(t+h^2/N,\ x,\ y)=(2N)^{-1}\sum_{|x-x'|=h}p(t,\ x',\ y)$$

[我们已经用 t 代替了 $(n-1)h^2/N$]. 以 $\mathbf{e}_j$ 表示沿着 x^j 轴的单位向量($j=1,\ \cdots,\ N$). 从(31.30)的两端减去 $p(t,\ x,\ y)$，并将结果除以 h^2/N，就得到

$$(31.31)\qquad \frac{N}{h^2}\{p(t+h^2/N,\ x,\ y)-p(t,\ x,\ y)\}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{h^2}\{p(t,\ x+h\mathbf{e}_j,\ y)+p(t,\ x-h\mathbf{e}_j,\ y)-p(t,\ x,\ y)\}.$$

当 $h\to+0$ 时取极限，容易得到

$$(31.32)\qquad \left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{1}{2}\varDelta\right)p(t,\ x,\ y)=0\quad (对于\ t>0).$$

我们看到，迁移概率 $p(t, x, y)$ 在半空间 $t>0$ 中是热导方程的解 $\left(用\ \frac{1}{2}\Delta 代替\ \Delta\right)$. 对于固定的 $t>0$, 当 $|x-y|\to+\infty$ 时，必有 $p(t, x, y)\to 0$, 因为在离散的情形这是对的. 又

(31.33)　$p(0, x, y)=\delta(x-y)$,　Dirac 测度(对角线上的).

这些条件唯一地确定了 $p(t, x, y)$ (参阅 § 6.1, 也参阅例 44.1). 我们有 $p(t, x, y)=p(t, x-y)$, 其中

(31.34)　$$p(t, z)=(2\pi t)^{-N/2}\exp(-|z|^2/2t).$$

这里 $t>0$; 当 $t\to+0$ 时, $p(t, z)$ (在广义函数意义下，或在测度意义下) 收敛于原点处的 Dirac 测度 δ. 如果 B 是 $\mathbf{R}^N$ 的一个 Lebesgue 可测子集，则现在(这就是说，在某个给定的时刻，我们将此时刻取为原点)在位置 x 处的质点，在时刻 $t>0$ 时在某个属于 B 的点处的概率等于

(31.35)　$$P_x[x(t)\in B]=\int_B p(t, x-y)dy.$$

(31.34) 型的概率分布称为*正态分布*或 *Gauss 分布*. 它是球对称的，指出了连续随机徘徊的完全的各向同性性(连续随机徘徊称为 *Brown 运动*，用以纪念植物学家 Robert Brown，他曾在 1827 年观察过悬浮于水面的花粉颗粒的“快速摆动”). $p(t, z)$ 的图像(对于固定的 $t>0$)是通常的铃型曲面，在 $z=0$ 处取极大值. 对于任意的 x, 概率分布等于 $p(t, x-y)$ 这一事实强调了 Brown 运动是*平移不变的*. 还注意，根据(31.35)，过去的事件对于将来的运动是没有影响的. 与离散情形相比，一个值得注意的差别是，在某个时刻 $t>0$, 质点位于任一给定的点处的概率总是零. 现在位于点 x 处的质点将随机地找到一条途径——根据规则 (31.35). 所谓途径实际上是从 $\overline{\mathbf{R}}_+=\{t\in\mathbf{R};\ t\geqslant 0\}$ 到 $\mathbf{R}^N$ 中的连续映射；我们可以把每个“出发点” x 与一概率分布相联系，即，与从 x 出发的所有途径组成的空间上一个总质量为 1 的正测度相联系；这里我们不深入研究了.

现在容易猜想到处理 Dirichlet 问题的概率途径了. 令 Ω 是 $\mathbf{R}^N$ 的一有界开子集, $\partial\Omega$ 是其边界. 引进从 $x\in\Omega$ 处出发的质点

的首次流出时间(time of first exit) τ: τ 是所有使得 $x(t)\in\mathbf{R}^N\backslash\Omega$ 的数 t 的下确界. 其次, 我们定义逃逸 (escape) 概率 m_x: 它是边界 $\partial\Omega$ 上的一个测度. 对于 $\partial\Omega$ 的每个(譬如, Borel)子集 A,它给出一数,此数是 $x(\tau)\in A$ 这一事件的概率. 现在, 如果 g 是 $\partial\Omega$ 上的一个任意的连续函数,并且,若令

$$u(x)=\int_{\partial\Omega}g(y)\,dm_x(y), \tag{31.36}$$

则有

$$\Delta u=0 \quad 在\ \Omega\ 中, \tag{31.37}$$

$$u=g \quad 在\ \partial\Omega\ 上. \tag{31.38}$$

有几个事实需要确立,而且(31.38)的含义必须说清楚. 首先必须证明,逃逸的时间是有限的,确切一些说(为了更多地保持我们在这里所采用的观点),质点从集合 Ω 逃逸的概率是 1. 事实上,只需证明质点从任意一个中心在 x 处的球 $B_R(x)$ 逃逸的概率是1即可. 我们来证明质点永远留在此球中的概率是零. 假设在时刻 $n\in\mathbf{Z}_+$ 之前它留在球 $B_R(x)$ 中; 则所有增量 $x(j)-x(j-1)$ $(j=1,\cdots,n)$ 的范数必须都 $\leqslant 2R$. 由于随机运动所遵循的概率规律,我们有

$$P[|x(j)-x(j-1)|\leqslant 2R]$$
$$=(2\pi)^{-N/2}\int_{|z|<2R}\exp(-|z|^2/2)\,dz=\alpha_R<1,$$

并由全概率公式,得

$$P_x[\tau>n]\leqslant\prod_{j=1}^{n}P[|x(j)-x(j-1)|\leqslant 2R]=\alpha_R^n,$$

当 $n\to+\infty$ 时它收敛于零. (其中我们用 $P[e]$ 表示事件 e 的概率.)

一个很简单的概率论的论证指出,函数(31.36)是调和的. 令 $B_r(x)$ 是中心在 x 处的任一开球,它的闭包包含在 Ω 中. 从 x 出发的质点在碰到 Ω 的边界之前,必定碰到球 $B_r(x)$ 的边界 $S_r(x)$. 然而, 如果我们要计算(在首次流出 Ω 的时刻 τ)碰到 $\partial\Omega$ 的某个子集的概率, 我们不妨忘掉在首次流出球 $B_r(x)$ 的时刻 τ' 之前发生的事情. 换句话说,不妨假设质点在时刻 τ' 从 $S_r(x)$ 的某点出发.

但是我们必须规定质点(在时刻τ')在$S_r(x)$的一给定子集A'中的概率. 此概率必定等于从x来的质点在时刻τ'碰到A'的概率. 由于Gauss分布的对称性, 后者在$S_r(x)$上不能不是均匀的. 用数学的语言说, 关于$B_r(x)$的测度m_x的类似物是球面$S_r(x)$上的面积测度, 经除以$S_r(x)$的总面积而规范化. 此即意味着

$$(31.39)\quad m_x(A)=|S^{n-1}|^{-1}\int_{S^{n-1}} m_{x+r\dot{x}}(A)d\dot{x}\quad [参阅(30.1)],$$

其中A是$\partial\Omega$的Borel子集. 换言之, 测度m_x是调和的(容易验证它关于x的可测性), 这就蕴涵着(31.37).

现在我们来考察边界条件(31.38). 由§29中导致正规点概念(定义29.4)的那些考察, 我们了解到事实不很简单. 例如, 假设Ω是原点对于$\mathbf{R}^2$中单位圆盘的余集. 那么可以证明, 对于Ω中任意的x, 即无论x如何接近于原点, 从x出发的质点首先在原点处流出Ω的概率是零. 边界点的正规性概念有下述的概率解释: 如果用τ表示从x出发的质点第一次流出Ω的时刻, 则$\partial\Omega$的一个点x_0是正规的, 当且仅当

$$(31.40)\qquad \lim_{x\to x_0} P_x[\tau>h]=0,\quad 对每个 h>0$$

(用标准的术语说, 即当$x\to x_0$时τ依概率收敛于零). 我们不来证明这个论断(证明不很难, 读者不妨试一试). 它是下述论断的一个推论: x_0是正规的, 当且仅当

$$(31.41)\qquad \forall r>0,\ \lim_{x\to x_0} P_x[x(\tau)\in\partial\Omega\cap B_r(x_0)]=1.$$

习 题

31.1 令$G(z)$是$\mathbf{Z}^N$中由(31.19)给出的位势. 证明, 当$N=2$时,

$$G(0)=\pi^{-2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta_1\,d\theta_2}{4-(\cos\theta_1+\cos\theta_2)^2}=+\infty,$$

但是当$N\geqslant 3$时$G(0)<+\infty$. [提示: 在$N=2$的情形, 注意到对所有$k=0, 1, \cdots$, 有$p(2k+1, 0, 0)=0$.]

31.2 本习题研究由下述定义所引进的重要概念:

定义 31.1 $\mathbf{Z}^N$的一个子集B称为常返的(recurrent), 如果给定$\mathbf{Z}^N$的任一

点 x, 从 x 出发的质点终于碰到 B 的概率等于 1.

当 $x\in\mathbf{Z}^N$ 时,我们用 $\pi_B(x)$ 表示从 x 出发的质点在其随机徘徊中至少一次碰到 B 的概率,用 $\pi_B^*(x)$ 表示质点无穷次地碰到 B 的概率. 证明下述论断:

(31.42)　如果 B 是常返的,则 $\pi_B^*(x)=1$;

如果 B 不是常返的,则 $\pi_B^*(x)=0$.

[提示: 把 $\pi_B(x)$ 表为和式 $\sum_{n=0}^{+\infty}q_B(n, x, y)$, 其中 $q_B(n, x, y)$ 是从 x 出发的质点在第 n 步在点 $y\in B$ 处第一次碰到集合 B 的概率, 并证明 $\pi_B^*(x)=\pi_B(x)\pi_B^*(x)$.]

31.3　证明,当 $N\leqslant 2$ 时, $\mathbf{Z}^N$ 的每个子集都是常返的(定义 31.1),然而,当 $N\geqslant 3$ 时, $\mathbf{Z}^N$ 的每个有界子集都不是常返的. 再证明, $\mathbf{Z}^3$ 中的"平面" $x^3=0$ 是常返的.

31.4　证明离散情形中的 *Riesz* 分解公式[参阅(30.27)],即证明,对给定的 $\mathbf{Z}^N$ 中任一过剩函数 f (即任一非负上调和函数),我们有

(31.43)
$$f=U^\mu+f^*,$$

其中 $U^\mu=G*\mu$ 是 $\mu=-\frac{1}{2}\Delta f$ 的位势,而 f^* 是 $\mathbf{Z}^N$ 中的一个调和函数.证明, f^* 是 f 的最大调和劝函数.

31.5　令 $B\in\mathbf{Z}^N$, 而 π_B, π_B^* 是在习题 31.2 中定义的函数. 证明 π_B 是过剩函数, π_B^* 是 π_B 的最大调和劝函数. 证明, $\mu_B=-\frac{1}{2}\Delta\pi_B$ 由 B 所支撑,而 B 不是常返的,当且仅当 π_B 是一位势.

31.6　假设 B 是非常返的(参阅定义 31.1). 证明 $\mu_B=-\frac{1}{2}\Delta\pi_B$ 是由 B 所承载的、位势 $\leqslant 1$ 的最大负荷. [此时, 总质量 $\mathscr{C}(B)=\sum_{y\in B}\mu_B(y)$ 称为 B 的(离散的)容量.]

31.7　证明,如果 $N\geqslant 3$, 则由 k 个点($k<+\infty$)组成的集合 B 的容量等于 $k/G(0)$, $G(z)$ 是位势(31.19); 并证明, 任一无限的非常返集合的容量是无限的.

31.8　令 Ω 是 $\mathbf{R}^N$ 的一有界开子集. 用 σ 表示从 x 出发的一质点流出 Ω 的第一个严格正的时间.(注意,如果 $x\in\mathbf{C}\Omega$, 则首次流出时间 τ 显然是零; 但是, 如果 x 属于 Ω 的边界, 质点可能立刻重新进入 Ω, 然后在一稍后的时刻再流出 Ω.)令 h 是一个任意的大于零的数. 证明,对于任给的点 x, 有

(31.44)
$$P_x[\tau>h]\leqslant P_x[\sigma>h].$$

用 $A(t_0)$ 表示在时间区间 $t_0\leqslant t\leqslant h$ ($t_0>0$)中, 质点的轨道整个地位于 Ω 中这

一事件，用 $P_x[A(t_0)]$ 表示从 x 出发的质点发生事件 $A(t_0)$ 的概率. 证明，对于固定的 t_0，$0<t_0<h$，$P_x[A(t_0)]$ 是 $\mathbf{R}^N$ 中 x 的连续函数. [提示：证明

(31.45) $$P_x[A(t_0)]=\int_{\mathbf{R}^N} P_y[\tau>h-t_0]p(t_0,\ x-y)dy.]$$

证明，

(31.46) $$P_x[\sigma>h]=\lim_{t_0\searrow+0} P_x[A(t_0)],$$

由此推导，$P_x[\sigma>h]$ 关于 x 是上半连续的，并且，与(31.44)一起，利用 $x_0\in\partial\Omega$ 正规性的充分必要条件(31.40)，证明，x_0 是正规的，如果

(31.47) $$P_{x_0}[\sigma>0]=0.$$

31.9 使用与习题31.8中相同的记号. 令 h, t_1 是使得 $0<h<t_1$ 的两个数，并令 $A(t_1)$ 表示在时间区间 $h\leqslant t\leqslant t_1$ 中，质点的轨道完全位于 Ω 之内这一事件. 证明，如果 x 是 $\mathbf{R}^N$ 中任一点，则

(31.48) $$P_x[\sigma>0,\ A(t_1)]=P_x[\sigma>0]P_x[A(t_1)],$$

即，对于 $h>0$，事件 $\sigma>0$ 和事件 $A(t_1)$ 是独立的(注意，事件 $\sigma>0$ 的发生决定于一无限小的时间区间 $0<t<\varepsilon$ 中). 从(31.48)推导，

(31.49) $$P_x[\sigma>0]=(P_x[\sigma>0])^2,$$

因而推得零壹律(zero-one law)：$P_x[\sigma>0]$ 或者等于零，或者等于1.

31.10 令 Ω 是 $\mathbf{R}^N$ 的一有界开子集，x_0 是它的一个边界点. 假设，存在一个包含于 $\mathbf{R}^N\backslash\Omega$ 中的、以 x_0 为顶点的截球锥 Γ. 证明，x_0 是一正规点. [提示：把正规性的充分条件(31.47)与零壹律(31.49)结合起来，证明，如果 x_0 是非正规的，则必存在 $t_0>0$，使得在时间区间 $0<t<t_0$ 中轨道完全包含在 Ω 的内部的概率等于1. 这样，对于 $0<t<t_0$，轨道必然位于锥 Γ 之外. 利用 Gauss 分布的旋转不变性得到，在开区间 $0<t<t_0$ 中，轨道应该位于一开球之外，此球以 x_0 为心，有严格正的半径；由此得到，x_0 必须是正规的，与假设矛盾.]

31.11 从 Gauss 分布推导在一连续的随机徘徊中，在一时间区间 $0\leqslant t\leqslant\tau$ 中所走过的路程的平均值.

32. 平面中的 Dirichlet 问题. 保角映射

在本节我们将研究平面 $\mathbf{R}^2$ (或 $\mathbf{R}^2$ 的开子集) 中两个变量 (x, y) 的调和函数与复变量 $z=x+iy\,(i=\sqrt{-1})$ 的解析函数之间的关系. 此关系基于下述事实：

$$\Delta=\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2=4\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}}, \tag{32.1}$$

其中 $\partial/\partial\bar{z}=\frac{1}{2}(\partial/\partial x+i\partial/\partial y)$ 是 Cauchy-Riemann 算子（参阅 §5），$\partial/\partial z$ 是它的"复共轭"．

(32.1) 的第一个推论是，Laplace 方程在很大一类平面的变换下是不变的，这类变换远多于两个变量的正交群．因为，如果 $z\mapsto Z=Z(z)$ 是从 $\mathbf{R}^2$ 的开子集 Ω 到另一个这样的集合 Ω' 上的全纯同胚(holomorphism)［$Z(z)$ 在 Ω 中是全纯的，$Z'(z)$ 在 Ω 的任一点处不等于零，而 $z\mapsto Z$ 是从 Ω 到 Ω' 上的一个双满映射］，那么 $h(Z)\mapsto h(Z(z))$ 就构成一个从 Ω' 中调和函数空间到 Ω 中调和函数空间上的双满映射(事实上，对自然拓扑而言，是一个同构)．这是因为

$$\Delta_{x,y}=|Z'|^2\Delta_{X,Y}, \tag{32.2}$$

其中 $X=\operatorname{Re}Z$，$Y=\operatorname{Im}Z$．

平面中的 Laplace 方程在全纯同胚——或者，如经常所称的，保角映射——下是不变的这一事实，使我们能把 Dirichlet 问题从一开集转到它的一个双全纯象(biholomorphic image)上，后者可取为一个较简单的集合．$\mathbf{C}$ 的所有有界开子集中最简单的可能就是单位圆盘 $\{z;\ |z|<1\}$；我们用 $\mathscr{D}$ 表示它．如果 Ω 是 $\mathbf{C}$ 的一有界域(即一个有界开连通集，并是单连通集)，则由 Riemann 映射定理知道，存在一个从 Ω 到 $\mathscr{D}$ 上的全纯同胚 $z\mapsto w(z)$．此外，给定 Ω 的任一点 z_0，可以选取函数 w，使得 $w(z_0)=0$．进一步假设边界 $\partial\Omega$ 是一条 C^1 曲线，并设映射 $z\mapsto w$ 可延拓为从 $\partial\Omega$ 到单位圆周 $\partial\mathscr{D}$ 上的一个 C^1 同胚(意即它的导数存在，连续，且无处为零)．于是容易得到 $\partial\Omega$ 上调和测度的表达式．在关于边界数据 g 的适当正规性假设下，我们来考察齐次 Dirichlet 问题：

$$\Delta u=0 \quad \text{在 } \Omega \text{ 中}, \tag{32.3}$$

$$u=g \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}. \tag{32.4}$$

令 $f(w)=g(z)$，其中 $w=w(z)$．这样，f 就是 $w(|w|=1)$ 的函数．

此时，考虑 Dirichlet 问题

(32.5) $$\Delta v=0 \quad 在 \mathscr{D} 中,$$

(32.6) $$v=f \quad 在 \partial\mathscr{D} 上$$

的解 v. 中值公式(10.17)导致

$$v(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})d\theta=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|w|=1} f(w)\frac{dw}{w}.$$

令

(32.7) $$M(z_0, z)=\frac{w'(z)}{w(z)},$$

因为 w 的选取依赖于 z_0 的选取. 我们得到

(32.8) $$u(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial\Omega} g(z)M(z_0, z)dz.$$

特别，当 Ω 是单位圆盘本身，$z\mapsto w$ 是一个可延拓为从单位圆周到其自身上的 C^1 同胚的、把 z_0 映为零的、从 $\mathscr{D}$ 到其自身上的全纯同胚时，我们可以应用这个公式. 把 w 取为

(32.9) $$w=(z-z_0)/(1-\bar{z}_0 z)$$

是标准的取法；简单的计算表明，如果 $|z|=1$, 则

(32.10) $$M(z_0, z)=\frac{1-|z_0|^2}{|1-\bar{z}z_0|^2}\frac{1}{z}.$$

把此式代入(32.8)，在现在的特殊情形中我们就得到 *Poisson* 公式(10.28)：

(32.11) $$u(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(e^{i\theta})\frac{(1-r_0^2)d\theta}{1-2r_0\cos(\theta-\theta_0)+r_0^2},$$
$$z_0=r_0\exp(i\theta_0),\ r_0<1.$$

现在仍假设 Ω 是一有界域. 如果 f 是 Ω 中一个全纯函数，则它是调和的，因而其实部和虚部亦然. 反之，令 u 是 Ω 中的一个实值调和函数. 微分形式

$$\omega=-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy$$

在 Ω 中是闭的，因而(因为 Ω 是单连通的)它等于 Ω 中一函数的微分 dv. 取

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \omega,$$

其中(x_0, y_0)是Ω的一个任意的(但是固定的)点, 积分沿Ω中连结(x_0, y_0)和(x, y)的任一适当光滑的(例如分段线性的)途径进行(因为ω是闭的, 因此积分途径的选择是不重要的). 因为$\omega = dv$, 我们就有 Cauchy-Riemann 方程:

$$(32.12) \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x},$$

它蕴涵着v在Ω中也是调和的. 习惯上称u和v是**共轭调和函数**. 满足关系(32.12)的任一别的函数与v相差一个常数; 自然, 这相应于在定义v的积分中点(x_0, y_0)的选取的改变.

一个值得注意之处是, 关系(32.12)蕴涵着

$$(32.13) \qquad (\operatorname{grad} u) \cdot (\operatorname{grad} v) = 0.$$

此正交性有一重要的解释. 假设Ω表示一个各向同性的(和均匀的)介质, u是介质内部的温度; 假设在Ω的边界的每一点处, u的值保持为常数(对时间而言). 那么Ω中的曲线$u =$常数就是**等温线**(isothermic lines). 必须注意, 它们不一定是真正的"曲线": 例如, 如果在边界上温度的值是常数, 譬如说在$\partial\Omega$的每个点处等于1, 则在Ω中$u \equiv 1$, 因此只有一条等同于集合Ω本身的等温线. 但是, 为了论证的方便, 我们假设等温线形成一个真正的光滑曲线的单参数族, 那么这些曲线的正交轨线就都是v的等值线: 当u是温度时. 这些正交轨线即为**热流线** (lines of heat flow): 向量$\operatorname{grad} u$与曲线$v =$常数相切, 而$\operatorname{grad} u$与流量成比例.

很清楚, 如果施行一个从Ω到$\mathbf{C}$中另一域上的保角映射, 那么整个结构将被保角地变换: 等温线被映为新域中的等温线, 热流线被映为新域中的热流线.

令f是闭单位圆盘$\overline{\mathscr{D}}$中的连续函数, 在$\mathscr{D}$内部是全纯的, 并令$f = u + iv$. 注意到当$|z| = 1$时

$$\frac{1 - |z_0|^2}{|1 - \bar{z} z_0|^2} = \operatorname{Re}\left(\frac{z + z_0}{z - z_0}\right),$$

由(32.8)和(32.10), 我们有

$$u(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}u(z)\,\mathrm{Re}\left\{\frac{z+z_0}{z-z_0}\right\}\frac{dz}{z},$$

因而
$$v(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}u(z)\,\mathrm{Im}\left\{\frac{z+z_0}{z-z_0}\right\}\frac{dz}{z}+C,$$

因为右端的积分是 $u(z_0)$ 的一调和共轭（两者都视作 Ω 中 z_0 的函数）. 我们推得

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}u(z)\left\{\frac{z+z_0}{z-z_0}\right\}\frac{dz}{z}+C.$$

然而很清楚，在用 $-if$ 代替 f，用 $v=\mathrm{Re}(-if)$ 代替 u 时，我们能够应用这个公式，因而

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}iv(z)\frac{z+z_0}{z-z_0}\frac{dz}{z}+C'.$$

把这两个公式相加，并改变常数 C 的定义，就得到

$$2f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}f(z)\frac{z+z_0}{z-z_0}\frac{dz}{z}+C.$$

在上面的表达式中取 $z_0=0$，并应用中值定理，则得

$$C=f(0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}f(z)\frac{dz}{z},$$

因而得到

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}f(z)\frac{1}{2}\left\{\frac{z+z_0}{z-z_0}+1\right\}\cdot\frac{dz}{z}$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}f(z)\frac{dz}{z-z_0},$$

它表明，单位圆盘中的 Cauchy 公式[参阅(5.13)]是 Poisson 公式(32.11)的一个推论. 这并非意外；必须注意，Poisson 公式是中值定理的一个推论，而后者是 Cauchy 公式的一个直接的推论.

我们继续考虑当 $\Omega=\mathscr{D}$（单位圆盘）时的 Dirichlet 问题(32.3)—(32.4). 假设边界值 g 是充分正规的，这里可以理解为 $g\in L^2$ 或 $g\in L^p(1\leqslant p\leqslant+\infty)$. 事实上，如果只假设 g 是单位圆周 $\partial\mathscr{D}$ 上的一个广义函数，则现在要叙述的大多数事实仍是对的. 在下文中重要的是，g 必须有 *Fourier* 展开式：

(32.14)
$$g(e^{i\theta})=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}g_m e^{im\theta}.$$

在当 $m<0$ 时所有的 Fourier 系数 g_m 等于零的情形，容易得到 (32.3)—(32.4) 的解（在某种适当的广义下）：它是 $z(|z|<1)$ 的全纯函数；它的 *Taylor* 展开式即为

$$\sum_{m=0}^{+\infty} g_m z^m. \tag{32.15}$$

如果当 $m>0$ 时所有的系数 g_m 等于零，则解必由

$$\sum_{m=0}^{-\infty} g_m \bar{z}^{-m} \tag{32.16}$$

给出. 因而，在一般情形，我们可以取

$$u(x, y) = u^+(z) + u^-(z) - g_0, \tag{32.17}$$

其中 u^+ 和 u^- 分别是函数(32.15)和(32.16). 将 Cauchy 公式应用于 u^+，反 Cauchy 公式应用于 u^-，容易验证，解 u（在关于 g 的适当的假设下）与由 Poisson 公式所给出的解一致.

还必须注意，(32.11)中的 Poisson 核可视为单位圆周上的（等同于平面中旋转群的）对合核. 当 $r_0<1$ 时它是 C^∞ 的，因而可以将其作用到单位圆周上的任何广义函数上：其结果就是单位圆盘中以此广义函数作为边界值的齐次 Dirichlet 问题的解. 我们甚至可以证明，此解确实“取”此边界值：事实上，u 是 $r_0>0$ 的光滑函数，取值于圆周 $|z|=r_0$ 上的广义函数的空间中；当 $r_0\nearrow 1$ 时，$u(r_0e^{i\theta})$，作为角度变量 θ 的广义函数，收敛于 $g(e^{i\theta})$. 可以立刻验证这个论断，例如对于由(32.17)给出的 u 的表达式（利用 Fourier 级数）来验证.

最后我们注意，Fourier 级数方法可用于任何环形 $R_1<|z|<R_2$ $(0<R_1<R_2)$（参看习题 32.2）. 利用全纯同胚，可把许多“双”连通开集映为这样的环形；因而在环形中的 Dirichlet 问题的解可转换到这样的一个开集中去.

人们或许还要在一无界开集——例如，单位圆周的外部——中解 Dirichlet 问题. 此时，提出“在无穷远处的条件”，例如所求的解的衰减速度，是必要的；这里存在某种程度的不明确性（参阅习题 32.4 到 32.7）.

习　　题

32.1　假设 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$ 的函数 $g(e^{i\theta})$ 是平方可积的，并令 u 是开单位圆盘中由 Poisson 公式(32.11)给出的函数．证明，当 $r_0>0$ 趋于 1 时，

$$\int_0^{2\pi}|u(r_0e^{i\theta})-g(e^{i\theta})|^2d\theta\to 0$$

[提示：利用 u 的 Fourier 级数表示.]

32.2　令 g_j 是圆周 $|z|=r_j$ $(j=1,\ 2;0<r_1<r_2)$ 上的一个广义函数．利用 Fourier 级数方法证明：在环形 $r_1<r<r_2$ 中存在一个有下述性质的调和函数 $u(r,\ \theta)$：给定单位圆周上的任一 C^∞ 函数 $\phi(e^{i\theta})$，当 $r\to r_j$ $(j=1,\ 2)$ 时，有

$$\int_0^{2\pi}u(r,\ \theta)\,\phi(e^{i\theta})d\theta\to\int_0^{2\pi}g_j(e^{i\theta})\phi(e^{i\theta})d\theta.$$

32.3　证明，习题 32.2 中的调和函数 u 是唯一的[提示：在边界数据 $g_1,\ g_2$ 恒等于零的情形，证明，每个卷积

$$\int_0^{2\pi}u(r,\ \theta_0-\theta)\phi(e^{i\theta})d\theta,\quad \phi\in C_\theta^\infty([0,\ 2\pi])$$

也是解，并且，它连续到边界.]

32.4　令 $g(e^{i\theta})$ 是单位圆周上的一个连续函数．关于 g 加上什么条件，才能使得在域 $|z|>1$ 中存在一个全纯函数 $f(z)$，当 $|z|=1$ 时它等于 g? 证明，如果 f 存在，则必不唯一．证明，如果附加上 f 在无穷远处等于零这个条件，则存在唯一这样的全纯函数 f．由此推导，对于任意的(实值)连续函数[1] $g(e^{i\theta})$，在域 $|z|>1$ 中存在唯一的调和函数，当 $|z|=1$ 时它等于 g，在无穷远处它趋于零.

32.5　令 $g(e^{i\theta})$ 是单位圆周上一个任意的连续函数，$u(x,\ y)$ 是域 $x^2+y^2>1$ 中当 $x^2+y^2=1$ 时等于 g，在无穷远处趋于零的唯一的调和函数．证明，u 可表示为单位圆周上的一个卷积，类似于 Poisson 公式(32.11)（但是在这里 $r_0>1$)．计算此卷积中作用在 $g(e^{i\theta})$ 上的核．[提示：在 Poisson 公式中对变量 z_0 施行一个反演.]

32.6　令 $g(t)$ 表示实直线上一个具有紧支集的任意的连续函数．令

$$g(z)=(2\pi i)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)(t-z)^{-1}dt,$$

$$u(x,\ y)=g(z)-g(\bar{z})\quad(z=x+iy,\ i=\sqrt{-1}).$$

---

1) 译者注：此处"实值"二字是译者所加.

记
$$u(x, y)=\int_{-\infty}^{+\infty} K(x, y, t)g(t)dt,$$
证明核 $K(x, y, t)$(通常称为关于上半平面的 *Poisson* 核)可视作 (x, t) 的一个广义函数,光滑地(即以 C^∞ 方式)依赖于参数 $y>0$,并满足

(32.18) $\qquad \lim_{y\to+0} K(x, y, t)=\delta(x-t) \quad$ (δ 是 Dirac 测度).

证明,u 是上半平面中满足下述两式:

(32.19) $\qquad \lim_{y\to+0} u(x, y)=g(x) \quad$ 在实直线的紧子集上关于 x 一致;

(32.20) $$\lim_{z\to\infty} u(x, y)=0$$

的唯一的调和函数;但是,如果只满足(32.19),则它不是唯一的.

32.7 令 $g(t)$ 是实直线上连续的周期为 2π 的周期函数. 证明,在开的上半平面中存在唯一的调和函数 u, 满足

(32.21) $$\lim_{y\to+0} u(x, y)=g(x),$$

(32.22) $$\lim_{y\to+\infty} u(x, y)=(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} g(t)dt,$$

其中,极限关于 $\mathbf{R}^1$ 中的 x 是一致的. 利用关于上半平面的 Poisson 核(参阅习题 32.6),u 能用 g 表示出来吗?

32.8 考虑复微分方程

(32.23) $$\frac{dw}{dz}=(1-z^2)^{-1/2}(1-k^2z^2)^{-1/2} \quad (0<k<1),$$

其中假定根式当 $z=0$ 时等于 $+1$. 证明,当 $\operatorname{Re} z>0$ 时(32.23)存在唯一的全纯函数解 $w(z)$, 当 $z=0$ 时它等于零(显然, 在原点的一邻域中 w 将是全纯的). 证明, $z\mapsto w(z)$ 是从开的上半平面到矩形

(32.24) $$0<\operatorname{Re} z<K, \quad 0<\operatorname{Im} z<K'$$

上的一个双全纯映射, 其中 K 和 K' 是两个实常数, 读者应该证明它们分别等于 $w(1)$ 和 $(1/i)w(1/k)-w(1)$.

利用逆映射 $w\mapsto z=\operatorname{sn}(w)$ (sn 是 Jacobi 椭圆函数)以及

(32.25) $$z\mapsto u=e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}} \quad (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\ \alpha\in\mathbf{C},\ \operatorname{Im}\alpha>0)$$

是从半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 到开单位圆盘上的一个保角映射这一事实,给出相应于矩形(32.24)的调和测度的表达式.

32.9 利用 Fourier 级数,在环形 $0<|z|<1$ 中解弱 Dirichlet 问题. 解释你所求得的解,并将其与经典 Dirichlet 问题中所得到的解相比较.

32.10 令 u 和 v 是单位圆盘 $|z|<1$ 中共轭的调和函数. 记 $z=re^{i\theta}$, 考

虑u和v关于θ的Fourier展式，并叙述u和v的Fourier系数$u_m(r)$和$v_m(r)(m\in\mathbf{Z})$之间的关系.

33. 三维空间中调和函数用调和多项式的逼近. 球面调和函数

我们先考察两个自变量x和y的Laplace方程，并试着确定它的所有的多项式解$P(x, y)$. 记$P(x, y)=P_m(x, y)+P_{m-1}(x, y)+\cdots$，其中$P_d(x, y)$是$d$次齐次多项式. 因为各$P_j(x, y)$是线性无关的，所以每一个$P_j$必是Laplace方程的解，因而可假设$P=P_m$是$m$次齐次的. 过渡到极坐标$r$, θ, 可以写

$$(33.1)\qquad P_m(x, y)=r^m\sum_{\nu=-m}^{+m}c_\nu e^{i\nu\theta}.$$

然而，指数函数$\exp(i\nu\theta)$显然也是线性无关的，因而每一项$r^m e^{i\nu\theta}$必是调和的. 利用Laplace算子在极坐标中的表达式我们看到，必须有

$$(33.2)\qquad \left\{r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right\}(r^m e^{i\nu\theta})=0,$$

它蕴涵着$m^2=\nu^2$，即$m=\pm\nu$. 换言之，

$$(33.3)\qquad P_m(x, y)=Az^m+B\bar{z}^m.$$

现令$f(x, y)$是圆盘$r<R$中的一个任意的调和函数，连续到边界. 我们曾经看到，利用f的边界值的Fourier级数，可把f表为一个Fourier级数，其系数是r的幂的倍数，具体说，有

$$(33.4)\qquad f(x, y)=\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}C_\nu r^\nu e^{i\nu\theta}=C_0+f^+(z)+f^-(\bar{z}),$$

其中f^+和f^-在圆盘$r<R$中都是全纯的，而在原点处等于零. 这样我们就看到，调和多项式在圆盘$r<R$中的调和函数的空间中是稠密的(当用$\mathbf{R}^2$中任一域代替圆盘时这仍是对的). 这个逼近性质有许多应用. 其中主要的是，在圆盘和环形中——正如§32中所指出的——利用级数表达式(33.4)解Dirichlet问题的可能性. 因而自然要问：在高维的情形，是否具有类似的逼近性质，以

及此性质是否导致适当简单的级数表示，使我们能在球(或“球壳”)中“显式地”解 Dirichlet 问题. 然而，必须指出，我们不能期望在维数 $\geqslant 3$ 的情形得到与平面的情形相同的结果：确切地说，我们不会有 Riemann 映射定理的类似物，此定理告诉我们，可以把 Dirichlet 问题从 $\mathbf{R}^2$ 中任一有界域转换到单位圆盘中去；因而，我们不能把 Dirichlet 问题(从 $\mathbf{R}^n$, $n\geqslant 3$, 的简单的开子集)转换到球中.

如果 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的一开集，它的余集没有有界的连通分枝，那么下述事实是对的：Ω 中的每个调和函数是调和多项式的极限(譬如说，对于在 Ω 的紧子集上的一致收敛性而言). 在本书中我们不证明这个定理. 我们将只考察三维的情形并证明与(33.4)同类型的相对简单的展开式确实是存在的. 再者，如果我们想在球中解 Dirichlet 问题，则这些展开式的球对称性使得它们很便于应用.

象在两个变量的情形中一样，我们来考察 m 次齐次多项式，这里是 $P_m(x, y, z)$，并转换到球面坐标 r, ϕ, θ (ϕ 是经度，θ 是余纬度)：

$$x=r\cos\phi\sin\theta, \quad y=r\sin\phi\sin\theta, \quad z=r\cos\theta. \tag{33.5}$$

一个容易的计算(参阅习题 33.1)指出，在这个坐标系中，

$$r^2\Delta=r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}+2r\frac{\partial}{\partial r}+(\sin\theta)^{-2}\Lambda_{\phi,\theta}, \tag{33.6}$$

其中

$$\Lambda_{\phi,\theta}=\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}+(\sin\theta)^2\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+(\cos\theta)(\sin\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}. \tag{33.7}$$

这里，变量自动地分离了，因为 $P_m(x, y, z)=r^m P_m(\cos\phi\sin\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\theta)$；因而，把 $P_m(\cos\phi\sin\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\theta)$ 表示为一些线性无关的函数 $h(\phi, \theta)$ 的线性组合后，我们必须有

$$\left(r^2\frac{d^2}{dr^2}+2r\frac{d}{dr}\right)r^m=kr^m, \tag{33.8}$$

$$(\Lambda_{\phi,\theta}+k\sin^2\theta)h(\phi, \theta)=0. \tag{33.9}$$

其中第一个方程直接给出

(33.10)
$$k=m(m+1).$$
另一方面，由于指数函数 $\exp[i(\alpha\phi+\beta\theta)]$ 的线性无关性，在(33.9)中我们还可利用分离变量法．记 $h(\phi,\theta)=v(\phi)u(\theta)$，则(33.9)给出

(33.11)
$$v''+k_1v=0,$$

(33.12)
$$(\sin\theta)^2\frac{d^2u}{d\theta^2}+(\cos\theta)(\sin\theta)\frac{du}{d\theta}+k(\sin\theta)^2u-k_1u=0,$$

而从(33.11)立刻得到 $k_1=n^2$，其中 n 是一整数(正的，负的，或零)．这样，

(33.13)
$$v=Ae^{in\phi}+Be^{-in\phi}.$$

现在我们必须专注于(33.12)．作变量代换 $t=\cos\theta$ 是方便的．这就把(33.12)变为

(33.14)
$$\frac{d}{dt}\left\{(1-t^2)\frac{du}{dt}\right\}+\left(m(m+1)-\frac{n^2}{1-t^2}\right)u=0.$$

当 $n=0$ 时，(33.14)化为 *Legendre* 方程：

(33.15)
$$\frac{d}{dt}\left\{(1-t^2)\frac{du}{dt}\right\}+m(m-1)u=0.$$

(33.15)的解称为 *Legendre* 函数．这里，我们只考虑 m (以及 n)取非负整数值的情形；然而，对于 m 和 n 的所有复数值，这些方程的理论已被发展．稍后一些我们将看到，(33.14)的有意义的解可用(33.15)的(有意义的)解来表示．因而我们首先考察后者．自然，没有必要把 t 的变动范围限制于区间[−1, +1]之中[虽然在(33.12)中我们是令 $t=\cos\theta$ 而得到(33.14)的]．

为了解(33.15)，试着用幂级数展开式
$$u(t)=\sum_{j=0}^{+\infty}u_jt^j$$
是自然的．这就导致关于系数 u_j 的递推公式：

(33.16)
$$(j+2)(j+1)u_{j+2}=-(m-j)(m+j+1)u_j.$$

公式(33.16)立即证明了(33.15)的多项式解的存在：如果 m 是偶数，对于所有奇数 j，取 u_j 等于零，对于所有 $>m$ 的偶数 j，也取

u_j 等于零；于是，(33.16) 使我们能够用 u_0 来表示 j 为偶数的剩下来的 u_j．当 m 是奇数时相同的推理也成立——但是必须在上述每一处将奇偶交换，并用 u_1 代替 u_0．当 $m=0$ 时，这个多项式解是一常数．对于 $m=1$，它具有 Ct 这样的形式，其中 C 是一任意常数．对于任何 $m=0, 1, \cdots$，(33.15) 的多项式解是当 $m=0$ 和 $m=1$ 时的解之一的倍数，即它们张成一个一维线性空间．不难找到这个线性空间的生成元．令 $u=D^m v$ $(D=d/dt)$，并从零到 t 积分(33.15)，得到

$$(33.17)\qquad (1-t^2)D^{m+1}v+m(m+1)D^{m-1}v = D^m[(1-t^2)Dv+2mtv]=0.$$

取 $v=(1-t^2)^m$，立刻得到(33.17)的一个解 v．这样，(33.15) 的多项式解就都有下述形式：

$$(33.18)\qquad u(t)=C\left(\frac{d}{dt}\right)^m(1-t^2)^m.$$

由分部积分即知

$$(33.19)\qquad \int_{-1}^{+1} t^h\left(\frac{d}{dt}\right)^m(1-t^2)^m dt=0 \quad 若\ h<m,$$

它蕴涵着，相应于两个不同 m 值的任两 (33.18) 形函数，在 $L^2(]-1, +1[)$ 中必为正交的．另一方面，

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{+1}\left|\left(\frac{d}{dt}\right)^m(1-t^2)^m\right|^2 dt &= \int_{-1}^{+1}(1-t^2)^m\left(\frac{d}{dt}\right)^{2m}(t^2-1)^m dt\\ &=(2m)!\int_{-1}^{+1}(1-t^2)^m dt\\ &=m!\int_{-1}^{+1}\left\{\left(\frac{d}{dt}\right)^m(1+t)^{2m}\right\}(1-t)^m dt\\ &=(m!)^2\int_{-1}^{+1}(1+t)^{2m}dt=2^{2m+1}(m!)^2/(2m+1).\end{aligned}$$

定义 33.1　多项式

$$(33.20)\qquad P_m(t)=\frac{1}{2^m m!}\left(\frac{d}{dt}\right)^m[(t^2-1)^m], \quad m=0, 1, 2, \cdots,$$

称为 Legendre 多项式.

我们已经证明了

(33.21) $$\left(m+\frac{1}{2}\right)^{1/2}\left(m'+\frac{1}{2}\right)^{1/2}\int_{-1}^{1}P_m(t)P_{m'}(t)\,dt=\delta_{m,m'}$$

($\delta_{m,m'}$ 为 Kronecker 指标).

定理 33.1 函数序列

(33.22) $$\left(m+\frac{1}{2}\right)^{1/2}P_m(t),\quad m=0,\ 1,\ \cdots,$$

在 $L^2(]-1,\ +1[)$ 中形成一个 Hilbert 基底(即,一个完备正交系).

证明 由于 (33.21),只需证明 Legendre 多项式张成 $L^2(]-1,\ +1[)$ 的一个稠线性子空间即可. 事实上, $P_0(t),\ \cdots,\ P_m(t)$ 构成次数 $\leqslant m$ 的单变量多项式线性空间的一组基. 通过关于 m 的归纳法,并利用

$$P_m(t)-2^{-m}\frac{(2m)!}{(m!)^2}t^m \text{ 是 } m-1 \text{ 次的},$$

可得到后一事实的证明. 证毕.

我们知道,(33.15) 在开区间 $|t|<1$ 中的解形成一个二维线性空间. 对于 $m=0$,我们有

(33.23) $$\frac{du}{dt}=C(1-t^2)^{-1}=\frac{C}{2}\left\{\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right\}.$$

(33.23) 的常数解都是 $P_0(t)\equiv1$ 的倍数. "其它的"解都是

(33.24) $$Q_0(t)=\frac{1}{2}\log\frac{1+t}{1-t}$$

的倍数. 容易证明,对于任何 $m=0,\ 1,\ \cdots$, (33.15) 的通解是

(33.25) $$A\{\alpha_0P_0(t)+\cdots+\alpha_{m-1}P_{m-1}(t)\}+AP_m(t)\frac{1}{2}\log\frac{1+t}{1-t}+BP_m(t),$$

其中 $\alpha_j(j=0,\ \cdots,\ m-1)$ 是一些确定的数,而 A, B 是任意常数. 对数项的出现排除了 $A\neq0$ 的解 (33.25) 出现在球面调和函数(它正是我们现在要求的)的表达式中,因为我们知道后者是 $t=\cos\theta$ 和 $\sin\theta=(1-t^2)^{1/2}$ 的多项式. 因而我们只限于讨论 Legendre 多

项式的倍数. 记住这一点,我们再来考察 $n\neq 0$ 时的方程(33.14). 作未知函数代换

$$u(t)=(1-t^2)^{n/2}v(t),$$

把(33.14)变为

(33.26) $\quad (1-t^2)v''-2(n+1)tv'+[m(m+1)-n(n+1)]v=0.$

另一方面, 如果对于 $u=h$ 的 Legendre 方程(33.15)微商 n 次, 恰好得到 $v=h^{(n)}$ 的(33.26). 由于上面的关于 Legendre 方程的考察,我们看到,取 u 等于

(33.27) $$(-1)^n(1-t^2)^{n/2}\left(\frac{d}{dt}\right)^n P_m(t),$$

或等于这个函数的任何纯量倍数, 就得到 $n=0, 1, 2, \cdots$ 时的(33.14)的解. 函数(33.27)通常称为 (第一类) 连带 *Legendre* 函数,并用 $P_m^n(t)$ 表示. 当 n 是奇数时, (33.27) 中的平方根必须理解为正的平方根(对于 $|t|<1$). 根据(33.20),我们有

(33.28) $$P_m^n(t)=\frac{(-1)^{m+n}}{2^m m!}(1-t^2)^{n/2}\left(\frac{d}{dt}\right)^{m+n}(1-t^2)^m$$

$$(m,\ n=0,\ 1,\ \cdots).$$

注意,当 $n>m$ 时 $P_m^n\equiv 0$.

下面定理的证明与定理 33.1 的证明十分相似,我们把它留给读者.

定理 33.2 对于每个固定的 $n=0, 1, \cdots$, 函数序列

(33.29) $$\left(m+\frac{1}{2}\right)^{1/2}\left[\frac{(m-n)!}{(m+n)!}\right]^{1/2}P_m^n(t),\quad m=n,\ n+1,\ \cdots,$$

在 $L^2(]-1, +1[)$ 中形成一个 Hilbert 基底.

现在回到原来的问题,即确定三个变量的调和多项式的问题. 根据(33.28),我们有

(33.30) $$P_m^n(\cos\theta)=\sum_{2k\leqslant m-n}\alpha_{m,k}^n(\sin\theta)^n(\cos\theta)^{m-n-2k}.$$

由此推得:

(33.31) $$r^m e^{in\phi}P_m^n(\cos\theta)$$
$$=\sum_{2k\leqslant m-n}\alpha_{m,k}^n(x+iy)^n z^{m-n-2k}(x^2+y^2+z^2)^k,$$

它意味着左端是变量 x, y, z 的 m 次齐次多项式. 上面已经证明它是调和的. 因为 n 只能取值 0, 1, …, m, 又因在 (33.31) 中我们显然能够用 $-\phi$ 代替 ϕ (这等价于用 $x-iy$ 代替 $x+iy$), 这样, 我们就得到 $2m+1$ 个线性无关的调和多项式, 它们是(关于 x, y, z) m 次齐次的.

令 $\mathscr{P}^d_{\text{hom},N}$ 表示 N 个变量的 $d(\geqslant 0)$ 次齐次多项式空间. 它是 $(N+d-1)!/(N-1)!\,d!$ 维的. 利用对偶性括号

$$(33.32)\qquad \langle f,\ g\rangle=\sum_{|\alpha|=d}\frac{1}{\alpha!}f^{(\alpha)}g^{(\alpha)},$$

把它等同于它的固有对偶空间, 其中 $\alpha=(\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_N)$ 是非负整数 N 数组. 用 x^j, $j=1$, …, N, 表示变量, 并令 $D_j=\partial/\partial x^j$. 那么 D_j 就是一个从 $\mathscr{P}^d_{\text{hom},N}$ 到 $\mathscr{P}^{d-1}_{\text{hom},N}$ 中的线性映射; 其转置 ${}^tD_j$ 把 $\mathscr{P}^{d-1}_{\text{hom},N}$ 映入 $\mathscr{P}^d_{\text{hom},N}$ 中. 我们有

$$\langle f,\ D_jg\rangle=\sum_{|\alpha|=d-1}\frac{1}{\alpha!}f^{(\alpha)}(D_jg)^{(\alpha)}=\sum_{|\beta|=d}\frac{1}{\beta!}(x_jf)^{(\beta)}g^{(\beta)},$$

这证明 $\partial/\partial x^j$ 的转置是乘以 x^j. 现令 $P(D)=P\ (D_1,\ \cdots,\ D_N)$ 是 D_j 的 m 次齐次多项式. 我们可以提出:

引理 33.1　线性映射

$$(33.33)\qquad P(D):\mathscr{P}^d_{\text{hom},N}\to\mathscr{P}^{d-m}_{\text{hom},N}$$

的转置是 $\mathscr{P}^{d-m}_{\text{hom},N}$ 的元素乘以 $P(x)$ 的乘法运算.

推论 33.1　映射(33.33)是映上的, 它的核的维数等于

$$(33.34)\qquad \frac{(N+d-1)!}{(N-1)!\,d!}-\frac{(N+d-m-1)!}{(N-1)!\,(d-m)!}.$$

如果将此应用于 $N=3$ 个变量的 Laplace 算子(这样, $m=2$), 就知道下述定理是对的.

定理 33.3　三个变量 x, y, z 的 $m(\geqslant 0)$ 次齐次调和多项式的线性空间的维数等于 $2m+1$. 多项式(33.31), 与它们的复共轭一起, 形成这个空间的一组线性基.

为了在开球

$$B_R=\{(x,\ y,\ z)\in\mathbf{R}^3;\ x^2+y^2+z^2<R^2\}\quad(R>0)$$

中解 Dirichlet 问题, 如何利用定理 33.3 以及早先建立的关于

Legendre 函数的一些性质, 也是很清楚的. 事实上, 由于径向齐次性, 我们可以只在 $R=1$ 的情形进行推理; 此时 B_R 是单位球 B^3, 而它的边界是单位球面 S^2. 假设任给 S^2 上的平方可积函数 (对于单位球面上的 Lebesgue 测度而言) $g(\phi, \theta)$. 自然, 我们可以把它展开为关于 ϕ 的 Fourier 级数:

$$(33.35)\quad g(\phi, \theta)=g_0(\theta)+\sum_{n=1}^{+\infty}\{g_n^+(\theta)e^{in\phi}+g_n^-(\theta)e^{-in\phi}\}.$$

应用定理 33.2, 可以把每个系数 g_0, $g_n^\pm$ 用 $\cos\theta$ 的 Legendre 函数来展开[把(33.35)中的 Fourier 系数看作 $\cos\theta$ 的函数: 记住 θ 只能从 0 变到 π, 因为 ϕ 从 0 变到 2π]. 最后得到一个 $L^2(S^2)$ 中的展开式:

$$(33.36)\quad g(\phi, \theta)=\sum_{m=0}^{+\infty} g_{m,0}P_m(\cos\theta)+\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=n}^{+\infty}\{g_{m,n}^+P_m^n(\cos\theta)e^{in\phi}+g_{m,n}^-P_m^n(\cos\theta)e^{-in\phi}\}.$$

现在在开球 B_1 中很容易构造在 S^2 上(在某种适当的意义下)取边界值 g 的调和函数 u. 用 $S_{m,n}(x, y, z)$ 表示球面调和多项式 (33.31). 于是, 解 u 为

$$(33.37)\quad u=\sum_{m=0}^{+\infty} g_{m,0}S_{m,0}+\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=n}^{+\infty}(g_{m,n}^+S_{m,n}+g_{m,n}^-\overline{S}_{m,n}),$$

其中 $\overline{S}$ 表示 S 的复共轭.

习 题

33.1 令 $r, \theta_1, \cdots, \theta_{n-1}$ 表示 $\mathbf{R}^n$ 中的球面坐标. 写出 Laplace 算子在这个坐标中的表达式.

33.2 证明, 给定任何整数 $n=0, 1, \cdots$, 若某个单变量 x 的次数 $\leqslant n$ 的多项式在 $L^2(]-1, +1[)$ 中正交于所有次数 $\leqslant n-1$ 的多项式, 则它必定是某个 Legendre 多项式的倍数. (不要用计算, 只用线性代数.)

若 $P_n(x)$ 表示 n 次 Legendre 多项式, 证明:

$$(33.38)\quad (1-2xt+t^2)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x)t^n.$$

再证明下面一些公式:

(33.39) $$2^nP_n(x)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{(w^2-1)^n}{(w-x)^{n+1}}dw$$ (Schläfli 公式),

其中 γ 是以 x 为圆心的圆周;

(33.40) $$P_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\{x+(x^2-1)^{1/2}\cos\theta\}^n d\theta$$ (Laplace 公式);

(33.41) $$(n+1)P_{n+1}-(2n+1)xP_n+nP_{n-1}=0;$$

(33.42) $$nP_n=xP'_n-P'_{n-1},\quad nP_{n-1}=P'_n-xP'_{n-1}.$$

33.3 令 $P_n(x)$ 表示 n 次 Legendre 多项式. 证明, P_n 的根(自然, 有 n 个)都是实的, 两两不等, 并且都属于区间 $-1<x<+1$.

34. 谱性质与特征函数展开式

现在回到系数 (当算子写成下述变分形式时) 是开集 $\Omega\subset\mathbf{R}_n$ 中 L^∞ 函数的二阶微分算子 $A=A(x,\partial/\partial x)$:

(34.1) $$A=-\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^j}a^{jk}(x)\frac{\partial}{\partial x^k}+\sum_{j=1}^{n}b^j(x)\frac{\partial}{\partial x^j}+c(x).$$

已经说过, 我们假定 a^{jk}, b^j $(1\leqslant j,\ k\leqslant n)$, c 属于 $L^\infty(\Omega)$. 除此之外, 还假定 A 是形式自伴随的 (formally self-adjoint):

(34.2) $$\langle Au,\ \bar{v}\rangle=\langle u,\ \overline{Av}\rangle,\quad \forall u,\ v\in H_0^1(\Omega),$$

其中 $\langle,\rangle$ 是 $H_0^1(\Omega)$ 和 $H^{-1}(\Omega)$ 之间的对偶性括号. 不难叙述使得(34.2)成立的充要条件. A 的主部

$$-\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^j}a^{jk}(x)\frac{\partial}{\partial x^k}$$

必须是(形式)自伴随的, 为此, 必须而且只须

(34.3) $$a^{jk}(x)=\overline{a^{kj}(x)}$$ 对于几乎每个 $x\in\Omega$, $1\leqslant j,\ k\leqslant n$.

A 中阶 $\leqslant 1$ 的部分也必须是自伴随的, 这蕴涵着

(34.4) $$b^j(x)=-\overline{b^j(x)}$$ 在 Ω 中几乎处处, $1\leqslant j\leqslant n$,

(34.5) $$c(x)-\overline{c(x)}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial b^j}{\partial x^j}(x)$$ 在 Ω 中几乎处处.

特别, 向量$(b^1,\ \cdots,\ b^n)$的散度必须属于 $L^\infty(\Omega)$. 条件(34.2)等价于性质: 在 $H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$ 上的、与 A 相联系的拟双线性形式

$$a(u, v) = \sum_{j, k=1}^{n} \int_{\Omega} a^{jk}(x) \frac{\partial u}{\partial x^k} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x^j} dx + \sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega} b^j(x) \frac{\partial u}{\partial x^j} \bar{v} dx + \int_{\Omega} c(x) u\bar{v} dx$$

是 *Hermite* 型的，即 $a(v, u) = \overline{a(u, v)}$.

我们还将作强椭圆性假设：

(34.6) 对于某个 $c_0 > 0$，所有的 $\zeta \in \mathbf{C}^n$ 以及几乎所有的 $x \in \Omega$，有

$$\sum_{j, k=1}^{n} a^{jk}(x) \zeta_j \bar{\zeta}_k \geqslant c_0 |\zeta|^2.$$

如通常一样，这就导致形式

$$\lambda \int_{\Omega} |u|^2 dx + a(u, u)$$

的强制性，如果实数 λ 充分大：

(34.7) 存在 $\lambda_0 \in \mathbf{R}$，使得对所有的 $\lambda \geqslant \lambda_0$ 和所有的 $u \in H_0^1(\Omega)$，

(34.8) $$\langle (\lambda I + A)u, \bar{u} \rangle \geqslant c_1 \|u\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

(34.8) 中的常数 c_1 严格大于零，并与 u 无关(但依赖于 λ).

强制性不等式(34.8)蕴涵着，对于 $\lambda > \lambda_0$，$\lambda I + A$ 确定一个从 $H_0^1(\Omega)$ 到 $H^{-1}(\Omega)$ 上的同构. 用 $G(\lambda)$ 表示它的逆同构. 在整个的这一节中，我们作假设：

(34.9) Ω 是有界的.

于是，如果 J 表示从 $H_0^1(\Omega)$ 到 $H^{-1}(\Omega)$ 中的自然内射，则由命题 25.5 (也参阅习题 25.10)，J 是紧的. 由此即得：

命题 34.1 若 $\lambda > \lambda_0$，且若 Ω 是有界的，则 $G(\lambda)J$ 是一个从 $H_0^1(\Omega)$ 到其自身中的紧算子.

这样，在假设(34.9)下，可以应用 Riesz 关于 Hilbert 空间中一个正的紧算子谱分解的经典定理. 它的证明可以在有关这个主题的任意一本教科书(例如，参阅 [TVS, D&K, 定理 48.1]) 中找到. 此类算子有离散谱，这意味着谱中的每个点是孤立的，并是此算子的一个特征值. 再者，对应于任给特征值 χ 的特征空间(用

V_χ 表示)是有限维的. 如果 χ, χ' 是两个不同的特征值, 则对应的特征空间 V_χ, $V_{\chi'}$ 是正交的. 特征值, 它们(自然)是严格的正数, 形成一个收敛于零的递减序列. 当 χ 跑遍算子的谱时, 特征空间 V_χ 的正交和在此算子的核的正交补空间中是稠的, 因而, 如果此算子是内射的, 则 V_χ 的正交和在整个 Hilbert 空间中是稠的, 正如当 $\lambda>\lambda_0$ 时 $G(\lambda)J$ 的情形一样. 这样, 在内射的情形, 在这 Hilbert 空间中可以找到由特征函数组成的完备规范正交系.

令 h 是 $H_0^1(\Omega)$ 中 $G(\lambda)J$ 的相应于特征值 χ 的特征函数; 则 χ 严格大于零. 我们有

(34.10) $$Ah=(\chi^{-1}-\lambda)h,$$

它指出了在 A 的谱与 $G(\lambda)$ 的谱之间的关系. 因为 λ 多少是任意的, 今后我们就集中研究 A 的谱 $S(A,\ \Omega)$: 它由趋于 $+\infty$ 的实数序列组成, 我们可以把它排成一个递增序列, 按特征值的重数重复计数:

(34.11) $$\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_j\leqslant\cdots.$$

我们可以把 A 的预解式(resolvent)

(34.12) $$(zI-A)^{-1}=(z-\lambda)^{-1}G(\lambda)(G(\lambda)-(z-\lambda)^{-1}I)^{-1}$$

看作 $\mathbf{C}\backslash S(A,\ \Omega)$ 中 z 的全纯函数, 取值于有界线性算子 $H^{-1}(\Omega)\to H_0^1(\Omega)$ 的空间中. 注意, 对于任何 $z\notin S(A,\ \Omega)$, 以及充分正规的 f 和 g: f 必须属于 $H^{-1}(\Omega)$, g 必须是 $H^1(\Omega)$ 的一元素 w 在 $\partial\Omega$ 上的迹(假设边界 $\partial\Omega$ 是足够正规的, 使得 w 的迹可以定义), A 的预解式使我们能够解 Dirichlet 问题:

(34.13) $$(A-zI)u=f \quad 在\ \Omega\ 中,$$

(34.14) $$u=g \quad 在\ \partial\Omega\ 上.$$

此时, (34.13)—(34.14)的解 u 由下式给出:

(34.15) $$u=w-(zI-A)^{-1}[f-(A-zI)w].$$

现假设 z 是 A 的一个特征值. 因为 A 是自伴随的(因而 z 是实的), 所以 $A-zI$ 的值域 $\mathscr{R}$ 典则同构于其核 $\mathscr{K}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中的正交补空间 $\mathscr{M}$. 我们可以把 $A-zI$ 看作从 $\mathscr{M}$ 到 $\mathscr{R}$ 上的一个同构, 它的逆不妨仍用 $(A-zI)^{-1}$ 表示. 使用这样的记号, 只要

$f-(A-zI)w\in\mathscr{R}$, 则(34.15)仍然给出(34.13)—(34.14)的一个解,但是,在(34.15)的右端加上$\mathscr{K}$的一个任意元素,我们现在可以得到解的整个仿射空间,它的维数$\geqslant 1$. 如果我们希望在这些解中用唯一的方式选择一个解,那就必须添加足够数量的条件——这是一种很熟悉的情形,它与 Fredholm 择一 (alternative) 定理是一致的。

现在考察由A的特征函数组成的 Hilbert 空间基底,即完备规格化正交系. 用一种较适合于研究A的方式重新定义$H^1(\Omega)$中的内积是方便的. 令

$$((u,\ v))=a(u,\ v)+\varkappa\int_\Omega u\bar{v}dx, \tag{34.16}$$

其中$\varkappa>\lambda_0$[参阅(34.7)]. 于是可以选择属于$H_0^1(\Omega)$的、A的特征函数序列$\{U_j\}$ $(j=1,\ 2,\ \cdots)$,使得[参阅(34.11)]:

$$AU_j=\lambda_jU_j,\quad j=1,\ 2,\ \cdots, \tag{34.17}$$

$$((U_i,\ U_j))=\delta_{i,j}\ (\text{Kronecher 指标}),\quad i,\ j=1,\ 2,\ \cdots. \tag{34.18}$$

由 Riesz 定理知道,U_j形成$H_0^1(\Omega)$的一个 Hilbert 空间基底. 注意到$\varkappa+\lambda_j>0$, 现在令

$$E_j=(\varkappa+\lambda_j)^{1/2}U_j\quad(j=1,\ 2,\ \cdots). \tag{34.19}$$

命题 34.2 假设Ω是有界的. 那么函数$E_j(j=1,\ 2,\ \cdots)$[相应地,$(\varkappa+\lambda_j)^{1/2}E_j$]在$L^2(\Omega)$中(相应地,在$H^{-1}(\Omega)$中,$H^{-1}(\Omega)$被赋予在$H_0^1(\Omega)$上由$((,))$定义的 Hilbert 空间结构的对偶结构)形成一个 Hilbert 空间基底. Ω中的一个广义函数u属于$H_0^1(\Omega)$[相应地,属于$L^2(\Omega)$;相应地,属于$H^{-1}(\Omega)$],当且仅当

$$u=\sum_{j=1}^{+\infty}u_jE_j, \tag{34.20}$$

其中右端的级数在$\mathscr{D}'(\Omega)$中收敛,并且

$$\sum_{j=1}^{+\infty}(\varkappa+\lambda_j)|u_j|^2<+\infty \tag{34.21}$$

[相应地,

$$\sum_{j=1}^{+\infty}|u_j|^2<+\infty; \tag{34.22}$$

相应地

$$(34.23)\qquad \sum_{j=1}^{+\infty}(\varkappa+\lambda_j)^{-1}|u_j|^2<+\infty].$$

证明 由于(34.16)，(34.18)和(34.19)，我们有

$$\int_\Omega E_i\overline{E}_j dx=\langle(A+\varkappa)G(\varkappa)JE_i,\ \overline{E}_j\rangle=((G(\varkappa)JE_i,\ E_j))$$

$$=(\varkappa+\lambda_i)^{-1}((E_i,\ E_j))=\left(\frac{\varkappa+\lambda_j}{\varkappa+\lambda_i}\right)^{1/2}((U_i,\ U_j))=\delta_{i,j}.$$

另一方面，

$$(E_i,\ E_j)_{H^{-1}(\Omega)}=\langle E_i,\ \overline{G(\varkappa)JE_j}\rangle=(\varkappa+\lambda_j)^{-1}\int_\Omega E_i\overline{E}_j dx,$$

由此就得到了命题的第一部分．至于后一部分，从下述引理即得：

引理 34.1 令 $\mathscr{H}$ 是 Ω 中广义函数的一个 Hilbert 空间，$\{\varepsilon_j\}$ $(j=1,\ 2,\ \cdots)$ 是 $\mathscr{H}$ 中的 Hilbert 空间基底．为要 Ω 中广义函数 u 属于 $\mathscr{H}$，充分必要的是，存在 l^2 中序列 (c_j)，使得级数 $\sum\limits_j c_j\varepsilon_j$ 在 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 中收敛于 u．此时，序列 (c_j) 是唯一的．

记住，空间 l^2 是平方可和复数序列的 Hilbert 空间．

证明 映射 $(c_j)_{j=1,2,\cdots}\mapsto\sum\limits_j c_j\varepsilon_j$ 是从 l^2 到 $\mathscr{H}$ 上的等距算子，其中的收敛性应在 $\mathscr{H}$ 的意义下理解．令 $\widetilde{\mathscr{H}}$ 表示可表为在 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 中收敛的级数 $\sum\limits_j c_j\varepsilon_j$ (其中 $(c_j)\in l^2$) 的广义函数 u 的空间．从 $\widetilde{\mathscr{H}}$ 到 $\mathscr{H}$ 上有一自然映射：对于刚才所说的每一个级数，指定在 $\mathscr{H}$ 中收敛的同一级数与其对应．因为 $\mathscr{H}$ 的拓扑细于由 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 诱导的拓扑，因而此映射必须是恒等映射． 证毕．

注 34.1 与 $\Omega=\mathbf{R}^n$ 和 $A=-\Delta$ 这一整体情形类似之处是值得着重指出的．在整体的情形中，代替特征函数展开式(34.20)，我们有 Fourier 反演公式：$\exp(-ix\cdot\xi)$ 显然是 $-\Delta$ 的一个特征函数(相应于在 $\mathbf{R}_+$ 上变动的特征值 $|\xi|^2$；自然，其差别是，谱不是离散的；还注意，特征函数不属于 H^1)．“权” $(\varkappa+\lambda_j)$ 应由 $(\varkappa+|\xi|^2)$ 代替，这里 $\varkappa$ 是任一大于零的数(通常取 $\varkappa=1$)．此时，命题 34.2 的类似命题可叙述为：$u\in H^j(\mathbf{R}^n)$ $(j=1,\ 0,\ -1)$，当且仅当

$$|\hat{u}(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^j\in L^1,$$

此即为(通过 Plancherel 公式) Sobolev 空间的定义.

注 34.2 特征函数展开式 (34.20) 使我们能够把 $H_0^1(\Omega)$, $H^0(\Omega)$ 和 $H^{-1}(\Omega)$ "嵌入"广义函数空间的一个单参数族中去, 用 $\widetilde{H}_0^s(\Omega;\ A)$ $(s\in\mathbf{R})$表示此族: Ω 中的广义函数 u 属于 $\widetilde{H}_0^s(\Omega;\ A)$, 当且仅当 u 有级数展开式(34.20), 其系数 u_j 满足

(34.24) $$\sum_{j=1}^{+\infty}(\varkappa+\lambda_j)^s|u_j|^2<+\infty.$$

特别, 对于 $|s|\leqslant 1$, 我们得到在 $H_0^1(\Omega)$ 和 $H^{-1}(\Omega)$ 之间的一族插值空间.

例 34.1 在一个空间变量(用 x 表示)的情形, 当 $A=-(d/dx)^2$ 而 Ω 是一有限区间 $a<x<b$ 时, 我们来确定特征函数 $E_j(j=1, 2, \cdots)$. 我们有

(34.25) $$-E_j''=\lambda_j E_j,$$

并且, 因为 E_j 必须属于 $H_0^1(\Omega)$, 因而有

(34.26) $$E_j(a)=E_j(b)=0.$$

(34.25) 的通解为

$$E_j=u\cos(x\sqrt{\lambda_j})+v\sin(x\sqrt{\lambda_j}),$$

而边界条件(34.26)则要求向量 $(u,\ v)\in\mathbf{R}^2$ 正交于通过原点的两条直线, 这两条直线与 u 轴的夹角分别是 $a\lambda_j^{1/2}$ 和 $b\lambda_j^{1/2}$. 因为 $u^2+v^2\neq 0$, 所以这只有在所说的两条直线是同一条线时才是可能的, 即, 若令 $L=b-a$, 则有

(34.27) $$L\lambda_j^{1/2}=j\pi,\quad j=1,\ 2,\ \cdots.$$

在我们现在的情形中, 这个条件确定了 $-(d/dx)^2$ 的特征值; 注意, 由命题 23.4, 这些特征值必定是严格正的. 它们是

(34.28) $$\lambda_j=(j\pi/L)^2,\quad j=1,\ 2,\ \cdots.$$

考虑到(34.26), 以及 E_j 必须在 $L^2(\Omega)$ 中构成一正交系这一事实, 我们立即得到

(34.29) $$E_j=\left(\frac{2}{L}\right)^{1/2}\sin\left(j\pi\,\frac{x-a}{b-a}\right),\quad j=1,\ 2,\ \cdots.$$

注意, 每个特征值的重数是 1.

例 **34.2** 我们继续考察 $A=-\Delta$, 但这次是两个独立变量(用 x 和 y 表示). 取 Ω 为开圆盘 $x^2+y^2<R^2$, $R>0$. 因而, 转换到极坐标 r, θ, 并把 $(\Delta+\lambda)h=0$ 的所要求的解展为(θ 的) Fourier 级数:

$$h(r,\theta)=h_0(r)+\sum_{m=1}^{+\infty}(h_m(r)e^{im\theta}+h_{-m}(r)e^{-im\theta}) \tag{34.30}$$

是方便的. 利用 Laplace 算子在极坐标中的表达式:

$$\Delta=\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2.$$

由于任意两个函数 $v(r)e^{im\theta}$, $w(r)e^{im'\theta}(m\neq m')$ 在 $L^2(\Omega)$ 中是正交的, 因而, 为了使(34.30)给出的 h 是 $(\Delta+\lambda)h=0$ 的解, 必要和充分的是, 每一项 $h_m(r)e^{im\theta}(m\in\mathbf{Z})$ 是其解. 因而必须研究方程

$$h_m''+\frac{1}{r}h_m'+\left(\lambda-\frac{m^2}{r^2}\right)h_m=0,\ m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots. \tag{34.31}$$

我们要求 $h\in H_0^1(\Omega)$, 因而

$$h_m(R)=0,\quad \forall m\in\mathbf{Z}. \tag{34.32}$$

注意, 我们先验地知道, 仅当 λ 是此问题的特征值时, (34.31)—(34.32)才有非平凡解, 并且, 此时只对有限多个 m 有非平凡解[否则, 满足 $(\Delta+\lambda)h=0$ 的函数 $h\in H_0^1(\Omega)$ 的空间将为无穷维的].

如果在(34.31)中令 $s=\sqrt{\lambda}r$, 并用"$'$"表示对 s 的微商, 则(34.31)被变为 m 阶 Bessel 方程

$$h''+\frac{1}{s}h'+\left(1-\frac{m^2}{s^2}\right)h=0. \tag{34.33}$$

它的在原点是正规的解的空间是一维的, 由 m 阶 Bessel 函数(现在假设 $m\geqslant0$)

$$J_m(s)=\left(\frac{s}{2}\right)^m\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{\Gamma(p+1)\Gamma(m+p+1)}\left(\frac{s}{2}\right)^{2p} \tag{34.34}$$

张成, 其中 Γ 表示 Euler γ 函数. 求表达式(34.34)的方法是简单的: 先将(34.33)的解 h 写成变量 s 的幂级数, 再由从(34.33)导出的幂级数系数之间的关系确定这些系数. 如果 m 是一负整数, 我们可以把 $J_m(s)$ 定义为 $(-1)^{-m}J_{-m}(s)$; 它显然也是(34.33)的解!

自然，问题在于我们是否还能得到

(34.35) $$J_m(\sqrt{\lambda}R)=0.$$

为了回答这个问题，我们有求于 Bessel 函数理论的经典结果（例如，可在[W]中找到）．我们同样可以假设 $m\geqslant 0$（当m不是整数时，下面所述的大多数事实也是对的，自然，我们现在只对m是整数这个情形感兴趣）．

(34.36) 对于任何 $m\geqslant 0$，$J_m(s)$只有实零点．

(34.37) 令 $z_{m,j}(j=1, 2, \cdots)$表示 J_m 的按递增次序排列的正零点．则（Bessel 函数零点的排列）

$$0<z_{m,1}<z_{m+1,1}<z_{m,2}<z_{m+1,2}<\cdots.$$

性质(34.37)使我们得以了解一下 J_0 的零点分布：

(34.38) J_0 有无穷个正零点；它们位于区间集 $\left\{\left[\left(k+\frac{3}{4}\right)\pi, \left(k+\frac{7}{8}\right)\pi\right], k=0, 1, \cdots\right\}$之中．

最后，要着重指出[蕴涵于(34.37)中的]：任两函数 $J_m(m=0, 1, \cdots)$，除了原点之外（当 J_0 不是它们两者之一时）没有公共零点．

顾及所有这一切，我们得到特征值的一个（二重）序列：

(34.39) $$\lambda=(z_{m,j}/R)^2, \quad m=0, 1, \cdots, \quad j=1, 2, \cdots,$$

并且，相应于它们中的每一个的特征空间是二维的——由 $J_m(z_{m,j}r/R)e^{im\theta}$ 和 $J_m(z_{m,j}r/R)e^{-im\theta}$ 张成[除去 $m=0$ 这一例外，在此情形，特征空间是一维的，由 $J_0(z_{0,j}r/R)$ 张成]．

习　　题

34.1 这个习题涉及最小特征值的含义．令 $V\subsetneq H$ 是两个复 Hilbert 空间，并假设 V 在 H 中稠，它到 H 中的内射映射是紧的．复合从 V 到 H 中的内射和从 H 到 V 的反对偶 $\overline{V}'$（把 H 等同于 H 的固有反对偶）中的内射，我们得到一个从 V 到 $\overline{V}'$ 中的内射 J．证明，这使我们能够引进从 V 到 $\overline{V}'$ 中的正的连续线性映射，且如 A 是一从 V 到 $\overline{V}'$ 上的正的同构，则可以定义它的平方根 $A^{1/2}$．证明，$A^{1/2}$ 是从 V 到 H 上的一个同构．令 $a(u, v)=(A^{1/2}u,$

$A^{1/2}v)_H$. 证明, A 的最小特征值等于使

(34.40) $$c\|u\|_H^2\leqslant a(u, u),\quad \forall u\in V$$

成立的最大数 $c>0$.

34.2　把习题 34.1 中的抽象描述应用到 $V=H_0^1(\Omega)$, $H=L^2(\Omega)$ [因而 $V'=H^{-1}(\Omega)$]的情形, 其中 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个开子集, 由下式定义:

(34.41) $$-\infty<a_j<x_j<b_j<+\infty,\quad j=1, \cdots, n$$

取 A 是负 Laplace 算子, $-\Delta$, 计算它的最小特征值.

34.3　令 $J_m(z)(m\in\mathbf{Z})$ 是在(34.34)中定义的 m 阶 Bessel 函数. 证明,

(34.42) $$e^{iz\sin\theta}=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}J_m(z)e^{im\theta}.$$

由此推导,对于所有实的 x, 有

(34.43) $$|J_m(x)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\quad \text{如果 } m\neq 0,\quad |J_0(x)|\leqslant 1;$$

证明下述几个公式:

(34.44) $$J_m(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos(m\theta-z\sin\theta)d\theta\quad(\text{Bessel 公式});$$

(34.45) $$J_m(z)=\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)^{-1}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\left(\frac{z}{2}\right)^m\int_{-1}^{+1}e^{izt}(1-t^2)^{m-1/2}dt;$$

(34.46) $$J_{m-1}+J_{m+1}=\frac{2m}{z}J_m,\quad J_{m-1}-J_{m+1}=2J'_m;$$

(34.47) $$J_m(y+z)=\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}J_\nu(y)J_{m-\nu}(z).$$

解释 (34.47) 和有关卷积的 Fourier 级数(在 $\mathbf{Z}$ 中或在环面 $\mathbf{T}$ 上)的性质之间的关系.

34.4　对于不是小于零的整数的任一复数 m, 特别, 当 $m=p+\frac{1}{2}$ (p 是一整数)时, 公式(34.34)常被用来定义 Bessel 函数 $J_m(s)$. 令 $u(x)\in L^1(\mathbf{R}^n)$ 是旋转不变的; 当 $|x|=r$ 时, 令 $u^\#(r)=u(x)$. 证明, u 的 Fourier 变换也是旋转不变的, 且若 $\rho=|\xi|$, 则它等于

(34.48) $$\hat{u}(\xi)=\rho^{1-n/2}\int_0^{+\infty}u^\#(r)J_{n/2-1}(r\rho)r^{n/2}dr.$$

34.5　证明, Laplace 算子 Δ 在 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 上可看作一个无界自伴算子(这里用 $-A$ 表示), 具有定义域 $H^2(\mathbf{R}^n)$. 证明, A 的谱恰好等于 $\mathbf{R}_+$, 但是不存在 A 的属于 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 的特征函数, 因而不存在 A 的特征值. 证明, 任给数 $\lambda\geqslant 0$, 存在函数 $f_\lambda\in L^\infty(\mathbf{R}^n)\cap C^\infty(\mathbf{R}^n)$, 使得 $-\Delta f_\lambda=\lambda f_\lambda$ (f_λ 不恒为零).

34.6　令 λ 是任一 $\geqslant 0$ 的数. 令 Δ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的 Laplace 算子. 证明, 所

有满足齐次方程

(34.49) $$(\Delta+\lambda)u=0 \quad 在 \mathbf{R}^2 中$$

的缓增广义函数 u 由级数展开式

(34.50) $$u(z)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m J_m(\sqrt{\lambda}\, r)e^{im\theta} \quad (z=re^{i\theta})$$

给出，其中 $\{c_m\}_{m\in\mathbf{Z}}$ 是一个在无穷远处缓增的复数序列〔即存在 $C>0$，使得对任何 $m\in\mathbf{Z}$，有 $|c_m|\leqslant C(1+|m|)^C$〕. 证明，(34.50)右端的级数在 $C^\infty(\mathbf{R}^2)$ 中收敛(J_m 表示 m 阶 Bessel 函数).

34.7 如何把下述两个事实协调起来：(1) 给定 $\mathbf{R}^n$ 的一个有界开子集 Ω，对于某个适当的 $\lambda>0$，齐次方程 $(\Delta+\lambda)h=0$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中有非平凡解；(2) 任何常系数线性偏微分方程都没有异于零的具有紧支集的广义函数解(可由 Fourier 变换，应用 Paley-Wiener 定理来建立后一论断).

35. Dirichlet 问题的近似解. 有限差分法

保角映射和特征函数展开给我们提供了逼近 Dirichlet 问题

(35.1) $$(\lambda-\Delta)u=f \quad (在 \mathbf{R}^n 的一个开子集 \Omega 中),$$

(35.2) $$u=g \quad 在 \partial\Omega\ (\Omega 的边界)上$$

的解的途径. 不幸，它们显然只适用于 Ω 是高度"对称"图形的情形：保角映射的方法假定我们本质上是处于二维的情形，而球面调和函数、圆柱调和函数、椭球调和函数等的应用，只有当 Ω 分别具有球对称性、圆柱对称性、椭球对称性等的时候才有可能. 实际上，这些都是过强的限制. 相当早的时候(在本世纪初)，物理学家和工程师们首先想出逼近(35.1)—(35.2)的解的一个既简单又实用的方法. 这方法与 § 31 所述离散调和函数的概念密切相关. 通常称它为*有限差分法*. 这个方法的一个突出优点是它特别宜于用计算机来处理. 近来流行的另一方法是 *Galerkin 法*；它与特征函数展开有某种类似性，但有更大的适应性. 有限差分法和 Galerkin 法两者都基于用有限维空间中的线性方程去逼近方程(35.1). 我们解前者，并证明当有限维空间适当地"扩大"时，前者的解收敛于(35.1)的解. 这里，我们将从最常采用的变分的观点给出这两方

法的一个极简短的描述.

我们考察一个一般的框架，它足以包含有限差分法和 Galerkin 法. 我们将考虑一个可分的(separable) Hilbert 空间 V，即一个有可数稠子集，或有可数规格化正交完备系的 Hilbert 空间. 在我们的应用中，V 将是 $H_0^1(\Omega)$，可分性假设无疑是满足的——在实际中，它总是被满足的[通常，V 是 $H^m(\Omega)$ 的一个闭子空间].

现在我们来描述 Hilbert 空间 V 的外(external)逼近. 乍看起来，这个概念似乎有点太抽象，但我们希望，下面的例子将会帮助我们理解需要抽象的原因. 我们研究带有参数 h 作为脚标的空间和映射；h 跑遍一个序列(或者，有时跑遍具有可数基的一个网格，就像实直线上的一个区间一样)，假设这个序列是收敛的；关于 h 的极限总理解为当 h 趋于那个序列的极限. 首先，引进从 V 到另一 Hilbert 空间 F 中的单一同态(monomorphism) J，即，一个连续线性内射，其值域是闭的，但不一定是全部 F (由闭图像定理，这蕴涵着 J 是一个映入同胚). 对于每个 h，引入 Hilbert 空间 V_h，和一对连续线性映射：

(35.3) $$r_h: V \to V_h, \quad p_h: V_h \to F,$$

在我们的应用中，V_h 是有限维的[通常，r_h 称为限制 (restriction) 映射，p_h 称为拓展(prolongation)映射或扩张(extension)映射].

定义 35.1 系统(V_h, p_h, r_h, F, J) 称为 V 的一个收敛的外逼近，如果下面两个条件成立：

(35.4) 对于任意的 $u \in V$，$p_h r_h u$ 在 F 中收敛于 Ju(关于 F 的范数).

(35.5) 假设，对每个 h，给定 V_h 的一元素 v_h，使得 $p_h v_h$ 在 F 中弱收敛于某个 v；则必定有 $v = Ju$，$u \in V$.

此外，这逼近称为是稳定的，如果映射 r_h 和 p_h 的范数是与 h 无关地有界的.

例 35.1 令 $V=F$，并令 J 是 V 中的恒等映射. 令 h 在序列 1,

$1/2, \cdots, 1/k, \cdots$ 上变动, 并令 $\{V_h\}$ 是 V 的有限维子空间的一个增序列, 它们的并集在 V 中稠密(注意, V 是可分的). 例如, 可以给出 V 的一个完备规格化正交系 $\{e_1, \cdots, e_k, \cdots\}$, 并令 V_h 是由 $e_1, \cdots, e_k$ $(k=1/h)$ 张成的子空间. 然后, 不妨把 p_h 取为从 V_h 到 V 中的自然内射, 把 r_h 取为从 V 到 V_h 上的正交投影. 这样得到的逼近是收敛的和稳定的; 称它为 V 的 *Galerkin* 逼近, 简记为 $\{V_h\}$.

暂时, 我们回到 §§ 22, 23 和 § 26, 并记住, 在关于 Ω, $\partial\Omega$ 和边界数据 g 的适当的假设下, 可以把问题 (35.1)—(35.2) 化为 $g=0$ 的相同问题. 现在必须假设 $f\in H^{-1}(\Omega)$, 而变分方法即为: 寻找 $u\in H_0^1(\Omega)$, 对于所有的 $v\in H_0^1(\Omega)$, 它满足方程

$$a(u, v)=\langle f, \bar{v}\rangle, \tag{35.6}$$

其中 $\langle,\rangle$ 是 $H_0^1(\Omega)$ 与 $H^{-1}(\Omega)$ 之间的对偶性括号, 而

$$a(u, v)=\lambda\int_\Omega u\bar{v}dx+\sum_{j=1}^n\int_\Omega\frac{\partial u}{\partial x^j}\frac{\partial\bar{v}}{\partial x^j}dx. \tag{35.7}$$

(我们始终假设 $\lambda\geqslant 0$; 当 Ω 无界时, 假设 $\lambda>0$.)

在抽象的情形中, 假设我们有一个 $V\times V$ 上的连续的、强制的(定义 23.1) 拟双线性形式 $a(u, v)$, 以及 V 上的一个连续反线性形式 ϕ; 我们要逼近方程

$$a(u, v)=\phi(v) \quad 对所有的\ v\in V \tag{35.8}$$

的属于 V 的解 u (引理 23.1). [在考虑实值的函数和广义函数, 因而考虑实 Hilbert 空间 V, H 和 V' 时, 形式 a 假设是双线性的, 形式 ϕ 假设是线性的. 注意, 我们不假设形式 a 是 Hermite 型的, 或者, 在实的情形不假设 a 是对称的——不象在特殊情形 (35.7) 中那样.]

考虑定义 35.1 中的 V 的一个外逼近 (V_h, p_h, r_h, F, J), 并假设对每个 h, 给定了 $V_h\times V_h$ 上的一个连续拟双线性形式 a_h 和 V_h 上的一个连续反线性泛函 ϕ_h, 它们服从下面的条件:

(35.9) 存在一个不依赖于 h 的常数 $c_0>0$, 使得

$$|a_h(u_h, u_h)|\geqslant c_0\|u_h\|_{V_h}^2, \quad \forall u_h\in V_h;$$

(35.10) 存在一个不依赖于 h 的常数 $C>0$, 使得

$$\|\phi_h\|_{V_h'}\leqslant C.$$

自然, 必须设法使数据 a_h, ϕ_h 和 a, ϕ 发生关系. 为此, 要求在适当的意义下 a_h 收敛于 a 以及 ϕ_h 收敛于 ϕ, 更明确些, 所谓适当的意义即为下述相容性条件:

(35.11) 对所有 $v, w\in V$, 如果序列 $p_hv_h(v_h\in V_h)$ 在 F 中弱收敛于 Jv, 则:

(35.12) $\lim\limits_h a_h(v_h, r_hw)=a(v, w)$, $\lim\limits_h a_h(r_hw, v_h)=a(w, v)$;

(35.13) $$\lim_h \phi_h(v_h)=\phi(v).$$

很清楚, 如果对每个 h, a_h 是 Hermite 型的, 则 (35.12) 的两个条件之一是多余的.

例 35.2 令 $\{V_h\}$ 是 V 的 Galerkin 逼近 (例 35.1). 如把 a_h 取为 a 在 $V_h\times V_h$ 上的限制, 把 ϕ_h 取为 ϕ 在 V_h 上的限制, 则立即看到, 条件 (35.9) 到 (35.11) 是满足的.

由于 Lax-Milgram 引理 (引理 23.1), 对于每个 h, 方程

$(35.14)_h$ $$a_h(u_h, v_h)=\phi_h(v_h),\quad \forall v_h\in V_h$$

在 V_h 中有唯一解 u_h. 我们可以叙述并且证明:

定理 35.1 令 (V_h, p_h, r_h, F, J) 是 Hilbert 空间 V 的一个收敛的和稳定的外逼近. 令 $a(u, v)$ 是 $V\times V$ 上一个连续的强制拟双线性形式, ϕ 是 V 上一个连续的反线性形式. 对于每个 h, 令 a_h 是 $V_h\times V_h$ 上的一个连续的强制拟双线性形式, ϕ_h 是 V_h 上一个连续的反线性形式, 使得 (35.9), (35.10) 和 (35.11) 成立.

如果 $u\in V$ 表示 (35.8) 的唯一解, 且对于每个 h, $u_h\in V_h$ 表示 $(35.14)_h$ 的唯一解, 则 p_hu_h 在 F 中 (依范数) 收敛于 Ju.

证明 利用 $v_h=u_h$ 时的 $(35.14)_h$, 并利用 (35.9) 和 (35.10), 立刻得到

(35.15) $$\|u_h\|_{V_h}\leqslant C/c_0.$$

如果 $\sup_h\|p_h\|=M<+\infty$ (因为逼近是稳定的, 定义 35.1), 则有

(35.16) $$\|p_hu_h\|_F\leqslant MC/c_0.$$

由 (35.5), 可以选出一个子序列 $\{p_{h'}, u_{h'}\}$, 它在 F 中弱收敛于形

如 $Ju_1(u_1\in V)$ 的某个元素.

任意固定 $v\in V$, 现在用 $v_h=r_hv$ 时的$(35.14)_h$. 应用(35.4), 即看到序列 $\{v_h\}$ 具有在(35.11)中所考虑的形式. 从(35.13)推得 $\phi_h(v_h)$ 收敛于 $\phi(v)$. 另一方面, 当 $h=h'$ 属于上述弱收敛子序列 $p_{h'}$, $u_{h'}$ 的足标集合时令 $\tilde{u}_h=u_{h'}$, 否则令 $\tilde{u}_h=r_hu_1$, 则我们看到, $p_h\tilde{u}_h$ 在 F 中弱收敛于 Ju_1, 因而, 由(35.12), $a_h(u_h, v_h)$ 收敛于 $a(u_1, v)$. 但是, $a_{h'}(u_{h'}, v_{h'})=\phi_{h'}(v_{h'})\to\phi(v)$, 因而 u_1 满足(35.8), 这就要求 $u_1=u$. 这证明了

(35.17) $\{p_hu_h\}$ 在 F 中弱收敛于 Ju.

我们再来考虑

$$T=a_h(u_h-r_hu,\ u_h-r_hu)$$
$$=a_h(u_h,\ u_h)+a_h(r_hu,\ r_hu)-a_h(u_h,\ r_hu)-a_h(r_hu,\ u_h).$$

由(35.9), 我们有

(35.18) $$\|u_h-r_hu\|_{V_h}^2\leqslant c_0^{-1}T.$$

如果应用(35.12)[取 $v_h=r_hu$, 并记住(35.4)], 则有

$a_h(r_hu,\ r_hu)$, $a_h(u_h,\ r_hu)$, $a_h(r_hu,\ u_h)$ 收敛于 $a(u,\ u)$.

另一方面, 由(35.13),

$a_h(u_h,\ u_h)=\phi_h(u_h)$ 收敛于 $\phi(u)=a(u,\ u)$.

把这些论断结合起来, 即得 T 收敛于零, 因而

(35.19) $$\lim_h\|u_h-r_hu\|_{V_h}=0.$$

利用 p_h 的范数与 h 无关地有界这一事实, 以及(35.4), 我们得到 p_hu_h 在 F 中依范数收敛于 Ju. 证毕.

性质(35.19)有时可叙述为 u_h 离散地收敛于 u(由此产生了离散收敛性的概念).

考察一下定理35.1的证明即导致一个误差估计. 事实上, 有种种误差的概念:

(1) u 和 u_h 间的误差 $\|Ju-p_hu_h\|_F$(这样, 此误差依赖于 J 的选择);

(2) u 和 u_h 间的离散误差 $\|u_h-r_hu\|_{V_h}$;

(3) u 的截断误差 $\|Ju-p_hr_hu\|_F$.

我们也许能够有效地影响 (3) 的大小，因为它只依赖于逼近 (V_h, p_h, r_h, F, J) 的选择，而不依赖于拟双线性形式 $a(u, v)$. 我们将用截断误差(3)来确定 u 和 u_h 间的误差(1)的一个上界. 首先，确定离散误差(2)的一个上界，用 a 到 $F\times F$ 上的一个"延拓" α，也就是用

(35.20) $F\times F$ 上的一个连续的拟双线性形式 α，它使得 $\alpha(Jv, Jw)=a(v, w)$ 对所有的 $v, w\in V$

来表示. 令 u 是 (35.8) 的解. 我们定义下述 F 上的连续线性泛函：

(35.21) $$\Phi(g)=\alpha(Ju, g),\quad g\in F.$$

可以验证，对所有的 $v\in V$, $\Phi(v)=\phi(Jv)$.

注 35.1 注意到 $F=(JV)\oplus(JV)^{\perp}$[$(JV)^{\perp}$ 是 JV 在 F 中的正交补空间]，我们看到，α 这样的形式总是存在的：我们可以取 α 为 a 的唯一的延拓，对于所有的 $f\in F$, $g\in(JV)^{\perp}$，使得 $\alpha(f, g)=0$. 但是别的延拓也许更适合于所研究的问题，如下面所示：

例 35.3 令 $V=H^1(\Omega)$ [或者 $H_0^1(\Omega)$]，并取 $F=(L^2(\Omega))^{n+1}$,

(35.22) $$J: v\mapsto\left(v, \frac{\partial v}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial v}{\partial x^n}\right).$$

我们知道，J 是从 V 到 F 中的一个等距映射. 形式 (35.7) 的延拓是明显的：

(35.23) $$\alpha(f, g)=\int_\Omega\left(\lambda f_0\bar{g}_0+\sum_{j=1}^n f_j\bar{g}_j\right)dx,\quad f, g\in(L^2(\Omega))^{n+1}.$$

注意，(35.23) 无疑异于注 35.1 中所述的延拓. 事实上，当 J 不是映上的时候，后者决不是强制的；然而，(35.23) 显然是强制的(当 $\lambda>0$ 时)，虽然 J 肯定不是映上的.

现在引进下述两个量：

(35.24) $$\varepsilon_h(\phi)=\|{}^tp_h\Phi-\phi_h\|_{V_h'},$$

(35.25) $$\eta_h(u)=\sup_{0\neq v_h\in V_h}|\alpha(Ju, p_hv_h)-a_h(r_hu, v_h)|/\|v_h\|_{V_h}.$$

与(35.24)有关，注意 p_h 是一连续线性映射 $V_h \to F$，因而 ${}^t p_h$ 是一连续线性映射 $F' \to V'_h$.

定理 35.2 用定理 35.1 中的相同假设和相同记号. 我们有

(35.26) $$\|u_h - r_h u\|_{V_h} \leqslant c_0^{-1}[\varepsilon_h(\phi) + \eta_h(u)],$$

其中 c_0 是(35.9)中的正的强制性常数.

证明 只需再考察定理 35.1 证明的末尾引进的量 T，并把它重写为

$$\begin{aligned} T &= a_h(u_h, u_h - r_h u) - a_h(r_h u, u_h - r_h u) \\ &= \phi_h(u_h - r_h u) - a(Ju, p_h(u_h - r_h u)) \\ &\quad + a(Ju, p_h(u_h - r_h u)) - a_h(r_h u, u_h - r_h u) \\ &= \phi_h(u_h - r_h u) - \Phi(u_h - r_h u) \\ &\quad + a(Ju, p_h(u_h - r_h u)) - a_h(r_h u, u_h - r_h u), \end{aligned}$$

因而，

(35.27) $$|T| \leqslant [\varepsilon_h(\phi) + \eta_h(u)] \cdot \|u_h - r_h u\|_{V_h}.$$

组合(35.18)和(35.27)，我们就得到(35.26). 证毕.

推论 35.1 用定理 35.2 中的相同假设. 令 M 是扩张算子 p_h 的范数的一个上界. 则

(35.28) $$\|Ju - p_h u_h\|_F \leqslant \|Ju - p_h r_h u\|_F + \frac{M}{c_0}[\varepsilon_h(\phi) + \eta_h(u)].$$

有限差分法

在本节的这一部分，我们应用第一部分的一般考察，并描述用有限差分法得到的 Dirichlet 问题的解的逼近. 我们自始至终假设开集 Ω 是有界的. 我们考虑对角元素 $h_1, \cdots, h_n$ 严格大于零(并收敛于零)的对角矩阵 h. 当 $x \in \mathbf{R}^n$ 时，hx 表示向量 $(h_1 x^1, \cdots, h_n x^n)$；$h\mathbf{Z}^n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中具有整数坐标 (>0 或 $\leqslant 0$) 的点的格 $\mathbf{Z}^n$ 在映射 $x \mapsto hx$ 下的像. 下文中，矩阵 h 将是我们的参数(如在第一部分中所表示的那样)，它将跑遍一个收敛于零矩阵的(严格正的)对

角矩阵的序列. 我们不详细说明这个序列, 只把它简单地记为 $\mathfrak{h}$ (自然, 在实际计算中我们必须对序列 $\mathfrak{h}$ 作出选择).

给定 $x_0\in\mathbf{R}^n$ 和 $h\in\mathfrak{h}$, 记

(35.29)　$$\sigma_h(x_0)=\prod_{j=1}^{n}\left[x_0^j-\frac{1}{2}h_j,\ x_0^j+\frac{1}{2}h_j\right[;$$

(35.30)　当 r 是一非负整数时,

$$\sigma_h(x_0,\ r)=\bigcup_{\substack{\alpha\in\mathbf{Z}^n\\|\alpha|\leqslant r}}\sigma_h\left(x_0+\frac{1}{2}h\alpha\right).$$

集合 $\sigma_h(x_0,\ r)$ 在平面(即当 $n=2$ 时)中的三个例子可以在图 35.1 中找到[1)].

用 w_{h,x_0} 表示集合 $\sigma_h(x_0)$ 的特征函数, 并用 $\delta_{h,j}(j=1,\ \cdots,\ n)$ 表示有限差分算子

(35.31)　$$\delta_{h,j}F(x)=\frac{1}{h_j}\left[F\left(x+\frac{1}{2}h_j\mathbf{e}_j\right)-F\left(x-\frac{1}{2}h_j\mathbf{e}_j\right)\right],$$

其中 $\mathbf{e}_j$ 表示沿着 x^j 轴的单位向量.

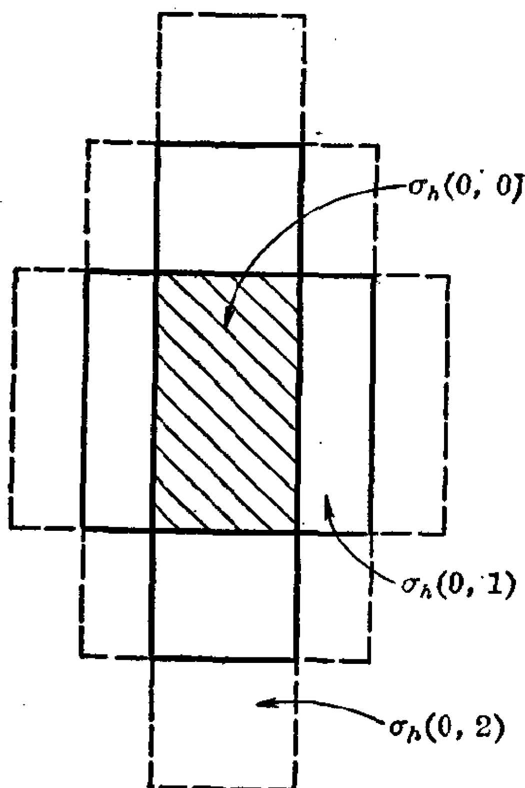


图　35.1

回到开集 Ω 的情形, 我们将用记号

(35.32)　$$\mathring{\Omega}_h^r=\{x\in h\mathbf{Z}^n;\ \sigma_h(x,\ r)\subset\Omega\}.$$

在考虑二阶椭圆算子时, 我们只对于 $r=0, 1$ 利用这些集合 $\mathring{\Omega}_h^r$. 如果所研究的算子的阶是 $2m$, 通常我们将用同样的集合, 但是这时 $r=0,\ \cdots,\ m$.

现在我们来描述将要用到的外逼近(或差分格式). 我们已经说过, $V=H_0^1(\Omega)$. 我们取 $F=(L^2(\Omega))^{n+1}$, 取 J 为等距

1) 译者注: 本书中并没有引进 $|\alpha|$ $(\alpha\in\mathbf{Z}^n)$ 的定义. 按照图 35.1, 对于 $\alpha=(\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n)\in\mathbf{Z}^n$, 应把 $|\alpha|$ 理解为 $|\alpha|=|\alpha_1|+\cdots+|\alpha_n|$.

内射(35.22). 对于每个 $h\in\mathfrak{h}$, 空间 V_h 将是 y 跑遍集合 (35.32) (其中 $r=1$)时特征函数 $w_{h,y}$ 的线性生成, 即, V_h 将是阶梯函数

(35.33) $$v_h(x)=\sum_{y\in\mathring{\Omega}_h^1} v_h(y)w_{h,y}(x)$$

的空间. 此记号是合适的, 因为对 $\mathring{\Omega}_h^1$ 中任意两个不同的元素 y, y', 有 $w_{h,y}w_{h,y'}\equiv 0$. 注意, V_h 的维数恰好等于这种元素的个数.

我们赋予 V_h 以内积

(35.34) $$(v_h,\ w_h)_{h,1}=\int\left\{v_h\bar{w}_h+\sum_{j=1}^{n}(\delta_{h,j}v_h)(\delta_{h,j}\bar{w}_h)\right\}dx,$$
$$v_h,\ w_h\in V_h.$$

扩张算子 p_h 将是映射

(35.35) $$v_h\mapsto(v_h,\ \delta_{h,1}v_h,\ \cdots,\ \delta_{h,n}v_h),$$

显然, 它是从 V_h 到 F 中的一个等距映射.

至于限制算子 $r_h:V\to V_h$, 它把每个 $v\in H_0^1(\Omega)$ 对应于由

(35.36) $$v_h(y)=|\sigma_h(y)|^{-1}\int_{\sigma_h(y)}v(x)dx,\quad y\in\mathring{\Omega}_h^1$$

定义的阶梯函数(35.33), 其中

(35.37) $$|\sigma_h(y)|=\sigma_h(y)\text{的体积}=h_1\cdots h_n.$$

我们现在来证明, 在关于开集 Ω 和序列 $\mathfrak{h}$ 的某个限制条件下, 上述的差分格式是稳定的和收敛的(定义 35.1).

定义 35.2 令 $\mathfrak{h}$ 是一列收敛于零的严格正的对角矩阵. 我们说开集 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 是 $\mathfrak{h}$ 正规的, 如果存在 $\mathbf{R}^n$ 中的有限个向量 $\theta_1,\ \cdots,\ \theta_p$ 和一个不依赖于 $j=1,\ \cdots,\ n$ 和 $h\in\mathfrak{h}$ 的常数 $C>0$, 使得

(35.38) 任给点 $y\in\mathring{\Omega}_h^1$(使得 $y+h_j\mathbf{e}_j$ 或者 $y-h_j\mathbf{e}_j$ 不属于 $\mathring{\Omega}_h^1$), 对于每个 $z\in\sigma_h(y)$, 存在 ρ, $0<\rho<C$, 使得对某个 q, $1\leqslant q\leqslant p$, 有 $z+\rho h_j\theta_q\notin\Omega$.

定理 35.3 令 $\mathfrak{h}$ 是一列收敛于零的严格正的对角矩阵, Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的一有界开子集.

如果 Ω 是 $\mathfrak{h}$ 正规的, 则上面描述的 $V=H_0^1(\Omega)$ 的外逼近 $(V_h,\ p_h,\ r_h,\ F,\ J)$ 是稳定的和收敛的.

证明 因为映射 p_h 是等距的, 因此为了证明逼近是稳定的, 只需

证明对于某个不依赖于 h 和 $v\in V$ 的常数，有

(35.39)　　$$\|r_h v\|_{V_h}\leqslant 常数\|v\|_V.$$

自然，只需对于 V 的一稠子集中的 v 证明(35.39)即可；我们将取 $v\in C_c^\infty(\Omega)$.

首先，若注意到集合 $\sigma_h(y)$ $(y\in h\mathbf{Z}^n)$ 是互不相交的，我们有

$$\begin{aligned}\int_\Omega |v_h(x)|^2dx&=\sum|v_h(y)|^2|\sigma_h(y)|\\&=(h_1\cdots h_n)^{-1}\sum\left|\int_{\sigma_h(y)}v(x)dx\right|^2\\&\leqslant\sum\int_{\sigma_h(y)}|v(z)|^2dz\quad(由 Cauchy\text{-}Schwarz 不等式)\\&\leqslant\int_\Omega|v(x)|^2dx,\end{aligned}$$

其中所有求和号都是关于 $y\in\mathring{\Omega}_h^1$ 求的[参阅(35.32)]. 这样，我们有

(35.40)　　$$\|v_h\|_{L^2(\Omega)}\leqslant\|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

为了证明差分格式 (V_h, p_h, r_h, F, J) 是稳定的，必须用 v 的 H^1 范数估计 $\delta_{h,j}v_h$ 的 L^2 范数. 固定 j, $1\leqslant j\leqslant n$, 对任意点 x, 记

$$x^+=x+\frac{1}{2}h_j\mathbf{e}_j,\ x^-=x-\frac{1}{2}h_j\mathbf{e}_j.$$

我们有

$$\begin{aligned}v_h(x^+)&=\sum_y v_h(y)w_{h,y}(x^+)\\&=\sum_{y^-}|\sigma_h(y^-)|^{-1}\int_{\sigma_h(y^-)}v(z^+)dz\,w_{h,y^-}(x),\end{aligned}$$

即

(35.41)　　$$v_h(x^+)=(h_1\cdots h_n)^{-1}\sum_{y^-}w_{h,y^-}(x)\int_{\sigma_h(y^-)}v(z^+)dz,$$

其中求和号是关于 $\mathring{\Omega}_h^1$ 在平移 $y\to y^-$ 下的像上进行的. 类似地，

(35.42)　　$$v_h(x^-)=(h_1\cdots h_n)^{-1}\sum_{y^+}w_{h,y^+}(x)\int_{\sigma_h(y^+)}v(z^-)dz.$$

从 $\mathring{\Omega}_h^1$ 的定义即得，只要 y 属于 $\mathring{\Omega}_h^1$, 则 y^+ 和 y^- 属于 Ω. 还注意，如果 $y'=y-h_j\mathbf{e}_j$, 则 $y'^+=y^-$. 如果在 $\mathring{\Omega}_h^1$ 中存在两点 y, y', 使得 $y'^+=y^-$, 则用 y^0 表示后面一个点. 否则，记作 y^*; 这样，当

(35.43)　　$y+h_j\mathbf{e}_j$ (相应地，$y-h_j\mathbf{e}_j$) 不属于 $\mathring{\Omega}_h^1$

时，有 $y^*=y^+$（相应地，y^-）．从(35.41)—(35.42)推得：

(35.44)
$$(h_1\cdots h_n)[v_h(x^+)-v_h(x^-)]$$
$$=\sum_{y^0}w_{h,y^0}(x)\int_{\sigma_h(y^0)}[v(z^+)-v(z^-)]dz$$
$$+\sum_{y^*}\pm w_{h,y^*}(x)\int_{\sigma_h(y^*)}v(z^\pm)dz.$$

我们有[参看(35.40)的证明]

(35.45)
$$\int_\Omega|v_h(x^+)-v_h(x^-)|^2dx$$
$$\leqslant\sum_{y^0}\int_{\sigma_h(y^0)}|v(z^+)-v(z^-)|^2dz+\sum_{y^*}\int_{\sigma_h(y^*)}|v(z^\pm)|^2dz.$$

在相应于点 y^0 的诸项中，我们利用

(35.46)
$$|v(z^+)-v(z^-)|^2\leqslant h_j^2\int_{-1/2}^{+1/2}\left|\frac{\partial v}{\partial x^j}(z+th_j\mathbf{e}_j)\right|^2dt$$

这一事实．至于相应于点 y^* 的那些项，我们看到，如果对于某个 $y\in\mathring{\Omega}_h^1$ 有 $y^*=y^+$，则(35.45)中的相应项即为

(35.47)
$$\int_{\sigma_h(y^+)}|v(z^-)|^2dz=\int_{\sigma_h(y)}|v(z)|^2dz.$$

这里用了 Ω 的 $\mathfrak{h}$ 正规性（定义 35.2）以及 y 的性质 (35.43)．对于每个 $z\in\sigma_h(y)$，可以选择 $\rho=\rho(z)$，$0<\rho(z)<C$，使得对某个 q，$1\leqslant q\leqslant p$，有 $z+\rho h_j\theta_q\notin\Omega$．因为 $v\in C_c^\infty(\Omega)$，我们有

(35.48)
$$|v(z)|^2=|v(z+\rho h_j\theta_q)-v(z)|^2$$
$$\leqslant\rho h_j^2\int_0^\rho|\langle\theta_q,\ \operatorname{grad}v\rangle(z+th_j\theta_q)|^2dt$$
$$\leqslant CC_1^2h_j^2\int_0^C\sum_{q=1}^p|\operatorname{grad}v(z+th_j\theta_q)|^2dt,$$

其中 $C_1=\sup_q|\theta_q|$．因为集合 $\sigma_h(y)$ 和 $\sigma_h(y^0)$ 都包含在 Ω 中[由(35.32)]，从(35.45)，(35.46)和(35.48)就推得

$$h_j^{-2}\int_\Omega|v_h(x^+)-v_h(x^-)|^2dx$$
$$\leqslant\int_{-1/2}^{+1/2}\int_\Omega\left|\frac{\partial v}{\partial x^j}(z+th_j\mathbf{e}_j)\right|^2dzdt$$
$$+CC_1^2\sum_{q=1}^p\int_0^C\int_\Omega|\operatorname{grad}v(z+th_j\theta_q)|^2dzdt.$$

经过关于 z 的积分变量变换，得到

$$(35.49)\qquad \int |\delta_{h,j} v(x)|^2 dx \leqslant (1+pC^2C_1^2) \int |\operatorname{grad} v(x)|^2 dx,$$

它连同(35.40)即蕴涵着(35.39)，因而蕴涵着我们所研究的差分格式的稳定性．为了完成定理 35.3 的证明，我们必须证明此格式是收敛的．

首先证明，对于每个 $v\in V$，$p_h r_h v$ 在 F 中收敛于 Jv．由 Banach-Steinhaus 定理（即一致有界性原则）以及 p_h 和 r_h 的范数与 h 无关地有界这一事实，只需对 $v\in C_c^\infty(\Omega)$ 证明此论断即可．此时，只需证明在 $L^2(\Omega)$ 中 $v_h\to v$ 和 $\delta_{h,j}v\to(\partial/\partial x^j)v$，而这是极明显的．

其次，对每个 $h\in\mathfrak{h}$，令 v_h 是 V_h 的一个元素，使得序列 $\{p_h v_h\}$ 在 F 中弱收敛．这蕴涵着 v_h 和 $\delta_{h,j}v_h$ 在广义函数意义下收敛，以及它们的极限——分别是 v 和 $(\partial/\partial x^j)v$——属于 $L^2(\Omega)$，即 $v\in H^1(\Omega)$．但因为 v_h 和 $\delta_{h,j}v_h$ 的支集是 Ω 的紧子集，故不难知道 $v\in H_0^1(\Omega)$． 证毕．

从定理 35.3 可以推导 Dirichlet 问题

$$(35.50)\qquad (\lambda-\Delta)u=f\in H^1(\Omega),\quad u\in H_0^1(\Omega)$$

的弱解 u 的一个逼近，也就是方程(35.8)的解 u 的一个逼近，其中 a 由(35.7)给出，而

$$(35.51)\qquad \phi(v)=\langle f,\bar{v}\rangle,\quad v\in V=H_0^1(\Omega).$$

我们分别引入 a 和 ϕ 的下述逼近：

$$(35.52)\qquad a_h(v_h,w_h)=\int_\Omega\Big(\lambda v_h\bar{w}_h+\sum_{j=1}^n(\delta_{h,j}v_h)(\delta_{h,j}\bar{w}_h)\Big)dx,$$

$$(35.53)\qquad \phi_h(v_h)=\int_\Omega\Big(f_0\bar{v}_h-\sum_{j=1}^n f_j\delta_{h,j}\bar{v}_h\Big)dx,$$

同时假设 $v_h,\ w_h\in V_h$ 和

$$(35.54)\qquad f_0+\sum_{j=1}^n\frac{\partial f_j}{\partial x^j}=f.$$

[关于 f，如果有附加的条件，例如 $f\in L^2(\Omega)$，则方程 (35.54) 的求解会变得很容易；例如，$f_0=f$，$f_j=0$，$j>0$.] 条件 (35.9) 被满

足, 其中 $c_0=\inf(1, \lambda)$; 如果 $\lambda=0$, 通过修改 V_h 中的内积[通常由(35.34)给出], 仍然能够满足条件(35.9). 条件(35.10)被满足, 其中

$$C=\sum_{j=0}^{n}\int_{\Omega}|f_j|^2dx.$$

立即看到, 条件(35.11)也被满足(考虑到在定理35.3的证明中已经确立的事实).

考虑逼近问题

$$a_h(u_h, v_h)=\phi_h(v_h), \quad \forall v_h\in V_h. \tag{35.55}$$

只需在 v_h 跑遍 V_h 的一个基, 特别, 在 $v_h=w_{h,y}(y\in\mathring{\Omega}_h^1)$ 时验证(35.55). 对于 $\mathring{\Omega}_h^1$ 中的任意两点 y, y', 不妨令

$$\tilde{a}_h(y, y')=a_h(w_{h,y}, w_{h,y'}), \ \tilde{\phi}_h(y)=\phi_h(w_{h,y}). \tag{35.56}$$

为了求(35.55)的解

$$u_h(x)=\sum_{y\in\mathring{\Omega}_h^1}u_h(y)w_{h,y}, \tag{35.57}$$

必须解线性方程组

$$\sum_{y\in\mathring{\Omega}_h^1}\tilde{a}_h(y, y')u_h(y)=\tilde{\phi}_h(y'), \ y'\in\mathring{\Omega}_h^1. \tag{35.58}$$

以 $n(h)$ 记 $\mathring{\Omega}_h^1$ 中点的数目, 即 $n(h)=\dim V_h$, 我们看到, (35.58)是复数 $u_h(y)$ 的 $n(h)$ 个未知数的 $n(h)$ 个线性方程的方程组.

由定理35.1和35.3知道, 当 h 沿着 $\mathfrak{h}$ 趋于零时, 由(35.57)给出的(35.55)的解 u_h 收敛于(35.50)的解 u.

Ω 是 $\mathfrak{h}$ 正规的这一要求当然依赖于 $\mathfrak{h}$ 的选取. 我们假设, 当 $h\in\mathfrak{h}$ 趋于零时, "分量" h_k 仍然可比较, 即存在一常数 $\gamma>0$, 使得

$$\gamma\leqslant h_j/h_k\leqslant\gamma^{-1}, \text{ 对所有的 } h\in\mathfrak{h} \text{ 和所有的 } j,k=1,\cdots,n. \tag{35.59}$$

那么, 选取充分多的向量 θ_q(例如, 足以保证立体角大于某个给定值 $\omega_0>0$ 的每个凸锥都至少包含一个 θ_j), 就可看到, 每个凸的有界开集 Ω 是 $\mathfrak{h}$ 正规的, 或者, 边界属于 C^1 的每个有界开集 Ω (并且 Ω 位于 $\partial\Omega$ 的一侧)是 $\mathfrak{h}$ 正规的.

最后, 我们要强调下述事实: 上面介绍的有限差分法的应用也许是我们所能给出的最原始的一种, 并且, 这个方法很便于改进与变通. 除了 Dirichlet 问题之外, 它还可应用于其它各种问题, 例

如应用于 Neumann 问题，斜微商问题(参阅 § 37)，还可应用于高阶方程(参阅 §§ 36, 38). 在适当的情形，可以得到不同于定理 35.1 中所考虑的收敛性性质，例如，在 L^∞ 范数下的收敛性. 有时，与其用简单的集合，如在(35.29)中所引入的 $\sigma_h(y)$，以及相伴的 $\sigma_h(y, r)$，$\mathring{\Omega}_h^1$，不如用较复杂的曲线 (curvilinear) 集合可能较为方便. 此外，这个方法可以被拓广到系数不是光滑的椭圆方程以及非线性方程. 有关这一切，请参考有关椭圆边值问题的解的逼近方面的书，如[A]和[FS]. 有限差分法的应用范围不限于椭圆边值问题. 经过适当的修改，它已被成功地应用于一些双曲的和抛物的发展方程和混合问题(有关这些问题，请看第 IV 章; Galerkin 法对于双曲发展方程的一个很简单的应用可在定理 47.1 的证明中找到).

习　题

35.1　在这个习题中所考虑的所有函数都是实值的. 令 V_h 是阶梯函数(35.33)的线性空间，v_h 是 V_h 的任一元素，M 是一至少为零的任意的数. 证明，$(v_h-M)^+=\sup(v_h-M, 0)$ 也属于 V_h.

令 $f\in L^\infty(\Omega)$，并考虑 V_h 上的线性泛函 $\int_\Omega fv_h dx$ [参阅(35.53)]. 令 λ 是严格大于零的数，并选取 $M>0$，使得 $\|f\|_{L^\infty(\Omega)}\leqslant\lambda M$. 令 $a_h(v_h, w_h)$ 是双线性形式(35.52)，u_h 是 V_h 中使得

$$a_h(u_h, v_h)=\int_\Omega fv_h dx, \quad \forall v_h\in V_h \tag{35.60}$$

成立的唯一的元素. 从(35.60)推导，如果 $w_h=u_h-M$，则

$$a_h(w_h, w_h^+)=\int_\Omega (f(x)-\lambda M)w_h^+(x)dx. \tag{35.61}$$

证明，

$$(\delta_{h,j}w_h^+(x))^2\leqslant\delta_{h,j}w_h(x)\delta_{h,j}w_h^+(x), \quad \forall x\in\mathbf{R}^n, \tag{35.62}$$

并从(35.61)推导 $\int_\Omega (w_h^+(x))^2dx=0$，因而

$$u_h(x)\leqslant M, \quad \forall x\in\Omega. \tag{35.63}$$

[类似地可以得到 $u_h(x)\geqslant -M$, $\forall x\in\Omega$.] 从 $L^\infty(\Omega)$ 是 $L^1(\Omega)$ 的对偶空间这一事实推导，存在 u_h 的一个弱收敛于 u 的子序列，即对于 $L^\infty(\Omega)$ 上的弱对

偶拓扑 $\sigma(L^\infty(\Omega), L^1(\Omega))$，此子序列收敛于 u；并且有

(35.64) $$u \in L^\infty(\Omega), \quad \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \frac{1}{\lambda}\|f\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

35.2 在(35.32)的记号中令 $\Omega_h = \Omega_h^0$. 令 V_h 表示函数

(35.65) $$v_h(x) = \sum_{y \in \Omega_h} v_h(y) w_{h,y}(x)$$

的空间，其中 $w_{h,y}$ 是 $\sigma_h(y)$ 的特征函数. 令 p_h 表示从 V_h 到 $F = L^2(\Omega)$ 中的自然内射，r_h 表示从 $V = L^2(\Omega)$ 到 V_h 中的映射，它把函数 (35.65) 对应于 $v \in V$，使得

(35.66) $$v_h(y) = (h_1 \cdots h_n)^{-1} \int_{\sigma_h(y)} v(x)dx \quad (y \in \Omega_h).$$

证明，(V_h, p_h, r_h, F)是 $L^2(\Omega)$ 的一个稳定的和收敛的外逼近.

35.3 令 Ω_h^1 是使得 $\sigma_h(y)$ 与 Ω 相交的点 $y \in h\mathbf{Z}$ 的集合；将 V_h 定义为函数

(35.67) $$v_h(x) = \sum_{y \in \Omega_h^1} v_h(y) w_{h,y}(x) \quad [\text{参阅}(35.33)]$$

的空间，赋以内积(35.34). 取 $F = (L^2(\Omega))^{n+1}$，取算子 p_h 为

(35.68) $$v_h \mapsto (v_h, \delta_{h,1} v_h \cdots, \delta_{h,n} v_h)|_\Omega,$$

其中，$|_\Omega$ 照例表示(每个分量)对于 Ω 的限制. 假设 Ω 是有界的和足够正规的，使得存在一个连续扩张映射 $\varepsilon_\Omega: H^1(\Omega) \to H^1(\mathbf{R}^n)$(参阅 § 26 的附录). 取 $r_h v$, $v \in H^1(\Omega)$为阶梯函数(35.67)，使得

(35.69) $$v_h(y) = (h_1 \cdots h_n)^{-1} \int_{\sigma_h(y)} \varepsilon_\Omega v(x)dx \quad (y \in \Omega_h^1).$$

证明，(V_h, p_h, r_h, F)是 $V = H^1(\Omega)$ 的一个稳定的和收敛的外逼近.

35.4 令 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个有界开子集，位于其边界 Γ 的一侧；假设 Γ 为一 C^1 超曲面. 利用习题 35.3 中所述的 $H^1(\Omega)$的外逼近，求 $-\Delta+\lambda$ 在 Ω 中的 Neumann 问题的解的一个逼近[$\lambda > 0$；参阅(37.1)—(37.2) 和 § 37.1].

36. Gårding 不等式. 高阶椭圆型方程的 Dirichlet 问题

在这一节中我们指出如何运用变分方法去求得高阶强椭圆型方程 Dirichlet 问题的弱解. 这里，基本要素是 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 的一开子集 Ω (它不必是有界的，但为了叙述的简便，我们将假设它是有界的)，和 Ω 中一个偶数 $2m(>0)$ 阶椭圆微分算子

(36.1)
$$P(x,\ D)=\sum_{|\alpha|<2m}a_\alpha(x)D^\alpha,$$

其中，$\alpha=(\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n)$ 是 $\geqslant 0$ 的整数的 n 数组；$|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$，$D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\cdots D_n^{\alpha_n}$，$D_j=-\sqrt{-1}\partial/\partial x^j$. 假设系数 a_α 都是 Ω 中的 C^∞ 函数，并设算子 $P(x,\ D)$ 在 Ω 中是一致强椭圆的. 这是一个加在 $P(x,\ D)$ 的主算符(定义 19.1)

(36.2)
$$P_{2m}(x,\ \xi)=\sum_{|\alpha|=2m}a_\alpha(x)\xi^\alpha$$

上的条件，即对某个适当的常数 $c_0>0$，有

(36.3)
$$\mathrm{Re}\,P_{2m}(x,\ \xi)\geqslant c_0|\xi|^{2m},\quad \forall x\in\Omega,\ \forall\xi\in\mathbf{R}_n$$

[这样一个正性条件要求 $P(x,\ D)$ 的阶是偶的]. 我们还将作下述假设：

(36.4)　系数 a_α 以及它的阶数 $\leqslant m$ 的各阶导数是 Ω 中的有界函数.

现在我们来叙述和证明这一节的主要结果，即著名的 *Gårding* 不等式：

定理 36.1　在上述这些假设下，存在两个正数 C_0, C_1, 使得

(36.5)
$$\|u\|_m^2\leqslant C_0\,\mathrm{Re}(P(x,\ D)u,\ u)_0+C_1\|u\|_{m-1}^2,\quad \forall u\in C_c^\infty(\Omega),$$

其中 $(,)_k$ 和 $\|\ \|_k$ 表示 Sobolev 空间 $H^k(\mathbf{R}^n)$ 中 [或 Sobolev 空间 $H^k(\Omega)$ 中] 的内积和范数.

证明　令 x_0 是 Ω 的任意一点. 由于(36.3)，我们有

(36.6)
$$c_0|\xi|^{2m}|\hat{u}(\xi)|^2\leqslant\mathrm{Re}\{P_{2m}(x_0,\ \xi)|\hat{u}(\xi)|^2\},$$

其中 $\hat{u}$ 表示 $u\in C_c^\infty(\Omega)$ 的 Fourier 变换. 从(36.6)以及 Plancherel 公式，立即得到

(36.7)
$$c_0\|u\|_m^2\leqslant\mathrm{Re}(P_{2m}(x_0,\ D)u,\ u)_0+c_0\|u\|_{m-1}^2.$$

现在假设，u 的支集在开球

$$B_r(x_0)=\{x\in\mathbf{R}^n;\ |x-x_0|<r\}$$

之中. 存在一个常数 $B_0>0$，它仅依赖于系数 $a_\alpha(|\alpha|=2m)$ 的阶数 $\leqslant m$ 的偏导数，使得

(36.8)
$$|(P_{2m}(x,\ D)u,\ u)_0-(P_{2m}(x_0,\ D)u,\ u)_0|\leqslant B_0 r\|u\|_m^2+B_0\|u\|_m\|u\|_{m-1}.$$

为了证明(36.8)，只需考虑 $P_{2m}(x, \xi)=a(x)\xi^\alpha(|\alpha|=2m)$ 的情形即可．显然，

$$(36.9)\qquad a(x)D^\alpha=D^{\alpha'}a(x)D^{\alpha''}+\sum_{\beta',\beta''}D^{\beta'}a_{\beta',\beta''}(x)D^{\beta''},$$

其中 $|\alpha'|=|\alpha''|=m$，而求和是对 β', β'' 的集合取的，这里 β', β'' 是长度分别至多为 m 和 $m-1$ 的 n 数组．因而，

$$(36.10)\qquad |(\{a(x)-a(x_0)\}D^\alpha u,\ u)_0 \pm(\{a(x)-a(x_0)\}D^{\alpha''}u,\ D^{\alpha'}u)_0|\leqslant B_1\|u\|_m\|u\|_{m-1},$$

其中，常数 B_1 只依赖于 $a_{\beta',\beta''}$，它们是 $a(x)$ 的某些导数．但是，如果 $a(x)$ 的梯度在 Ω 中有界，则对于某个仅依赖于 $\operatorname{grad} a$ 在 Ω 中的界的常数 B_2，我们有

$$(36.11)\qquad |(\{a(x)-a(x_0)\}D^\alpha u,\ u)_0| \leqslant B_2 r\|u\|_m^2+B_1\|u\|_m\|u\|_{m-1},$$

它蕴涵着我们想要得到的事实，即(36.8)．

如果把(36.7)和(36.8)结合起来，并选取 $r\leqslant c_0/2B_0$，就得到

$$(36.12)\qquad \frac{1}{2}c_0\|u\|_m^2\leqslant \operatorname{Re}(P_{2m}(x,\ D)u,\ u)_0+B_3\|u\|_m\|u\|_{m-1},\quad \forall u\in C_c^\infty(B_r(x_0)).$$

由于假设(36.4)，并用类似于导致(36.10)的推理，我们看到，存在一个常数 $B_4>0$，使得

$$|(\{P(x,\ D)-P_{2m}(x,\ D)\}u,\ u)_0|\leqslant B_4\|u\|_m\|u\|_{m-1},\quad \forall u\in C_c^\infty(\Omega).$$

如果把它与(36.12)结合起来，并适当选取常数 B_5，则得

$$(36.13)\qquad c_0\|u\|_m^2\leqslant 2\operatorname{Re}(P(x,\ D)u,\ u)_0+B_5\|u\|_m\|u\|_{m-1},\quad \forall u\in C_c^\infty(B_r(x_0)).$$

必须强调一下，常数 c_0, B_5 与 x_0 无关．

最后一步是把局部估计(36.13)"拼"起来．为此，用有限个开球 $B_r(x_i)$，$i=1, \cdots, J$，覆盖 Ω 的闭包 $\overline{\Omega}$，并引进相同个数的非负试验函数 $\phi_i(i=1, \cdots, J)$，它们具有下述性质：对每个 i，$\operatorname{supp}\phi_i\subset B_r(x_i)$；在 Ω 中 $\phi_1^2+\cdots+\phi_J^2=1$（这样，对每个 i，$0\leqslant\phi_i\leqslant 1$）．然后考虑 Ω 中一个任意的试验函数 u，并对每个 $\phi_i u$（代替 u）应用

(36.13). 把相应的不等式相加, 并注意到

$$|(P(x, D)(\phi_i u)-\phi_i P(x, D)u, \phi_i u)_0| \leqslant B_6\|u\|_m\|u\|_{m-1}.$$

最后, 利用下述事实: 任给 $\eta>0$, 有

$$\|u\|_m\|u\|_{m-1}\leqslant\frac{1}{2}\left(\eta\|u\|_m^2+\frac{1}{\eta}\|u\|_{m-1}^2\right),$$

并选取 η 充分小, 就容易得到(36.5). 证毕.

注 36.1 有多种途径可以放松定理 36.1 中的假设. 例如, 当开集 Ω 是无界的时候, 结论仍然成立. 在这情形, 必须非常谨慎地利用假设(36.3)—(36.4)中的一致性: 必须构造一个单位分解 $\{\phi_i^2\}$, 如在上述证明的末尾一样, 但是这次是无限的, 然而仍有一致性性质(例如, 这个单位分解由一个固定试验函数的适当格点的平移所构成). 此外, 关于 $P(x, D)$ 的系数的正规性要求也可放松: 考察上面的证明容易看到, 所需要的仅是在 $P(x, D)$ 中 $D^\alpha(|\alpha|\leqslant 2m)$ 的系数在 $L^\infty(\Omega)$ 中有 $\sup(|\alpha|-m, 0)$ 阶导数.

注 36.2 我们已经叙述并证明了 Gårding 不等式的一个适用于边值问题研究的整体形式. 但是, 我们显然也能叙述并证明它的一个局部形式: 如果我们放弃(36.3)—(36.4)中的一致性要求, 则对于支集在 Ω 的任给相对紧开子集 Ω' 中的所有 u, 我们能够证明(36.5), 其中常数 C_0, C_1 依赖于 Ω'.

注 36.3 在(36.5)的右端, 我们可用任何范数 $\|\ \|_j(j<m)$, 特别, 用 $\|\ \|_0$, 代替范数 $\|\ \|_{m-1}$. 只需注意, 给定任何 $\eta>0$, 存在一常数 $C(\eta)>0$, 使得

$$(1+|\xi|^2)^{m-1}\leqslant\eta(1+|\xi|^2)^m+C(\eta), \quad \forall\xi\in\mathbf{R}_n,$$

因而

$$\|u\|_{m-1}^2\leqslant\eta\|u\|_m^2+C(\eta)\|u\|_0^2, \quad \forall u\in C_c^\infty. \tag{36.14}$$

选取 $\eta\leqslant 1/2C_1$, 并增大 C_0, 从(36.5)和(36.14)我们就得到

$$\|u\|_m^2\leqslant C_0\operatorname{Re}(P(x, D)u, u)_0+C_1'\|u\|_0^2, \quad \forall u\in C_c^\infty(\Omega). \tag{36.15}$$

现在我们将作下述附加的假设: $C_1'=0$ 的 (36.15) 成立, 即

$$\|u\|_m^2\leqslant C_0\operatorname{Re}(P(x, D)u, u)_0, \quad \forall u\in C_c^\infty(\Omega). \tag{36.16}$$

注 36.4　如果 $P(x, D)$ 满足(36.15), 那么只要 $\mathrm{Re}\,\lambda$ 充分大, $P(x, D)+\lambda$ 就满足(36.16).

我们注意,

(36.17)　$$(P(x, D)u, v)_0$$

可延拓为 $H_0^m(\Omega)\times H_0^m(\Omega)$ 上的一个拟双线性形式, 并注意, (36.16) 蕴涵着此形式是强制的(定义 23.1). 我们能够应用 Lax-Milgram 引理(引理 23.1), 并推得(参阅定理 23.2).

定理 36.2　如果 (36.16) 成立, 则算子 $P(x, D)$ 确定一个从 $H_0^m(\Omega)$ 到 $H^{-m}(\Omega)$ 上的同构.

注 36.5　很清楚, 我们可以假设(36.17)的强制性, 而不去叙述假设(36.16). 但在"实践中", 验证(36.16)是否成立, 要比验证所研究的形式是否是强制的容易一些.

定理 36.2 使我们能够证明, 与 Ω 和 $P(x, D)$ 相关的(非齐次) Dirichlet 问题有一个唯一的解: 我们先来叙述一下这个问题.

如通常一样, 关于 Ω, 我们宁可作较强的正规性假设: 假设其边界 Γ 是一光滑的(即, C^∞)超曲面, 并假设 Ω 在 Γ 的一侧. 关于下面一些内容, 请参阅在 § 26 末尾的迹理论. 引进(26.20)中定义的 Γ 上的 $j=0, 1, \cdots, m-1$ 阶迹, 以及在定理 26.9 中考虑的"多重"迹 $\tilde{\gamma}$:

$$\tilde{\gamma}: u\mapsto (\gamma^0(u), \cdots, \gamma^{m-1}(u)),\ \gamma^j(u)=\left.\frac{\partial^j u}{\partial\nu^j}\right|_\Gamma.$$

这里要考虑的非齐次 Dirichlet 问题为: 在 $H^m(\Omega)$ 中找 u, 满足

(36.18)　$$P(x, D)u=f\in H^{-m}(\Omega)\quad (\text{在 } \Omega \text{ 中}),$$

(36.19)　$$\gamma^j(u)=g^j\in H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)\quad (\text{在 } \Gamma \text{ 上}),\ j=0, \cdots, m-1.$$

只需把定理 36.2 与定理 26.5 以及定理 26.9 组合起来, 即得

定理 36.3　如果(36.16)成立, 则

(36.20)　$$u\mapsto (P(x, D)u, \tilde{\gamma}(u))$$

是一个从 $H^m(\Omega)$ 到 $H^{-m}(\Omega)\times\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\Gamma)$ 上的同构.

习　题

36.1　令 $P_{2m}(x, \xi)$ 是变量 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 的一个 $2m$ 次齐次多项式，其系数属于 $C^\infty(\bar{\Omega})$ [参阅 (36.2)]. 令 N 是 $\mathbf{R}_n$ 中一任意非零向量，并令 Π_N 是 $\mathbf{R}_n$ 的一垂直于 N 的通过原点的超平面. 关于变量 z 的多项式 $P_{2m}(x, \theta+zN)$的根，当 x 跑遍 $\bar{\Omega}$, θ 跑遍 Π_N 时，给出一个使得 (36.3) 成立的充要条件.

36.2　令 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的一有界开子集，$P(x, D)$ 是 Ω 中 $2m$ 阶的一致强椭圆微分算子[这样,(36.3)成立].此外,假设 $P(x, D)$的所有系数属于 $\mathscr{B}^\infty(\Omega)$ (即它们是 Ω 中的复 C^∞ 函数，它们的任意阶导数在 Ω 中有界). 证明，给定任意非负整数 s，存在两个正常数 $C_0(s)$, $C_1(s)$，使得

(36.21)　$\|u\|_{m+s}^2 \leqslant C_0(s)\mathrm{Re}(P(x, D)u, u)_s + C_1(s)\|u\|_s^2, \quad \forall u \in C_c^\infty(\Omega).$

36.3　令 Ω 和 $P(x, D)$ 如习题 36.2 中所述,但现在假设 $P(x, D)$ 的所有系数可延拓为 $\mathbf{R}^n$ 中具有紧支集的 C^∞ 函数. 证明，对于适当选取的 $C_0(s)$, $C_1(s)$, 估计式(36.21)可推广至所有的实数 s.

36.4　令 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的一任意有界开子集，$P(x, D)$ 是 Ω 中的具有 C^∞ 系数的 m 阶椭圆算子(定义 19.4). 证明，每个点 $x_0 \in \Omega$ 有一开邻域 $U \subset \Omega$，使得对某个常数 $C>0$，有

(36.22)　$\|u\|_m \leqslant C\|P(x, D)u\|_0, \quad \forall u \in C_c^\infty(U).$

从关于 $P(x, D)$的转置算子的类似的估计推导,方程

(36.23)　$P(x, D)u = f \in H^{-m}(U)$　(在 U 中)

有一解 $u \in L^2(U)$，事实上，u 可取得线性地和连续地依赖于 f.

36.5　令 Ω 和 $P(x, D)$ 如习题 36.4 中所述. 证明,对于所有正实数 s 存在 x_0 的一个开邻域 $U_s \subset \Omega$ 和一个常数 $C_s>0$，使得

(36.24)　$\|u\|_{m+s} \leqslant C_0\|P(x, D)u\|_s, \quad \forall u \in C_c^\infty(U_s).$

从 $P(x, D)$的转置算子的类似于(36.24)的估计推导，给定 Ω 的任一点 x_0 和任一实数 s，存在 x_0 的一开邻域 $V \subset \Omega$，使得对每个 $f \in H^s(V)$，存在 $u \in H^{s+m}(V)$，在 V 中满足 $P(x, D)u = f$.

36.6　令 Ω 和 $P(x, D)$如习题 36.4 中所述. 证明，给定任一实数 s 和 Ω 的任一紧子集 K，存在一常数 $C>0$，使得

(36.25)　$\|u\|_{m+s} \leqslant C(\|P(x, D)u\|_s + \|u\|_{m-1+s}), \quad \forall u \in C_c^\infty(K).$

将此与引理 25.3(习题 25.11)组合起来,证明对于适当选择的 U_s 和 C_s,不等式(36.24)当 s 是负实数时也成立.

36.7 令 Ω 和 $P(x, D)$ 如习题 36.4 中所述. 令 u 是具紧支集在 Ω 中的一广义函数,使得 $f=P(x, D)u\in H^{s_0}(s_0\in\mathbf{R})$. 令 s 是一实数,使得 $u\in H^s$ 和 $s-m\leqslant s_0$. 利用 Friedrichs 引理(引理 25.4, 习题 25.12), 从不等式(36.25)(其中 $s+m$ 用 $s+1$ 代替)推导, 函数 $\rho_\varepsilon * u$ 在 H^{s+1} 中弱收敛, 因而推得 $u\in H^{s_0+m}$.

利用截断函数,由此推导下述结论:

定理 36.4 令 $P(x, D)$ 是一个 m 阶的椭圆算子, 在 $\mathbf{R}^n$ 的开子集 Ω 中具有 C^∞ 系数.

那么, Ω 中每个适合 $P(x, D)u\in H^{s_0}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 的广义函数 u 必属于 $H^{s_0+m}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

推论 36.1 Ω 中具有 C^∞ 系数的每个椭圆线性偏微分算子在 Ω 中是次椭圆的(定义 2.1).

36.8 令 $P(x, D)$ 是在开集 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 中具有 C^∞ 系数的一个 m 阶椭圆算子,令 K 是 Ω 的任一紧子集. 利用估计式(36.25)证明, 满足齐次方程 $P(x, D)h=0$ 的、支集包含在 K 中的 C^∞ 函数 h 的集合形成一有限维线性空间.

36.9 令 $P(x, D)$ 是一个 $2m$ 阶一致强椭圆微分算子, 在 $\mathbf{R}^n$ 的有界开集 Ω 中具有 C^∞ 系数. 假设 $P(x, D)$ 的系数以及它们的所有导数在 Ω 中是有界的. 证明,给定任一复数 ζ, 下述命题成立:

(36.26) $P(x, D)+\zeta$ 在 $H_0^m(\Omega)$ 中的核是一有限(也许是零)维线性子空间 V_0,而 $P(x, D)+\zeta$ 诱导一个从商空间 $H_0^m(\Omega)/V_0$ 到 $H^{-m}(\Omega)$ 的一个余维数是有限(也可能是零)的子空间 V' 上的同构; V' 是伴随算子 $P(x, D)^*+\zeta$ 的核的正交补(关于对偶性)空间.

再证明: 所有 ζ——对于它, $\dim V_0$ 或 $\operatorname{codim} V'$ 至少是 1——在复平面中形成一个收敛于无穷的序列, 它们都位于半平面 $\operatorname{Re}\zeta\leqslant C<+\infty$ 中[提示: 用 Rellich 引理(参阅习题 25.10)和紧算子的基本性质(例如,参阅[Y, 第 X 章, §5, 定理 2]).]

37. Neumann 问题和其它边值问题(变分形式)

在这一节中, Ω 始终表示 $\mathbf{R}^n$ 的一有界开子集, 它具有光滑的边界, 且位于边界的一侧; 边界用 Γ 表示.

在应用中，经常出现不同于 Dirichlet 问题的边值问题. 例如，对于方程

(37.1) $$(\lambda-\Delta)u=f \quad (\text{在}\ \Omega\ \text{中}),$$

我们可以研究 Neumann 问题，也就是说，对于解提出下述边界条件：

(37.2) $$\frac{\partial u}{\partial \nu}=g \quad \text{在}\ \Gamma\ \text{上}.$$

和以前一样，$\partial/\partial\nu$ 表示沿着 Ω 的外法向的偏微商. 之所以要研究 Neumann 问题的原因是显然的：例如，人们或许要在只知道通过边界曲面 Γ 的热流而不知道 Γ 上的温度（如在 Dirichlet 问题中那样）时，研究物体 Ω 内部的温度分布. 人们或许还要研究如下的 Dirichlet 问题与 Neumann 问题的"混杂". 设 Γ 表示为两个不相交的子集 Γ_0, Γ_1（假设它们相当正规）的并集. 我们要求解"混杂"问题

(37.3) $$(\lambda-\Delta)u=f \quad \text{在}\ \Omega\ \text{中},$$

(37.4) $$u=g_0 \quad \text{在}\ \Gamma_0\ \text{上}, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}=g_1 \quad \text{在}\ \Gamma_1\ \text{上}.$$

在这一节中我们将指出，只要我们满足于弱解，并从比较狭窄的范围中去选择我们的问题，那么，一种统一的处理方式对我们是合用的，这种方式推广了 § 23 中所述的处理方式，并基于 Lax-Milgram 引理（引理 23.1）的应用. 可以预言，这需要用"恰当的" Hilbert 空间上的一个适当的强制拟双线性形式来重新叙述问题；这个 Hilbert 空间一般地说是 $H^1(\Omega)$ 的一个闭线性子空间，但不总是那样（参阅 § 37.1b），它居于 $H^1(\Omega)$ 和 $H_0^1(\Omega)$ 之间——或者，如果我们研究的是一个 $2m$ 阶的微分算子，居于 $H^m(\Omega)$ 和 $H_0^m(\Omega)$ 之间.

在着手讨论这些变分边值问题之前，我们必须强调下述事实，即有很多类极为重要的边值问题是我们这里所用的方法力所不及的：非变分边值问题，它属于 Lopatinski 类，它的一个简短的描述在 § 38 中给出；象斜微商问题这样的问题可在 § 37.5 中找到，但

是容许其中求斜微商的方向在某些边界点处与边界相切；或者是某些算子或算子组的问题，它们不是强椭圆的，而且对于同阶的小扰动，不是稳定的. 后者的最主要的例是所谓 $\bar{\partial}$-Neumann 问题，这是一个关于超定组 $\partial u/\partial \bar{z}_j = f_j\,(j=1, \cdots, n)$ 的边值问题，$\bar{\partial}$-Neumann 问题在全纯函数理论中是基本重要的，在本书中将不多述.

37.1a 对于 $-\Delta+\lambda(\lambda>0)$ 的(弱) Neumann 问题

我们要用的拟双线性形式与 Dirichlet 问题中所用的相同：

$$a_\lambda(u, v) = \int_\Omega \{\lambda(u\bar{v}) + (\operatorname{grad} u)\cdot(\operatorname{grad} \bar{v})\}\,dx.$$

因为我们假设 $\lambda>0$，所以 $a_\lambda(u, v)$ 在 $H^1(\Omega)$ 上[因而也在 $H^1(\Omega)$ 的任意闭子空间上]是强制的(定义 23.1). 令 $f\in L^2(\Omega)$，$g\in L^2(\Gamma)$. 我们注意，

$$(37.5)\qquad v\mapsto \int_\Omega f\bar{v}dx + \int_\Gamma g\bar{v}d\sigma$$

定义一个 $H^1(\Omega)$ 上的连续反线性泛函 [在展布于边界 Γ 上的积分中，v 表示 v 在 Γ 上的迹 $\gamma(v)$；参阅 § 26]. Lax-Milgram 定理蕴涵着，在 $H^1(\Omega)$ 中存在唯一的元素 u，使得

$$(37.6)\qquad a_\lambda(u, v) = \int_\Omega f\bar{v}dx + \int_\Gamma g\bar{v}d\sigma, \quad \forall v\in H^1(\Omega).$$

如果取 $v\in C^\infty(\bar{\Omega})$，就可以在(37.6)的左端分部积分，并把它改写为

$$(37.7)\qquad \int_\Omega u(\lambda-\Delta)\bar{v}dx + \int_\Gamma u\frac{\partial \bar{v}}{\partial \nu}\,d\sigma$$

[Γ 上曲面测度 $d\sigma$ 的定义恰好使得(37.7)是 $a_\lambda(u, v)$ 分部积分后的结果]. 把(37.7)等同于(37.6)的右端，并在 $C_c^\infty(\Omega)$ 中选取 v，因为这时(37.7)中的曲面积分等于零，因而就得到(37.1). 回到 $C^\infty(\bar{\Omega})$ 中任意的 v，同时考虑到(37.1). 可以实际进行如下.

令 $\{\Omega_\varepsilon\}\,(0<\varepsilon<1)$ 是 Ω 的相对紧开子集的单参数族，具有光

滑边界 Γ_ε, Γ_ε 单调增(当 $\varepsilon\to+0$ 时——译者), 且趋于 Ω (即, $\Omega=\bigcup_\varepsilon \Omega_\varepsilon$——译者). 我们有

$$a_\lambda(u, v)=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\Omega_\varepsilon}\{\lambda u\bar{v}+(\mathrm{grad}\, u)\cdot(\mathrm{grad}\, \bar{v})\}\,dx. \tag{37.8}$$

因为 $f\in L^2(\Omega)$, 我们知道(不难证明) u 属于 $H^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. 因而可以对[(37.8)中的] Ω_ε 上的积分施行分部积分, 这样就得到

$$a_\lambda(u, v)=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_{\Omega_\varepsilon} f\bar{v}dx+\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial\nu}\bar{v}d\sigma\right). \tag{37.9}$$

由于(37.1), 这就意味着

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial\nu}\bar{v}d\sigma=\int_\Gamma g\bar{v}d\sigma. \tag{37.10}$$

这个等式可看作(37.2)的含义.

事实上, 如果细心地选取开集 Ω_ε, 我们就能找到一个从 Γ_ε 到 Γ 上的微分同胚 ϕ_ε, 并能把 u 在 Γ_ε 上的法微商转换为一个单参数函数族 $\{u_\varepsilon\}\subset H^2(\Omega)$ 的函数 u_ε 在 Γ 上的法微商, 这些函数 u_ε 收敛于 u (譬如说在 $H^1(\Omega)$ 中), 它们在 Γ 上的法微商收敛于 g. 总而言之, 我们不妨认为, 在 $\lambda>0$ 时我们已经得到了 Neumann 问题(37.1)—(37.2)的一个弱解. 如果我们加强关于数据 f 和 g 的正规性要求, 那就能为解 u 证明较好的正规性性质, 而如果 f 和 g 足够正规, 我们就能断定边界条件(37.2)在某种"经典的"意义下被满足.

37.1b　Laplace 方程的弱 Neumann 问题

显然, 当 $\lambda=0$ 时, 我们不能期望(37.1)—(37.2)的解 u (如果存在的话)是唯一的: 常数函数显然都是齐次问题的解. Dirichlet 拟双线性形式

$$a(u, v)=\int_\Omega(\mathrm{grad}\, u)\cdot(\mathrm{grad}\, \bar{v})dx$$

在 $H^1(\Omega)$ 上不是强制的. 连带的半范是 *Dirichlet* 积分半范:

$$D(u)=\left(\int_\Omega|\mathrm{grad}\, u|^2dx\right)^{1/2}, \tag{37.11}$$

它的零空间(或核)是 $H^1(\Omega)$ 的线性子空间，由 Ω 中的局部常数函数组成. 为了简单起见，假设 Ω 是连通的. 那么，$D(u)=0\Rightarrow u=$ 常数. 构作 $H^1(\Omega)$ 以常数函数(自然,它形成一个可等同于 $\mathbf{C}$ 的一维线性子空间)为模的商空间 $\dot{H}^1(\Omega)$；我们将用 $\dot{u}$, $\dot{v}$ 等表示这个商空间的元素. 由定义可以说，$\dot{u}\mapsto D(\dot{u})$ 是 $\dot{H}^1(\Omega)$ 的范数，它把 $\dot{H}^1(\Omega)$ 变为一 Hilbert 空间；用 $a(\dot{u}, \dot{v})$ 表示其连带的拟双线性形式，它当然是 $\dot{H}^1(\Omega)$ 上的内积，并且也是 $a(u, v)$ 对此商空间的变种. 不用说，$a(\dot{u}, \dot{v})$ 是强制的，因而适于应用 Lax-Milgram 技巧.

现在令 f 是一个属于 $L^2(\Omega)$ 的任意函数，g 是一个属于 $L^2(\Gamma)$ 的任意函数. 我们可以问,在什么条件下,连续反线性泛函(37.5) 在商空间 $\dot{H}^1(\Omega)$ 上定义一个连续泛函. 答案是显然的：它必须正交于常数函数；即,它必须满足

$$\int_\Omega f dx+\int_\Gamma g d\sigma=0. \tag{37.12}$$

如果(37.12)被满足,那么可以象前面(§ 37.1a)一样进行下去，并得到：存在函数 $u\in H^1(\Omega)$，在相差一个常数的意义下是唯一的(如果 Ω 是连通的)，在 § 37.1a 中所述的弱意义下，它满足 $\lambda=0$ 时的(37.1)—(37.2).

37.2 $-\Delta+\lambda(\lambda>0)$ 的"混杂"问题

我们来研究问题(37.3)—(37.4). 继续考虑拟双线性形式 $a_\lambda(u, v)$. 重要的步骤是选择 $H^1(\Omega)$ 的子空间 V，在 V 上考虑 $a_\lambda(u, v)$. 如下确定 V：它是在 Γ_0 (在 $\bar{\Omega}$ 中)的邻域中等于零的函数 $\phi\in C^\infty(\bar{\Omega})$ 的空间在 $H^1(\Omega)$ 中的闭包. 在这个情形，V 是"在 Γ_0 上等于零"的属于 $H^1(\Omega)$ 的函数的空间[当 $\Gamma_0=\Gamma$ 时，$V=H_0^1(\Omega)$]. 令 $f\in L^2(\Omega)$, $g_1\in L^2(\Gamma_1)$. 再一次应用 Lax-Milgram 引理就知道，在 V 中存在唯一的元素 u，它满足

$$a_\lambda(u, v)=\int_\Omega f\bar{v}dx+\int_{\Gamma_1} g_1\bar{v}d\sigma, \quad \forall v\in V. \tag{37.13}$$

使用类似于 Neumann 问题中所用的推理，可以把(37.13)解释为

(37.14) $(\lambda-\Delta)u=f$ 在 Ω 中，

(37.15) $\dfrac{\partial u}{\partial\nu}=g_1$ 在 Γ_1 上.

u 属于 V 这一事实意味着在 Γ_0 上 $u=0$——在通常的广义意义下. 如果我们希望满足非齐次条件

(37.16) $u=g_0$ 在 Γ_0 上，

那么，对于 g_0 作某些强一些的正规性假设是方便的：例如，不妨设 g_0 是属于 $H^{3/2}(\Gamma)$ 的 Γ 上某函数在 Γ_0 上的限制. 于是可以找到 $h\in H^2(\Omega)$，它在 Γ_0 上等于 g_0 (更确切一些，它在 Γ 上的迹在 Γ_0 上等于 g_0). 再令 w 是问题

(37.17) $(\lambda-\Delta)w=f-(\lambda-\Delta)h$ 在 Ω 中，

(37.18) $\dfrac{\partial w}{\partial\nu}=g_1-\dfrac{\partial h}{\partial\nu}$ 在 Γ_1 上

在 V 中的唯一解. 显然，$u=w+h$ 是(37.14)-(37.15)-(37.16)的一个解. 其唯一性问题是需要审慎的，因为我们必须明确地叙述我们是在什么框架中提出这个问题的. 例如，如果 g_1 充分正规，譬如说，g_1 是 $H^{1/2}(\Gamma)$的一元素在 Γ_1上的限制，那么我们可期望证明 u 属于 $H^2(\Omega)$ (至少在某些情形中)，并且我们可以问，这样的解在 $H^2(\Omega)$ 中是否唯一. 自然，只需证明 $H^2(\Omega)$ 的任一元素 h 在 Γ_0 上满足 $h=0$ 时确实属于 V，即，它可用一些函数在 $H^1(\Omega)$ 中逼近，这些函数在 Ω 的闭包中是 C^∞ 的，在 Γ_0 (在 $\overline{\Omega}$ 中) 的邻域中恒等于零. 这在某些情形中当然是可能的 (在关于 Γ_0 和 Γ_1 的一些足够强的正规性假设下这是可以认可的)†.

37.3 更一般的二阶椭圆型方程的弱 Neumann 问题

人们或许想知道，对于较 $\lambda-\Delta$ 更一般的椭圆型方程，首先是对于(23.6)类型的微分算子，即

† 有关问题 (37.3)—(37.4)，建议读者参看习题 37.2 到 37.4 (那里也讨论了 $\lambda=0$ 的情形).

$$(37.19)\quad L=-\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^k}a^{jk}(x)\frac{\partial}{\partial x^j}+\sum_{j=1}^{n}b^j(x)\frac{\partial}{\partial x^j}+c(x),$$

如何提出 Neumann 问题,这里假设连带的拟双线性形式

$$(37.20)\quad a(u,v)=\sum_{j,k=1}^{n}\int_\Omega a^{jk}\frac{\partial u}{\partial x^j}\frac{\partial\bar v}{\partial x^k}dx+\sum_{j=1}^{n}\int_\Omega b^j\frac{\partial u}{\partial x^j}\bar v dx+\int_\Omega cu\bar v dx$$

在 $H^1(\Omega)$ 上是强制的. 如果我们象在算子 $\lambda-\Delta$ 的情形中一样正确地进行推理, 就得到结论: 给定任一 $f\in L^2(\Omega)$ 和任一 $g\in L^2(\Gamma)$, 则在 $H^1(\Omega)$ 中存在唯一的函数 u, 满足

$$(37.21)\quad a(u,v)=\int_\Omega f\bar v dx+\int_\Gamma g\bar v d\sigma,\quad \forall v\in H^1(\Omega).$$

剩下的是解释这个关系式. 与 Ω 有关的那部分的含义是清楚的[由选取 $v\in C_c^\infty(\Omega)$ 而得到]:

$$(37.22)\quad Lu=f\quad 在\ \Omega\ 中.$$

和边界有关的那部分, 如果假设系数 a^{jk} 是实值的, 矩阵 $A=(a^{jk})$ 是对称的, 它的含义也容易理解. 此时, 由于假设 $a(u,v)$ 是强制的, 所以 A 是正定的. 在 $C^\infty(\bar\Omega)$ 中取 v, 并在形式 $a(u,v)$ 的"主部" $\tilde a(u,v)$ 中分部积分, 就得到

$$\begin{aligned}\tilde a(u,v)&=\int_\Omega(\operatorname{grad}u)\cdot(A\operatorname{grad}\bar v)dx\\&=\int_\Omega\operatorname{div}\{u(A\operatorname{grad}\bar v)\}dx\\&\quad-\int_\Omega u\operatorname{div}(A\operatorname{grad}\bar v)\,dx,\end{aligned}$$

因而, 由标准的 Stokes 型公式(引理 10.1), 有

$$(37.23)\quad a(u,v)=\int_\Omega u\overline{L^*v}dx+\int_\Gamma u\{\nu\cdot(A\operatorname{grad}\bar v)\}d\sigma,$$

其中, L^* 表示 L 的形式伴随算子, ν 表示沿着 Γ 的外法向的单位向量. 我们有

$$\nu\cdot A\operatorname{grad}v=({}^tA\nu)\cdot\operatorname{grad}v=\frac{\partial v}{\partial\nu_a'},$$

其中我们用了记号

$$(37.24)\qquad \frac{\partial}{\partial\nu'_a}=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a^{jk}(x)\nu^{j}\right)\frac{\partial}{\partial x^{k}}.$$

让我们注明一下，如果 u 直到边界充分可微，就可以向"另一方向"分部积分，得到

$$(37.25)\qquad a(u,\ v)=\int_{\Omega}(Lu)\bar{v}dx+\int_{\Gamma}\frac{\partial u}{\partial\nu_a}\bar{v}d\sigma,$$

这次，我们用了记号

$$(37.26)\qquad \frac{\partial}{\partial\nu_a}=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}a^{jk}(x)\nu^{k}\right)\frac{\partial}{\partial x^{j}}.$$

在(37.24)和(37.26)中，x 应理解为位于边界 Γ 上. 此时，$\frac{\partial}{\partial\nu_a}$ 就是 Γ 上的法微商，由度量

$$\sum_{j,k}a^{jk}(x)dx^{j}dx^{k}$$

所定义(这个度量定义在 $\bar{\Omega}$ 上). 在算子(37.19)等于 $-\Delta$ 的情形中——Δ 是 n 个变量的 Laplace 算子，矩阵 $A=(a^{jk})$ 等于 $n\times n$ 单位矩阵 I. 记住，在一般情形，由于形式 $a(u,\ v)$ 的强制性假设，矩阵 A 是正定的.

象在 Neumann 问题的情形中一样推理，从(37.22)和(37.23)我们推得，在某种弱意义下(并且，如果作了充分强的正规性假设，就在经典的意义下)，有

$$(37.27)\qquad \frac{\partial u}{\partial\nu_a}=g\quad 在\ \Gamma\ 上.$$

(37.22)和(37.27)的联立就是自然地联系于微分算子 L 的 Neumann 问题.

37.4 高阶椭圆型方程的弱 Neumann 问题

现在我们将简单地叙述如何对于 $2m$ 阶(m 是任意的正整数)椭圆型方程提出 Neumann 问题. 我们假设所要研究的微分算子用变分形式给出，即形如

$$(37.28)\qquad P(x,\ D)=\sum_{|p|,\,|q|\leq m}(-1)^{|q|}\partial^{q}a_{p,q}(x)\partial^{p},$$

其中, $\partial^p=(\partial/\partial x^1)^{p_1}\cdots(\partial/\partial x^n)^{p_n}$, $|p|=p_1+\cdots+p_n$, 并且系数 $a_{p,q}(x)$ 属于 $L^\infty(\Omega)$ (也可能要求较强的正规性性质). 在形式(37.28)中, 算子 $P(x, D)$ 自然地联系着 $H^m(\Omega)\times H^m(\Omega)$ 上的一个连续拟双线性泛函, 即

$$a(u, v)=\sum_{|p|,|q|\leqslant m}\int_\Omega a_{p,q}(x)\partial^p u\overline{\partial^q v}dx, \tag{37.29}$$

我们还作 $a(u, v)$ [在 $H^m(\Omega)$ 上] 是强制的这一假设.

其次, 我们考虑 $H^m(\Omega)$ 上的连续线性泛函

$$F(v)=\int_\Omega f v dx+\sum_{j=0}^{m-1}\int_\Gamma g_j\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^j v\, d\sigma, \tag{37.30}$$

其中,譬如说 $f\in L^2(\Omega)$, $g_j\in L^2(\Gamma)(0\leqslant j\leqslant m-1)$. 由 Lax-Milgram 引理我们得到, 在 $H^m(\Omega)$ 中存在唯一的 u, 满足

$$a(u, v)=F(\bar v) \quad \text{对每个 } v\in H^m(\Omega). \tag{37.31}$$

我们现在的问题是解释方程(37.31). 显然, 在 Ω 内部有

$$P(x, D)u=f \quad (\text{在 } \Omega \text{ 中}). \tag{37.32}$$

至于说到边界条件, 假设解 u 有我们所需要的正规性是方便的: 不妨在 $H^{2m}(\Omega)$ 中取 u [而 v, 譬如说在 $C^\infty(\overline{\Omega})$ 中取]. 自然, 还遗留着这样的问题: 何时此假设被满足; 但我们在这里不讨论.

为了显式地写出由(37.31)蕴涵的边界条件, 如以前一样, 进行分部积分——这相当于对微分算子 $P(x, D)$ [用变分形式(37.28)给出]和 v 的前 $m-1$ 个法微商利用 *Green* 公式.

令 χ_Ω 表示集合 Ω 的特征函数 (记住 Ω 是有界的). 我们 (用允许的任何方式) 把 v 延拓为 $\mathbf{R}^n$ 中的 C^∞ 函数. 于是

$$\begin{aligned}
a(u, v)&=\sum_{|p|,|q|\leqslant m}\langle\chi_\Omega a_{p,q}\partial^p u, \partial^q\bar v\rangle\\
&=\sum_{p,q}(-1)^{|q|}\sum_{r\leqslant q}\binom{q}{r}\langle(\partial^r\chi_\Omega)\partial^{q-r}\{a_{p,q}\partial^p u\}, \bar v\rangle\\
&=\langle\chi_\Omega P(x, D)u, \bar v\rangle\\
&\quad+\sum_{0<|r|\leqslant m}\ \sum_{\substack{p\\|p|,}}\sum_{\substack{q\geqslant r\\ q\leqslant m}}(-1)^{|q|}\binom{q}{r}\langle\partial^r\chi_\Omega\partial^{q-r}\{a_{p,q}\partial^p u\}, \bar v\rangle,
\end{aligned}$$

其中记号 $r\leqslant q$ 意味着对每个 $j=1, \cdots, n$, $r_j\leqslant q_j$. 现在

(37.33) 若 $|r|>0$, 则 $\partial^r \chi_\Omega = c_r(x)\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^{|r|-1}\delta_\Gamma$,

其中 $c_r(x)$ 是 Γ 上的 C^∞ 函数(参看习题 37.6), δ_Γ 表示联系于 Γ 的"曲面 Dirac 测度":

(37.34) $$\langle\delta_\Gamma, \phi\rangle = \int_\Gamma \phi\, d\sigma, \quad \phi\in C_c^\infty(\mathbf{R}^n).$$

再次应用 Leibniz 公式, 我们得到

(37.35) $$a(u, v) = \int_\Omega \bar{v} P(x, D) u\, dx + \sum_{j=0}^{m-1}\int_\Gamma \left\{\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^j \bar{v}\right\}\mathcal{N}_j(x, D) u\, d\sigma,$$

其中 $\mathcal{N}_j$ 是定义在 Γ 的邻域中的阶数 $\leqslant 2m-1-j$ 的微分算子, 计算它是容易的(参阅习题 37.6).

如果我们回到 $F(v)$ 的表达式 (37.30), 我们就看到, 由方程 (37.31)所蕴涵的边界条件是

(37.36) $\mathcal{N}_j(x, D)u = g_j$ 在 Γ 上, $j=0, \cdots, m-1$.

解 u 缺少足够的 (直到边界的) 正规性时, 我们只能说边界条件 (37.12)是在某种弱意义下被满足的.

注 37.1 十分重要的是, (37.35) 和 (37.36) 中的边界算子 $\mathcal{N}_j$ 不仅依赖于 Γ 和 $P(x, D)$, 而且也依赖于情形 (37.28) 中用到的 $P(x, D)$ 的变分形式. 对于一个给定的微分算子 $P(x, D)$, 可能选取几种变分形式, 它们可以导致不同的边界条件. 这个注也适用于 § 37.3 中所述的二阶 Neumann 问题, 甚至适用于象 $\lambda-\Delta$ 这样的简单的算子(参阅习题 37.5).

注 37.2 这一节中处理 Neumann 问题的基础是推广的 Green 公式

(37.37) $$\int_\Omega u\overline{P(x, D)^* v}\, dx = \int_\Omega \{P(x, D)u\}\,\bar{v}\, dx + \sum_{j=0}^{2m-1}\int_\Gamma \{\mathcal{N}_j(x, D)u\}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^j \bar{v}\, d\sigma,$$

这个公式对于(譬如说) $H^{2m}(\Omega)$ 中的 u 和 v 是有效的. 在(37.37)中, $P(x, D)^*$ 表示 $P(x, D)$ 的形式伴随算子[如果在 $C_c^\infty(\Omega)$ 中取

u 和 v, 方程 (37.37) 事实上是形式伴随算子的定义], 同时, $\mathcal{N}_j$ ($j=0, \cdots, 2m-1$) 是定义在 Γ 的一邻域中的 $2m$ 个算子(它们可以通过分部积分来计算).

37.5 $-\Delta+\lambda$ 的辐射问题和斜微商问题

能够应用变分方法的另一有兴趣的问题是解方程

$$(\lambda-\Delta)u=f \quad 在\ \Omega\ 中, \tag{37.38}$$

u 满足一个"辐射"边界条件:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}+\alpha u=g \quad 在\ \Gamma\ 上, \tag{37.39}$$

其中 α 是一属于 $L^\infty(\Gamma)$ 的非负函数 (f 和 g 可以像在 Neumann 问题中一样选取). 在此情形, 我们考虑 $H^1(\Omega)$ 上的拟双线性形式

$$a(u, v)=\int_\Omega \{\lambda u\bar{v}+(\operatorname{grad} u)\cdot(\operatorname{grad} \bar{v})\}\, dx + \int_\Gamma \alpha u\bar{v}\, d\sigma. \tag{37.40}$$

因为 $H^1(\Omega)$ 的一个元素的迹属于 $H^{1/2}(\Gamma)$ (定理 26.2), 所以 $a(u, v)$ 在 $H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)$ 上显然是连续的. 因为 $\alpha\geqslant 0$, $a(u, v)$ 还是强制的, 由此得到变分问题

$$a(u, v)=\int_\Omega f\bar{v}\, dx+\int_\Gamma g\bar{v}\, d\sigma \tag{37.41}$$

的解的存在性和唯一性. 关于 u 假设充分的正规性(或者相反, 在某种弱意义下解释它), 由 Green 公式, 我们得到

$$\int_\Omega ((\lambda-\Delta)u)\bar{v}\, dx+\int_\Gamma \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}+\alpha u\right)\bar{v}\, d\sigma = \int_\Omega f\bar{v}\, dx+\int_\Gamma g\bar{v}\, d\sigma, \tag{37.42}$$

它指出, 我们已经在弱的意义下解决了问题(37.38)—(37.39).

接着, 我们考虑某种类型的斜微商问题. 考虑边界 Γ 上的一个光滑的实向量场 T 以及 Γ 上的一个光滑的实函数 a, 它在 Γ

上恒不等于零．我们作下述假设：

(37.43)　$\alpha^{-1}T+T^{*}\alpha^{-1}$ 是 Γ 上的一个处处非负的光滑函数.

这里 T^{*} 是 T 关于 $L^{2}(\Gamma)$ 上的自然的 Hilbert 空间结构（用测度 $d\sigma$ 定义，或者用 $\mathbf{R}^{n}$ 上的 Euclid 距离所诱导的距离定义）的伴随．在这个假设下，变分方法适用于斜微商问题

$$(\lambda-\Delta)u=f \quad \text{在 } \Omega \text{ 中}, \tag{37.44}$$

$$\left(\alpha\frac{\partial}{\partial\nu}+T\right)u=g \quad \text{在 } \Gamma \text{ 上}. \tag{37.45}$$

首先，在方程(37.45)除以 α 之后，不妨假设 $\alpha\equiv1$．然后，考虑拟双线性形式

$$a(u,\ v)=\int_{\Omega}\{u\bar{v}+(\operatorname{grad}u)\cdot(\operatorname{grad}\bar{v})\}\,dx+\langle Tu,\ \bar{v}\rangle_{\Gamma}, \tag{37.46}$$

其中 $\langle,\rangle_{\Gamma}$ 表示 $H^{1/2}(\Gamma)$ （v 的迹属于它）和 $H^{-1/2}(\Gamma)$ （Tu 属于它）之间的对偶性括号．立即知道（由于定理 26.2），(37.46) 在 $H^{1}(\Omega)\times H^{1}(\Omega)$ 上是连续的，并且从(37.43)（现在，其中 $\alpha=1$）即得，(37.46) 在 $H^{1}(\Omega)$ 上是强制的．因此，Lax-Milgram 定理就蕴涵着，(37.44)—(37.45) 有一个，且仅有一个（弱）解．

不是把 T 取为向量场，而是取为 Γ 上的一个服从 (37.43) 的一阶微分算子，则和上面的斜微商边界条件一样，条件(37.45)将推广辐射条件(37.39)．

习　题

37.1　令 Ω 是平面 $\mathbf{R}^{2}$ 中的一有界域（即，连通的，并且是单连通的开集），它的边界是一 C^{∞} 曲线 Γ．用 $\partial/\partial t$ 表示与 Γ 相切的、顺时针指向的单位向量场．令 u 是 $\bar{\Omega}$ 中的一 C^{∞} 函数，在 Ω 中调和．证明，如果 v 是 $\bar{\Omega}$ 中另一 C^{∞} 函数，使得 u 和 v 在 Ω 中是共轭调和函数 [参阅 (32.12)]，则 v 必定是 Neumann 问题

$$\Delta v=0 \quad \text{在 } \Omega \text{ 中}, \qquad \frac{\partial v}{\partial\nu}=\frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{在 } \Gamma \text{ 上} \tag{37.47}$$

的解（法微商 $\dfrac{\partial}{\partial\nu}$ 指向向外）.

37.2 令 Ω 是 $\mathbf{R}^n(n\geqslant 2)$ 中的一个有界开集，具有 C^∞ 边界 Γ，Ω 位于 Γ 的一侧. 令 x_0 是 $\bar{\Omega}$ 的任意一点. 证明，在 x_0 的邻域中等于零的 $\bar{\Omega}$ 中 C^∞ 函数的集合在 $H^1(\Omega)$ 中稠. [提示：令 $B_R(x_0)$ 是中心在 x_0 处且具有很大半径 R 的开球；用对偶性推理，证明 $H_0^1(B_R(x_0)\backslash\{x_0\})=H_0^1(B_R(x_0))$，由此得到所需的结论.] 由上述结论推导，当 Γ_0 是一个点时，混杂问题 (37.3)—(37.4)化为 Neumann 问题.

37.3 令 B_R 表示空间 $\mathbf{R}^n(n\geqslant 2)$ 中中心在原点、半径为 $R>0$ 的开球. 记 $x'=(x^1,\cdots,x^{n-1})$，并令 $g(x')$ 是 $\mathbf{R}^{n-1}$ 中的一个 L^∞ 函数. 证明，

$$C_c^\infty(B_R)\ni\phi\mapsto\int_{\mathbf{R}^{n-1}}g(x')\phi(x',0)dx'$$

可延拓为 $H_0^1(B_R)$ 上的一个连续线性泛函.

其次，考虑一个如同习题 37.2 中所述的开集 Ω，并令 Γ_0 是 Ω 的边界 Γ 的一个开的非空子集. 证明，在 $H^1(\Omega)$ 上存在一个连续线性泛函，它在 $H^1(\Omega)$ 的常数函数子空间上不为零，而在 $\bar{\Omega}$ 中的任何 C^∞ 函数上为零，这些 C^∞ 函数在 Γ_0 在 $\bar{\Omega}$ 的邻域中恒等于零. [提示：利用从 $H^1(\Omega)$ 到 $H_0^1(B_R+x_0)$ 中的一个连续的扩张映射(参阅 § 26 的附录)，这里 $x_0\in\Gamma_0$，R 充分大，并利用在本习题第一部分中所证明的结果.]

37.4 令 Ω 和 Γ_0 如习题 37.3 中所述. 记 V 为 $\bar{\Omega}$ 内 C^∞ 函数的空间在 $H^1(\Omega)$ 中的闭包，这些函数在 Γ_0 的一邻域中为零. 令 $\Gamma_1=\Gamma\backslash\Gamma_0$.

从习题 37.3 的结论推导，Dirichlet 拟双线性泛函 $\int_\Omega(\operatorname{grad}u)\cdot(\operatorname{grad}\bar{v})dx$ 在 V 上是强制的(参阅 § 37.2b)，从此推导，当 $\lambda=0$ 时，对于数据 $f\in L^2(\Omega)$，$g_1\in L^2(\Gamma)$ 的每个选择(g_0 和 g_1 在 Γ_0 中恒等于零)，问题 (37.3)—(37.4) 在 V 中有唯一的解 u. 当 g_0 在 Γ_0 不恒等于零时，说明如何去求同一问题的解.

37.5 令 Ω 是平面 $\mathbf{R}^2$ 的一有界开子集，位于其边界 Γ 的一侧，Γ 是一光滑曲线. 令 $c(x)$ 是 $\bar{\Omega}$ 中的一个实值 C^1 函数. 叙述与拟双线性形式

$$\int_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x^1}\frac{\partial\bar{v}}{\partial x^1}+\frac{\partial u}{\partial x^2}\frac{\partial\bar{v}}{\partial x^2}+c\frac{\partial u}{\partial x^1}\frac{\partial\bar{v}}{\partial x^2}-c\frac{\partial u}{\partial x^2}\frac{\partial\bar{v}}{\partial x^1}+\frac{\partial c}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial x^1}\bar{v}-\frac{\partial c}{\partial x^1}\frac{\partial u}{\partial x^2}\bar{v}\right)dx \tag{37.48}$$

相联系的边值问题. (37.48)对于 $u,v\in H_0^1(\Omega)$ 的限制是什么?

37.6 令 Ω 是平面中下述椭圆区域

$$\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2;\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<1\right\},$$

并令 χ_Ω 表示其特征函数. 给定任意两个整数 $p, q\geqslant 0$, 计算$(\partial/\partial x)^q(\partial/\partial y)^p\chi_\Omega$ [参阅(37.33)]. 给出与 Ω 以及与拟双线性形式

$$\sum_{p,q<m}\int_\Omega\left(\frac{\partial^{p+q}u}{\partial x^p\partial y^q}\right)\left(\frac{\partial^{p+q}\bar{v}}{\partial x^p\partial y^q}\right)dx \quad (m\in\mathbf{Z}_+)$$

相联系的[在(37.35)中定义的] Neumann 边界算子 $\mathcal{N}_j$ 的表达式.

37.7 令 r, θ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的极坐标, $g(e^{i\theta})$ 是单位圆周上的一个充分正规的函数. 利用 Fourier 级数, 给出边值问题

$$(37.49)\qquad \Delta u=0 \quad 若\ r<1, \qquad \alpha\frac{\partial u}{\partial r}+\beta\frac{\partial u}{\partial\theta}+\gamma u=g \quad 若\ r=1$$

的解 u (当它们存在时)的一个完全的描述, 其中 α, β, γ 是复数.

在下面两个习题中, Ω 表示 $\mathbf{R}^n$ 的一个具有光滑边界 Γ 的有界开子集, Ω 位于 Γ 的一侧.

37.8 证明, 对于任何复数 λ, 拟双线性形式

$$a(u, v)=\int_\Omega\{\lambda u\bar{v}+(\Delta u)(\Delta\bar{v})\}\,dx$$

在 $H^2(\Omega)$ 上不是强制的(Δ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的 Laplace 算子, $n\geqslant 2$). 叙述形式地与方程

$$a(u, v)=\int_\Omega f\bar{v}\,dx, \quad \forall v\in H^2(\Omega)$$

相联系的边值问题, 其中 $f\in L^2(\Omega)$ [读者不妨假设 $u\in H^4(\Omega)$].

37.9 令 V 表示 $H_0^1(\Omega)$ 的一个子空间, 它由具有下述性质的函数 v 组成: $\mathrm{grad}(\Delta v)\in L^2(\Omega; \mathbf{C}^n)$, v 被赋予 Hilbert 范数.

$$(\|v\|^2_{H^1(\Omega)}+\|\mathrm{grad}(\Delta v)\|^2_{L^2})^{1/2}.$$

证明, 拟双线性形式

$$a(u, v)=\int_\Omega\{(\mathrm{grad}\,u)\cdot(\mathrm{grad}\,\bar{v})+(\mathrm{grad}\,\Delta u)\cdot(\mathrm{grad}\,\Delta\bar{v})\}\,dx$$

在 V 上是连续的和强制的, 因此, 给定任意 $f\subset H_0^1(\Omega)$, 在 V 中存在唯一的元素 u, 使得

$$(37.50)\qquad a(u, v)=\int_\Omega(\mathrm{grad}\,f)\cdot(\mathrm{grad}\,\bar{v})dx, \quad \forall v\in V.$$

Δ 定义一个从 $H_0^1(\Omega)$ 到 $H^{-1}(\Omega)$ 上的同构(定理 23.1), 从这一事实推导,

$$(37.51)\qquad \Delta(\Delta u)+u=f \quad 在\ \Omega\ 中,$$

$$(37.52)\qquad \frac{\partial}{\partial\nu}(\Delta u)=0 \quad 在\ \Gamma\ 上.$$

证明, 除了(37.52)之外, u 还满足另外的非平凡的边界条件.

38. 一般的 Lopatinski 条件简介

在这一节中，Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的一有界开子集，其边界 $\partial\Omega$ 是一 C^∞ 超曲面；假设 Ω 位于 $\partial\Omega$ 的一侧．考虑一个 $m=2m_0$（m_0 是正整数）阶的椭圆算子 $P(x, D)$，其系数都在 $\overline{\Omega}$ 的一个开邻域中定义并为 C^∞ 的复函数．假设，给出 J 个边界微分算子 $B_j(x, D)$ $(j=1, \cdots, J)$：它们都是系数在边界 $\partial\Omega$ 的一邻域中定义并为 C^∞ 的微分算子，在我们将要研究的问题中，它们确定边界条件，换句话说，我们的问题就是"寻找"和研究问题

(38.1) $$P(x, D)u=f \quad 在\ \Omega\ 中,$$

(38.2) $$B_j(x, D)u=g_j \quad 在\ \partial\Omega\ 上\ (j=1, \cdots, J)$$

的解，其中 f 和 g_j 分别是 $\overline{\Omega}$ 和 $\partial\Omega$ 中的光滑函数．

在遇到了很多特殊情形——正如在前几节中那样——之后，提出下述问题似乎是合理的：给定算子 $P(x, D)$ 后，使得问题(38.1)—(38.2) 适定的边界算子集合 $\{B_j(x, D)\}$ $(j=1, \cdots, J)$ 是哪些？自然，我们必须用精确的词汇来叙述"适定"意味着什么．有关这个问题所积累的经验指导着"适定"意义的选择．我们不作深入的讨论，只是说，"自然的"意义是不够的：所谓自然的意义就是，问题(38.1)—(38.2)是适定的，如果 $(f, g_1, \cdots, g_J)\mapsto u$ 是从 $C^\infty(\overline{\Omega})\times\{C^\infty(\partial\Omega)\}^J$ 到 $C^\infty(\overline{\Omega})$ 上的一个双满映射．我们需要比这强得多的性质．

事实上，我们有两个基本要求：我们的定义在微分同胚下必须是不变的（对于"自然的"意义，这是成立的）；在算子 $P(x, D)$，$B_j(x, D)$ $(1\leqslant j\leqslant J)$ 的"小"扰动下它必须是稳定的．所谓"小"，即意味着我们可以用下述方式修改这些算子中的每一个：将其加上相同阶数的一个算子，只要后者系数的绝对值以及它们的导数（到某一阶）的绝对值充分小．这两个要求是自然的，然而还必须指出，提出它们的理由是，如果没有这两个要求，分析就不能进行到底．

我们注意到，如果我们考虑的是从一个 Fréchet 空间到另一

个 Fréchet 空间中的同构，那么我们不能保证它们在小扰动(在某种合理的意义下)下的稳定性. 但是，如果我们考虑的是 Banach 空间之间的同构，那么这是对的. 在偏微分方程理论中，只要面临着类似的情况，人们总是力求把 C^∞ 空间表示为一族按等级排列的 Banach 空间或 Hilbert 空间的并; Sobolev 空间 H^s 通常是最适合于这样一种途径的. 这里我们将再次这样做. 我们注意，如果 m_j 是 $B_j(x, D)$ 的阶，那么，$u\mapsto B_j(x, D)u|_{\partial\Omega}$ 就是从 $H^s(\Omega)$ 到 $H^{s-m_j-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ 中的连续线性映射(这里，s 是 $\geqslant m_j+1$ 的一个整数).

定义 38.1 我们说边界问题(38.1)—(38.2)是*适定的*，如果给定任意的 $s\geqslant\sup(m, m_1+1, \cdots, m_J+1)$，映射

$$u\mapsto (P(x, D)u,\ B_1(x, D)u|_{\partial\Omega},\ \cdots,\ B_J(x, D)u|_{\partial\Omega}) \tag{38.3}$$

是从 $H^s(\Omega)$ 到

$$H^{s-m}(\Omega)\times\prod_{j=1}^{J}H^{s-m_j-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \tag{38.4}$$

上的一个同构.

上面叙述中的"同构"是关于局部凸空间(而非 Hilbert 空间)结构而言的.

(38.3)是 $H^s(\Omega)$ 到(38.4)上的一个同构这一事实，等价于一对不等式，其中第一个为

$$\|u\|_{H^s(\Omega)}\leqslant C\Big\{\|P(x, D)u\|_{H^{s-m}(\Omega)} + \sum_{j=1}^{J}\|\gamma[B_j(x, D)u]\|_{H^{s-m_j-1/2}(\partial\Omega)}\Big\},\quad u\in H^s(\Omega). \tag{38.5}$$

这里 γ 表示在 $\partial\Omega$ 上的迹(§ 26). 第二个估计适用于问题(38.1)—(38.2)的所谓*伴随问题*. 这里，我们的目的只是提供一个关于分析如何进行，以及这种分析将导致什么结果的想法，而不追究技巧性，也不给证明. 因而，我们将不描述伴随问题(参看习题 38.9)，也不叙述伴随估计是什么. 注意，估计(38.5)导致解的唯一性和正规性，而伴随不等式导致它的存在性.

原则上，我们想找使得问题(38.1)—(38.2)为适定的必要和

充分的条件，这些条件与涉及的所有算子 $P(x, D)$ 和 $B_j(x, D)$ 的系数以及开集 Ω 有关. 然而稍一思考就发觉，这是毫无希望的. 我们来看一下极简单的情形：$P(x, D)=\lambda-\Delta$, $J=1$, $B_1(x, D)=I$（恒等算子）. 对于（复）数 λ 的什么值，相应的问题 (38.1)—(38.2)，即 $\lambda-\Delta$ 在 Ω 中的 Dirichlet 问题是适定的？这样一个问题的确切回答超出我们的能力所及，除非在最简单的情形；因为这需要对问题的特征值的确切了解.

因此，我们将不停留于此. 注意，可把空间(38.4)的对偶空间等同于

$$(38.6)\qquad (H^{s-m}(\Omega))^*\times\prod_{j=1}^{J}H^{-s+m_j+1/2}(\partial\Omega).$$

另一方面，因为 $C^\infty(\overline{\Omega})$ 在 $H^{s-m}(\Omega)$ 中稠，因而后一空间的对偶空间的元素可等同于 $\overline{\Omega}$（视作带边的流形）中的广义函数，并且，说 (38.6) 的元素是 C^∞ 函数是有意义的：这意味着这些元素都是 $(J+1)$ 函数组 $(f, g_1, \cdots, g_J)$，其中 $f\in C^\infty(\overline{\Omega})$ 和 $g_j\in C^\infty(\partial\Omega)$（对于每个 j）.

定义 38.2 我们说，问题 (38.1)—(38.2) 是*椭圆的*，如果映射 (38.3) 的核及其余核，即 (38.3) 的转置映射的核，只由 C^∞ 函数组成.

因为 (38.3) 的核是闭的，且包含在 $C^\infty(\overline{\Omega})$ 中，因此，其上由 $C^\infty(\overline{\Omega})$ 诱导的拓扑与由 $H^s(\Omega)$［或者，由 $H^{s+k}(\Omega)$，对任何整数 $k\geqslant 0$］诱导的拓扑一致. 由此，并从 Rellich 引理（定理 26.11）即得：此核是局部紧的，因而是有限维线性空间. 把类似的论证应用到映射 (38.3) 的转置上，即得

命题 38.1 如果问题 (38.1)—(38.2) 是椭圆的，则映射 (38.3) 有有限维核和余核. 特别，它是 Fredholm 算子（即，若 N 是其核，M 是其余核，则其*指数* $\dim N-\dim M$ 是有限的；椭圆性蕴涵着 M 和 N 不依赖于 s）.

问题 (38.1)—(38.2) 的椭圆性还与一对不等式等价，其中之一与映射 (38.3) 有关，而另一个则与其伴随有关. 把 (38.5) 稍作

修改即得与(38.3)有关的估计:

$$(38.7)\qquad \|u\|_{H^s(\Omega)}\leqslant C\Big\{\|P(x,D)u\|_{H^{s-m}(\Omega)}+\sum_{j=1}^{J}\|\gamma(B_j(x,D)u)\|_{H^{s-m_j-1/2}(\partial\Omega)}+\|u\|_{H^{s'}(\Omega)}\Big\},\quad \forall u\in H^s(\Omega),$$

其中，可以将 s' 取作小于 s 的任一非负整数，例如，$s'=s-1$ (自然,常数 C 依赖于 s' 的选取). 注意，估计式(38.7)在微分同胚下和在小扰动下是不变的. 这里，所谓小扰动是下述含义：可以对 $P(x,D)$ 或每一 $B_j(x,D)$ 加上一个相同阶数(m, 或者, m_j)的微分算子,这算子的主部有充分小的系数,而其低阶项的系数只要求属于 $C^\infty(\overline{\Omega})$.

(38.7)的一个最重要的、(38.5)所没有的新的特性是,这样一个估计是可局部化的(localizable)：假设每个点 $x_0\in\Omega$ 在 $\mathbf{R}^n$ 中有一开邻域 U, 使得 (38.7) 中的不等式对于 (作为 $\mathbf{R}^n$ 中的广义函数) 支集包含在 U 中的每个 $u\in H^s(\Omega)$ 都成立，那么，对于任何 $u\in H^s(\Omega)$，此不等式也成立. 因为，利用在 $\overline{\Omega}$ 的一邻域中的一个 C^∞ 单位分解 (其元素有充分小的支集)，我们就可以把局部估计拼合起来(从单位分解产生的"误差项"，通过增大常数，可被吸收到常数$\cdot\|u\|_{H^{s-1}(\Omega)}$这一项中).

上面的注使我们能够大大减轻所遇到的困难. 首先，可以将其完全局部化在边界点 x_0 的一个开邻域中. 事实上,在任一内点的邻域中,估计式(38.7)(更确切地说,其局部化)完全不包含边界算子 $B_j(x,D)$，此时,它是应用于

$$P(x,D)^*(1-\Delta_x)^{s-m}P(x,D)$$

(而不是 $P(x,D)$) 的 Gårding 不等式 (36.5) 的一个显然的推论 [$P(x,D)^*$ 是 $P(x,D)$的形式自伴算子; 参阅本书第 iv 页"记号"].

其次，如在§27 中系统地作过的那样，可以假设，$x_0\in\partial\Omega$ 的邻域 U 是中心在 x_0 处的一个开球，并设 $U\cap\partial\Omega$ 在超平面 $x^n=x_0^n$ 中.

第三，取 U 充分小，并扰动 $P(x, D)$ 和 $B_j(x, D)$，可以假设，在 U 中 $P(x, D)=p(D)$，$B_j(x, D)=b_j(D)$，其中 $p(\xi)$ 和 $b_j(\xi)$ 分别是 m 次和 m_j 次的 n 个变量的齐次多项式.

为了简单起见，假设 $x^0=0$，Ω 是上半球 $\{x\in U;\ x^n>0\}$. 自然，这里的推理与 § 27 中的推理密切相关，事实上，是后者的精密化. 这里，我们考虑估计式

$$(38.8)\qquad \|u\|_{H^s(\Omega)}\leqslant C\left\{\|p(D)u\|_{H^{s-m}(\Omega)}+\sum_{j=1}^{J}\|\gamma(b_j(D)u)\|_{H^{s-m_j-1/2}(\partial\Omega)}+\|u\|_{H^{s-1}(\Omega)}\right\},$$
$$\forall u\in H^s(\Omega),\quad \operatorname{supp}u\subseteq U$$

的正确性. 正如(38.7)是相应于问题(38.1)—(38.2)一样，估计式(38.8)与下述边值问题联系在一起：

$$(38.9)\qquad p(D)u=f \quad 在\ \Omega\ 中,$$

$$(38.10)\qquad b_j(D)u=g_j \quad 在\ U\cap\partial\Omega\ 中,\ j=1, \cdots, J.$$

这里，$f\in H^{s-m}(\Omega)$，$\operatorname{supp}f\subseteq U$，$g_j\in H^{s-m_j-1/2}(\partial\Omega)$，$\operatorname{supp}g_j\subseteq U\cap\partial\Omega$（换句话说，$f$ 和 g_j 在 U 的边界——球面的一邻域中恒等于零）. 我们所需要的事实是，映射

$$(38.11)\qquad u\mapsto(p(D)u,\ \gamma(b_1(D)u),\ \cdots,\ \gamma(b_J(D)u))$$

的核和余核只由 $\bar\Omega$ 中的 C^∞ 函数组成 [回想一下，$u\in H^s(\Omega)$]. 这里，γ 表示在 $n-1$ 维开球 $U\cap\partial\Omega$ 上的迹.

正如在 § 27 中所做的那样，我们将利用关于切变量的 Fourier 变换. 这样，问题 (38.9)—(38.10) 就被变为依赖于参数 $\xi'=(\xi_1, \cdots, \xi_{n-1})$ 的一个（正交于 Ω 的边界的平坦部分的变量 $t=x^n$ 的）常微分方程的“初值”问题：

$$(38.12)\qquad p(\xi', D_t)\hat u=\hat f \quad 当\ t\geqslant 0\ 时,$$

$$(38.13)\qquad b_j(\xi', D_t)\hat u=\hat g_j\ (j=1, \cdots, J) \quad 当\ t=0\ 时.$$

考察当 $f=g_1=\cdots=g_J\equiv 0$ 时 (38.12)—(38.13) 的解. 因为利用“特征根”容易构作常系数（这里，依赖于参数 ξ'）线性常微分方程的所有解，所以我们来引进这些特征根：把它们分成两部分；第

一部分，$\lambda_1, \cdots, \lambda_p$，由虚部大于零的特征根组成；第二部分，$\lambda_{p+1}, \cdots, \lambda_m$，由有严格负虚部的特征根组成．因为算子 $P(x, D)$ 是椭圆的，而算子 $p(D)=P_m(x_0, D)$ 是它的固定在边界某点 x_0 处的主部，所以，只要 ξ' 异于零（在现在的推理中我们总是如此假设）（当 $\xi'=0$ 时，所有特征根都"倒塌"为零），就没有特征根是实的．

命题 38.2 如果自变量个数 $n\geqslant 3$，则位于上半平面中的特征根数目恰好等于 $m_0=m/2$（因而也等于位于下半平面中的特征根数目）．

证明 如果 $n>2$，则原点在 $\mathbf{R}^{n-1}$ 中的余集是连通的，因而可以找到一条连接 $\xi'\neq 0$ 和 $-\xi'$ 的光滑简单曲线 γ．沿着 γ，作为 τ 的多项式的 $p(\xi', \tau)$ 的根可表为 ξ' 的连续函数．显然，由于 p 的齐次性，在点 ξ' 处的位于上半平面中的根的数目 μ，必定等于在点 $-\xi'$ 处的位于下半平面中的根的数目 ν．但是，在 γ 上 μ 必定是常数，否则，在 γ 的某个点处，某个根将是实数．这样，我们有 $\mu=\nu$ 和 $\mu+\nu=m$． 证毕．

从现在起，我们假设

(38.14) 对于每个 $\xi'\in\mathbf{R}^{n-1}\backslash\{0\}$，$p(\xi', \cdot)$ 的虚部大于零的根的数目恰好等于 $m_0=m/2$．

为什么要求这在 $n=2$（或 $n=1$）时也成立，其理由马上就会清楚．应该指出，在 $\bar{\Omega}$ 的每一点满足条件(38.14)的算子 $P(x, D)$，经常被称为强椭圆的．平面中的 Cauchy-Riemann 算子不是强椭圆的．

属于上半平面的特征根 $\lambda_1, \cdots, \lambda_{m_0}$ 的重要性在于下述事实：虽然每个函数 $\exp(i\lambda_j(\xi')t)$ 都是方程

$$p(\xi', D_t)h=0, \quad t>0 \tag{38.15}$$

的解，但只有当 $\operatorname{Im}\lambda_j(\xi')>0$ 时的函数 $\exp(i\lambda_j(\xi')t)$ 才能视作变量 x' 的光滑函数（乃至广义函数）的 Fourier 变换．事实上，其它一些函数 $\exp(i\lambda_j(\xi')t)$，只要 $t>0$，当 $|\xi'|\to+\infty$ 时就增长得很快．

暂时假设，对于每个 $\xi'\neq 0$，$\lambda_j(\xi')\ (j=1, \cdots, m_0)$ 是两两互异的．这个限制在后面将被去掉．在这个情形，(38.15)的所有解具

有形式

(38.16) $$h(\xi', t)=\sum_{j=1}^{m_0} C_j(\xi')\exp(i\lambda_j(\xi')t).$$

如果想使这个函数满足齐次边界条件

(38.17) $b_j(\xi', D_t)h=0$ 当 $t=0$ 时, $j=1, \cdots, J$,

则必须

(38.18) $$\sum_{k=1}^{m_0} b_j(\xi', \lambda_k(\xi'))C_k(\xi')=0, \quad j=1, \cdots, J.$$

假设(38.18)有非平凡解 $C(\xi')=(C_1(\xi'), \cdots, C_{m_0}(\xi'))$. 那么,只要这解取值于矩阵

(38.19) $$(b_j(\xi', \lambda_k(\xi')))_{j=1,\cdots,J;k=1,\cdots,m_0}$$

的零空间中, 我们就可以把它取为 ξ' 的任一函数. 例如, 将其乘以一个适当的纯量函数 $\alpha(\xi')$,可以容易地得到 $h(\xi', 0)$ 当 $|\xi'|\to+\infty$ 时不是速降的, 这样, 它就不是 x' 的一光滑函数的 Fourier 变换,这与我们的要求矛盾. 因而,我们必须要求,矩阵(38.19)定义一个从 $\mathbf{C}^{m_0}$ 到 $\mathbf{C}^J$ 中的内射映射. 与(38.12)—(38.13)的余核有关的, 即与转置问题的核有关的类似的考虑导致下述要求:(38.19)的转置也必须是内射的. 可以把这两个条件组合重述如下:

(38.20) $J=m_0$, 且对于每个 $\xi'\in\mathbf{R}^{n-1}\backslash\{0\}$, (38.19)的行列式不等于零.

这个提法有这样的缺陷, 即假定 $\lambda_j(1\leqslant j\leqslant m_0)$ 是相异的. 在目前阶段, 与其去掉这个限制, 我们毋宁在(38.15)——即, 当 f 恒等于零, 且满足边界条件(38.13)的(38.12)——的解的构造中利用它. 事实上,用 $\hat{v}_j(\xi', t)$ 表示(38.12)—(38.13)的解,其中 $\hat{f}$ 和所有的 $\hat{g}_k$——除了 $\hat{g}_j$ 之外,都恒等于零. 我们可以写

(38.21) $$\hat{v}_j(\xi', t)=\hat{g}_j(\xi')\hat{F}_j(\xi', t),$$

其中, $\hat{F}_j$ 的定义与 $\hat{v}_j$ 是一样的, 除了在 $\hat{F}_j$ 的定义中, $\hat{g}_j=1$ 这一点以外. 函数 $\hat{F}_j$ 必须有(38.16)这样的形式,其中的常数 C_j 满足线性方程组

$$\sum_{k=1}^{m_0} b_{j'}(\xi',\lambda_k(\xi'))C_k(\xi')=\delta_{jj'} \quad (j'=1, \cdots, m_0),$$

这里 $\delta_{jj'}$ 是 Kronecker 指标. 由 Cramer 法则立刻导致

(38.22) $$\hat{F}_j(\xi', t)=B_j(\xi', t)/B(\xi'),$$

其中

(38.23) $$B(\xi')=\det[b_j(\xi', \lambda_k(\xi'))],$$

即 $B(\xi')$ 是(38.19)的行列式, 同时, $B_j(\xi', t)$ 是同一个行列式, 但是其中用 $\{\exp(i\lambda_1(\xi')t), \cdots, \exp(i\lambda_{m_0}(\xi')t)\}$ 代替了 $\{b_j(\xi', \lambda_1(\xi')), \cdots, b_j(\xi', \lambda_{m_0}(\xi'))\}$ 这一行.

读者容易弄清(参阅习题 38.4), 公式 (38.22) 的值得注意的性质是, 即使在特征根不是相异的时候, 它仍然成立. 注意, (作为 ξ' 的函数), $\hat{F}_j$ 是有确切定义的: 事实上, 它们是位于上半平面的特征根的对称函数, 因而, 它们是变量 τ 的多项式

(38.24) $$M^+(\xi', \tau)=\prod_{j=1}^{m_0}(\tau-\lambda_j(\xi'))$$

的系数的函数. 因为特征根总不穿过实轴(只要 $\xi'\neq 0$), 因而 M^+ 的系数是 ξ' 的连续函数. 特别, 我们看到, 在一般情形中代替(38.20)的假设是:

(38.25) $J=m_0$, 且对于所有 $\xi'\in\mathbf{R}^{n-1}$, 函数 $\hat{F}_j(\xi', t)$ 是有限的.

当然, 这是加在比值 B_j/B 上的一个条件(不仅仅是加在分母 B 上的: B 可以为零, 但此时可以为零的因子必须被分子 B_j 中的同因子约去). (38.25)有一个精致的重新叙述方式:

(38.26) τ 的多项式 $b_j(\xi', \tau)$ $(j=1, \cdots, J=m_0)$ 是以 $M^+(\xi', \tau)$ 为模地线性无关的,

我们把它的证明留给读者(习题 38.6). 显然, 条件(38.13)有一个"不变的"提法. 这个条件牵涉到 Ω 的边界 $\partial\Omega$ (没有假定它已经拉平)的法线(或更确切地说, 余法线)和边界算子 $B_j(x, D_x)$ (明确地说, 它们的主部), 同样也牵涉到算子 $M^+(x, D_x)$——它由 $P(x,$

D_x) 的主部 $P_m(x, D_x)$ 所导出(就象从 $p(D_{x'}, D_t)$ 中导出 $M^+(D_{x'}, D_t)$ 一样). 在这里, 边界上的法方向起着 t 轴的作用. 我们把这个不变提法的叙述留给读者. 适合这种提法的边界算子常称为*覆盖* (cover) $P(x, D)$ 的, 或者, 和 $P(x, D)$ 相关的 *Lopatinski* (或 *Lopatinski-Shapiro*) *边界条件*.

为了完成(38.12)—(38.13)的解的构造, 我们还必须构造相应于 $\hat{g}_j=0$ (对所有的 $j=1, \cdots, m_0$) 时的齐次边界条件这一情形的解, 用 $\hat{v}$ 表示这个解. 我们用 §27 中构造 $\widehat{G_0 v}$ 的类似方法进行. 引进多项式

$$M^-(\xi', \tau)=\prod_{j=m_0+1}^{2m_0}(\tau-\lambda_j(\xi')). \tag{38.27}$$

再引进齐次方程

$$M^+(\xi', D_t)\hat{E}_+=0 \tag{38.28}$$

的解 $\hat{E}_+(\xi', t)$, 它满足初始条件

$$\partial_t^k \hat{E}_+(\xi', 0)=\begin{cases}0 & 若\ k<m_0-1, \\ 1 & 若\ k=m_0-1.\end{cases} \tag{38.29}$$

类似地, 用 $\hat{E}_-$ 表示 $M^-(\xi', D_t)\hat{E}_-=0$ 的类似的解. 自然, 当特征根互异时, $\hat{E}_+$ 具有(38.16)的形式, 其中常数 $C_j(\xi')$ 是适当选取的. 事实上,

$$\hat{E}_+(\xi', t)=\tilde{V}(\lambda_1, \cdots, \lambda_{m_0}; t)/V(\lambda_1, \cdots, \lambda_{m_0}), \tag{38.30}$$

其中 $V(\lambda_1, \cdots, \lambda_{m_0})$是 *Vandermonde 行列式* $\det\{(\lambda_j^{k-1})_{1\le j,k\le m_0}\}$ 而分子 $\tilde{V}(\lambda_1, \cdots, \lambda_{m_0}; t)$ 是这个 Vandermonde 行列式中, 用

$$\{\exp(i\lambda_1 t), \cdots, \exp(i\lambda_{m_0} t)\}$$

代替了最后一行 $\{\lambda_1^{m_0-1}, \cdots, \lambda_{m_0}^{m_0-1}\}$ 之后的行列式. 即使当这些根重合的时候, 表达式 (38.30) 仍然有效. 对于 $\hat{E}_-$, 我们也有用 $\lambda_j(j>m_0)$ 的类似表达式.

由 §4 中所述常微分方程的一般推理, 我们知道,

$$\hat{f}_1(\xi', t)=-\int_t^{+\infty}\hat{E}_-(\xi', t-t')\hat{f}(\xi', t')dt'$$

在 $t>0$ 时满足方程 $M^-(\xi', D_t)\hat{f}_1=\hat{f}$. 由于当 $j>m_0$ 时 λ_j 的虚

部的符号，以及从 t 到 $+\infty$ 的积分，因此，$\hat{f}_1$ 关于 ξ' 就是缓增的. 再令

$$\hat{w}(\xi', t) = -\int_0^t \int_{t'}^{+\infty} \hat{E}_+(\xi', t-t') \hat{E}_-(\xi', t'-t'') \hat{f}(\xi', t'') dt' dt'', \tag{38.31}$$

而适用于 $\hat{E}_+$ 的同样推理指出，当 $t>0$ 时 $M^+(\xi', D_t)\hat{w}=\hat{f}_1$，以及 $\hat{w}$ 关于 ξ' 是缓增的.

当 $t=0$ 时，对于所有的 $j=1, \cdots, m_0$，$\hat{w}$ 是否满足齐次边界条件 $b_j(\xi', D_t)\hat{w}=0$？如果它满足，就可以把 $\hat{w}$ 取为当所有 $\hat{g}_j=0$ 时(38.12)—(38.13)的解. 显然，当 $b_j(\xi', D_t)$ 的阶不超过 m_0-1 时(如在 Dirichlet 问题中那样)，这是对的；此时，$\hat{E}_+$ 的定义蕴涵着，$\hat{w}$ 的阶数 $<m_0$ 的所有导数在 $t=0$ 时等于零. 但是，如果对某个 j，b_j 的阶超过 m_0-1，事情就不一定是这样的了. 其实我们不必担心：从上面的推理，我们知道如何构造(38.15)的在 $t=0$ 时满足 $b_j(\xi', D_t)\hat{h}=b_j(\xi', D_t)\hat{w}$ $(j=1, \cdots, m_0)$ 的解 h，所以只需取 $\hat{v}=\hat{w}-\hat{h}$ 即可. 容易得到 $\hat{v}$ 的一个显式表示，因而就得到一般问题(38.12)—(38.13)的解 $\hat{u}=\hat{v}+\hat{v}_1+\cdots+\hat{v}_{m_0}$ 的显式表示.

我们来重新描述一下我们的做法. 首先，经过关于 ξ' 的 Fourier 逆变换，我们必须从 u 的表达式(用 $f, g_1, \cdots, g_{m_0}$ 表示)得到估计(38.8)(以及类似的伴随估计). 然后，必须从(38.8)推得(38.7). 还必须作出伴随问题的具体表现；并给它以类似的处理. 最后，必须证明这些估计，(38.7)以及对于伴随问题的类似估计，蕴涵着我们所需要的结论：以有限维核和余核为模的存在性和唯一性，解的直到边界的正规性. 当然，关于正规性的这一部分有着较高的技巧，在这里就不叙述了.

习　题

38.1　验证，Dirichlet 边界条件

$$\left.\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}\right|_{\partial\Omega} = g_j \in H^{m_0-j-1/2}(\partial\Omega), \quad j=0, \cdots, m_0-1 \tag{38.32}$$

"覆盖"每个 $2m_0$ 阶的强椭圆算子 $P(x, D)$(参阅定理 36.3).

38.2 §37.5 中所考虑的辐射问题和斜微商问题是否为 Lopatinski 型?

38.3 考虑斜微商问题 (37.44)—(37.45). 证明,如果函数 $\alpha\in C^\infty(\Gamma)$ 在 Γ 的某点处为零,则此问题不是 Lopatinski 型的.

38.4 考虑边值问题(38.9)—(38.10),假设 $m_0=J=2$,并设

(38.33) $$p(\xi',\tau)=(\tau-\lambda(\xi'))^2(\tau-\mu(\xi'))^2,$$

其中,对任一 $\xi'\neq0(\xi'\in\mathbf{R}_{n-1})$ 有 $\operatorname{Im}\lambda>0$, $\operatorname{Im}\mu<0$. 证明,在这些假定下,在(38.30)中定义的函数是,

(38.34) $$\hat{E}_+(\xi',t)=te^{i\lambda(\xi')t},$$

而在(38.22)中定义的函数 $\hat{F}_j$ 则由

(38.35) $$\hat{F}_j(\xi',t)=\{D_\tau b_j(\xi',\lambda(\xi'))\}^{-1}te^{i\lambda(\xi')t}$$

给出,其中 $D_\tau=-i\partial/\partial\tau$.

38.5 考虑边界问题(38.9)—(38.10),取 $p(D)=\Delta^2$(Δ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的 Laplace 算子), $b_1(D)=\Delta$, $b_2(D)=\Delta D_{x^n}$($D_{x^j}=-i\partial/\partial x^j$). 在这个情形中,计算 $\hat{E}_\pm(\xi',t)$ 和 $\hat{F}_j(\xi',t)$, $j=1,2$. (参阅习题 37.8 和习题 37.9.)

38.6 证明,条件(38.25)和(38.26)是等价的.

38.7 令 Δ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的 Laplace 算子,在 $\mathbf{R}^2$ 中我们用极坐标 r,θ. 令 Ω 是开单位圆盘 $r<1$, Γ 是单位圆周 $r=1$. 描述所有的一阶算子 $B(D_\theta,D_r)$,它使得

(38.36) $$\Delta u=f\in L^2(\Omega)\quad 在\ \Omega\ 中,$$

(38.37) $$B(D_\theta,D_r)u=g\in H^{1/2}(\Gamma)\quad 在\ \Gamma\ 上$$

是 Lopatinski 边值问题.

38.8 令 $P(x,D)$是 $\bar{\Omega}$ 上的 $m=2m_0$ 阶的强椭圆算子[这样, $P(x,D)$ 满足(38.14)]. 对于 $j=1,\cdots,J=m_0$,令 $B_j=(\partial/\partial\nu)^{m_j}$,其中 $m_1<m_2<\cdots<m_J<2m_0-1$. 证明,此边界算子组覆盖 $P(x,D)$(参阅第 361—362 页; $\partial/\partial\nu$ 是沿着 Γ 的外法向的微商).

38.9 记号同习题 38.8. 对于 $j=J+1,\cdots,2m_0$,令 $B_j^\natural=(\partial/\partial\nu)^{m_j}$,其中 $m_{J+1}<\cdots<m_{2J}<2m_0-1$,使得 $\{m_1,\cdots,m_{2J}\}$ 是区间 $\{0,1,\cdots,2m_0-1\}\subset\mathbf{Z}_+$ 的一个排列. 令 $P(x,D)^*$ 是 $P(x,D)$的形式伴随算子(参阅注 37.2). 证明,存在 $2J$ 个唯一确定的边界算子 $C_1,\cdots,C_J,C_{J+1}^\natural,\cdots,C_{2J}^\natural$,具有下述两个性质:

(38.38) C_j 的阶是 $2m_0-1-m_{J+j}$, $C_j^\natural$ 的阶是 $2m_0-1-m_j$,

(38.39) 对于所有的 $u,v\in C^\infty(\bar{\Omega})$,有

$$\int_{\Omega}(P(x,\ D)u)\bar{v}\,dx-\int_{\Omega}u\overline{P(x,\ D)^{*}v}\,dx$$
$$=\sum_{J=1}^{J}\left(\int_{\Gamma}B_{j}u\overline{C_{J+j}v}\,d\sigma-\int_{\Gamma}B_{J+j}u\overline{C_{j}v}\,d\sigma\right).$$

由$(P(x,\ D)^{*},\ C_{1},\ \cdots,C_{J})$定义的边值问题有时称为由$(P(x,\ D),\ B_{1},\ \cdots,\ B_{J})$定义的边值问题的伴随问题．公式(38.39)称为广义 *Green* 公式．

38.10　用与习题 38.9 中相同的记号．将$P(x,\ D)$取为$\overline{\Omega}$上的二阶强椭圆微分算子，$J=1$ 和 $B_{1}=I$(恒等算子)．述叙其伴随边界问题，并将其与 § 37.3 中的问题相比较．

38.11　用习题 38.9 中相同的记号．令$P(x,\ D)$是$\overline{\Omega}$上$m=2m_{0}$阶的任一强椭圆算子；取$J=m_{0}$和$B_{j}=(\partial/\partial\nu)^{j-1}$($\partial/\partial\nu$ 是沿着 Γ 的外法向的微商)．叙述其伴随问题．

第 IV 章

混合问题和发展方程

39. 取值于 Banach 空间中的函数和广义函数

我们在下一节将会看到，混合问题兼备 Cauchy 问题的某些特性(第 II 章)和由边值问题而来的某些特性(第 III 章)．因为在 Cauchy 问题中有 $n+1$ 个自变量：n 个“空间”变量 $x=(x^1, \cdots, x^n)$ 和一个“时间”变量 t，因而我们将考虑定义在一“柱体”$\Omega\times]0, T[$ 中的函数和广义函数，其中 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的一开子集(x 在其中变动)，T 是一大于零的数(这样，t 就在区间$]0, T[$，或实轴的任一区间中变动)．把(x, t)的这些函数视作 t 的函数，取值于变量 x 的一函数空间中，是极为方便的：通常，这里所说的变量 x 的函数空间将是 Sobolev 空间 $H^1(\Omega)$，$H^1_0(\Omega)$，$H^{-1}(\Omega)$，$\cdots$ 之一．这样一种途径导致相当简便的推理，并且，正如应该期望的，还导致极为一般的结论，于是可应用于各种不同的情形——通常超出作为出发点而用的那些情形的范围．但是它有一个明显的不利之处，即要求读者熟悉取值于无穷维线性空间中的函数和广义函数．

这一节的目的是提供有关这样的函数和广义函数的一些基本事实．限于我们的需要，在这一章的其它部分中，这些基本事实将是纯量情形的直接推广．它们几乎不需要特殊的声明，并且，在很大程度上，我们这里的意图与其说是数学上的，不如说是心理上的：我们希望使读者相信，在取值于(复)Hilbert 空间中和取值于纯量空间中的广义函数之间没有很大的差别．本质上，相同的规则适用于此两者．

39.1 取值于 Banach 空间中的函数的连续性和可微性

令 J 表示实直线上的一开区间 $T_0<t<T_1$. 下文中，它也许被 $d(d\geqslant1)$ 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^d$ 的一开子集，或者被一光滑流形所代替. 我们将首先研究定义于 J 中而取值于一复 Banach 空间 $\mathbf{E}$ 中的函数. 因为 $\mathbf{E}$ 是一拓扑空间，所以，当说到这样一个函数 $\mathbf{f}$ 在 J 的某点 t 处或在 J 的某个子集中连续,其含义是显然的. 说 $\mathbf{f}$ 在 t 处可微，也同样显然：这意味着当 $h\neq0$ 收敛于 0(h 是小实数)时差商

$$\delta_h\mathbf{f}(t)=h^{-1}\{\mathbf{f}(t+h)-\mathbf{f}(t)\} \tag{39.1}$$

在 $\mathbf{E}$ 中收敛. 注意,此定义充分利用了 $\mathbf{E}$ 是一拓扑线性空间这一事实：除了收敛性以外，我们还用了向量减法和向量的纯量乘法. $\delta_h\mathbf{f}(t)$ 的极限是 $\mathbf{f}$ 在 t 处的导数 $\mathbf{f}'(t)$ [或 $(d\mathbf{f}/dt)(t)$，或 $\dot{\mathbf{f}}(t)$]. 如果对于 J 的任一点 t 它都存在，那么它定义 J 中的一个函数 $\mathbf{f}'$. 如果此函数是连续的,我们就说 $\mathbf{f}$ 是一次连续可微的,或是 C^1 的. 更一般地,对于任何 k, $1\leqslant k\leqslant+\infty$, 我们说 $\mathbf{f}$ 是 C^k 的，或者是 k 次连续可微的,如果对于每个 $k'<k$, $\mathbf{f}'$ 是 $C^{k'}$ 的.

我们说，$\mathbf{f}$ 在 J 中是解析的，如果对任何 $t_0\in J$, $\mathbf{f}$ 在 t_0 处的 Taylor 级数

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\mathbf{f}^{k}(t_0)(t-t_0)^k \tag{39.2}$$

在 t_0 在 J 内某紧邻域中,在 $\mathbf{E}$ 中一致收敛. 这蕴涵着,对于 J 在复平面 $\mathbf{C}$ 中的某个开邻域 U, $\mathbf{f}$ 可延拓为 U 中复值 t 的一全纯函数. $\mathbf{f}$ 在 U 中是全纯的这一事实意味着，对于任何 $t\in U$, 当 $h\neq0$ 在复平面中收敛于零时,商(39.1)在 $\mathbf{E}$ 中收敛.

应该注意,我们可赋予 $\mathbf{E}$ 以不同于(至少当 $\dim\mathbf{E}=+\infty$ 时)由范数所决定的拓扑，然而在许多情形，仍然与其线性结构相容，例如，与弱拓扑 $\sigma(\mathbf{E},\ \mathbf{E}^*)$ 相容，或者与 $\mathbf{E}$ 的对偶空间 $\mathbf{E}^*$ 的紧子

集上的一致收敛性拓扑相容. 这就导致了取值于 $\mathbf{E}$ 中的连续函数、连续可微函数、解析函数的不同的类: 例如, 这样一个函数 $\mathbf{f}$ 是弱(或称纯量)连续(或连续可微, 或解析)的, 如果每个纯量函数

$$(39.3)\qquad t\mapsto\langle\mathbf{x}^*, \mathbf{f}(t)\rangle, \quad \mathbf{x}^*\in\mathbf{E}^*$$

(其中的括号表示 $\mathbf{E}$ 与其拓扑对偶 $\mathbf{E}^*$ 间的对偶性)是连续(或连续可微, 或解析)的. 这里, 我们将不探讨不同的函数类之间的关系问题, 这些函数类是用 $\mathbf{E}$ 上不同的线性(局部凸)拓扑所定义的(参阅习题 39.2 和 39.3).

39.2 取值于 Banach 空间中的函数的积分

一个连续函数 $\mathbf{f}$: $J\to\mathbf{E}$ 的 *Riemann* 积分的定义是直接的:

$$(39.4)\qquad \int_{T_0}^{T_1}\mathbf{f}(t)\,dt$$

是 Riemann 和

$$(39.5)\qquad \sum_{T_0<t_1<\cdots<t_k<T_1}\mathbf{f}(t_j')\,(t_{j+1}-t_j)$$

的极限. 从 $\mathbf{E}$ 是完备的这一事实直接推得这些 Riemann 和组成一收敛网(当 $\mathbf{f}$ 是连续的时候). 对于函数 $\mathbf{f}\in L^1(J;\,\mathbf{E})$, 运算(39.4)拓广为 *Lebesgue* 积分.

不难定义 Lebesgue 空间 $L^p(J;\,\mathbf{E})\,(1\leqslant p<+\infty)$. 这只需在自然范数

$$(39.6)\qquad \left(\int_J\|\mathbf{f}(t)\|_{\mathbf{E}}^p\,dt\right)^{1/p}\quad(=\|\mathbf{f}\|_{L^p})$$

下, 把具有紧支集的 $\mathbf{E}$ 值连续函数的线性空间 $C_c^0(J;\,\mathbf{E})$ 完备化即可. 此定义所引起的麻烦在于, $L^p(J;\,\mathbf{E})$ 的元素是"理想对象". 为了把它们看作模(modulo)标准等价关系——几乎处处(a.e.)相等——的函数类, 就要求介绍 Lebesgue 理论的标准概念, 首先是可测函数的概念. 为了简单起见, 我们将遵照 Lusin 方式来叙述:

定义 39.1 函数 $\mathbf{f}$: $J\to\mathbf{E}$ 是可测的, 如果对于任给紧集 $K\subset J$ 和任一数 $\varepsilon>0$, 存在 K 的一个紧子集 K', 使得 $K\backslash K'$ 的测度小

于 ε，并使得 $\mathbf{f}$ 在 K' 的限制是连续的.

然后，我们可以引进空间 $\mathscr{L}^p(J;\ \mathbf{E})$，它由具有下述两个性质的函数 $\mathbf{f}$: $J \to \mathbf{E}$ 组成：(i) $\mathbf{f}$ 是可测的；(ii) $\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{E}}$ 属于"纯量"空间 $L^p(J) = L^p(J;\ \mathbf{C})$. 对于 $p = +\infty$，这个定义也有效. 注意，如果 $\mathbf{f}$ 是可测的(取值于 $\mathbf{E}$ 中)，那么，其范数 $\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{E}}$ 也是可测的(取值于 $\mathbf{R}_+$ 中). 再令 $\mathscr{N}^p$ 是 $\mathscr{L}^p(J;\ \mathbf{E})$ 的一线性子空间，它由这样的函数 $\mathbf{f}$ 组成：$\mathbf{f}$ 几乎处处等于零，或者，等价地，

$$(39.7)\qquad \int_J \|\mathbf{f}(t)\|_{\mathbf{E}}^p\, dt = 0.$$

可把 $C_c^0(J;\ \mathbf{E})$ 关于范数(39.6)的完备化 $L^p(J;\ \mathbf{E})$ 等同于商空间 $\mathscr{L}^p(J;\ \mathbf{E})/\mathscr{N}^p$——也是在范数的意义下，如果赋予后者以从(39.6)[它可视作 $\mathscr{L}^p(J;\ \mathbf{E})$ 上的一个半范]而得的商范数. 商 Banach 空间 $\mathscr{L}^\infty(J;\ \mathbf{E})/\mathscr{N}^\infty$ 是空间 $L^\infty(J;\ \mathbf{E})$.

读者必须注意，虽然每个 $L^p(J;\mathbf{E})(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$ 都是 Banach 空间，但是，一般地，如果 $\mathbf{E}$ 本身不是一 *Hilbert* 空间，则 $L^2(J;\mathbf{E})$ 也不是 Hilbert 空间，并且，如果 $\mathbf{E}$ 本身不是自反的. 则 $L^p(J;\ \mathbf{E})$ $(1 < p < +\infty)$ 也不是自反的. 然而，如果 $\mathbf{E}^*$ 是 $\mathbf{E}$ 的对偶空间，它被赋予对偶 Banach 空间结构，那么对于 $1 \leqslant p < +\infty$，$L^p(J;\ \mathbf{E})$ 的对偶空间典则地等同于 $L^q(J;\mathbf{E}^*)$，$q = p/(p-1)$. 其对偶性表示为

$$(39.8)\qquad \mathbf{f} \mapsto \langle \mathbf{f},\ \mathbf{g} \rangle = \int_J \langle \mathbf{f}(t),\ \mathbf{g}(t) \rangle dt,\ \mathbf{g} \in L^q(J;\mathbf{E}^*).$$

当 $\mathbf{E}$ 是一 Hilbert 空间时，$L^2(J;\ \mathbf{E})$ 被赋予由内(Hermite)积

$$(39.9)\qquad (\mathbf{f},\ \mathbf{g})_{L^2(J;\mathbf{E})} = \int_J (\mathbf{f}(t),\ \mathbf{g}(t))_{\mathbf{E}}\, dt$$

确定的典则 Hilbert 空间结构. 与上面的注意有关的，我们还可以注意，当 $\mathbf{E}$ 是一 Hilbert 空间时，*Fourier* 变换(关于变量 t 的)

$$(39.10)\qquad \hat{\mathbf{f}}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\tau t} \mathbf{f}(t)\, dt$$

确定了 $L^2(\mathbf{R}_t^1;\ \mathbf{E})$ 和 $L^2(\mathbf{R}_\tau^1;\ \mathbf{E})$ 之间一个同构(关于 Hilbert 空间结构). 自然，当 $\mathbf{E}$ 不是一 Hilbert 空间时，这不再是对的. 当 $\mathbf{E}$

只是一个 Banach 空间，且 $L^2(\mathbf{R}^1;\ \mathbf{E})$ 赋有典则的 Banach 空间结构时，对于潜在于 Banach 空间结构中的局部凸结构而言，Fourier 变换是一个同构，而对于 Banach 空间结构而言则不然：更明确地说，Plancherel 公式不再成立（习题 39.6）.

39.3 取值于 Banach 空间中的广义函数

J 中的一个纯量广义函数 T 是一连续线性映射 $C_c^\infty(J) \to \mathbf{C}$. 因而，我们把 $\mathbf{E}$ 值广义函数定义为一连续线性映射 $C_c^\infty(J) \to \mathbf{E}$ 是自然的. 这样的广义函数空间将用 $\mathscr{D}'(J;\ \mathbf{E})$ 表示. 它被赋以在 $C_c^\infty(J)$ 的有界子集上（取值于 $\mathbf{E}$ 中的映射的）一致收敛性拓扑. 取值于 $\mathbf{E}$ 中的任一局部 L^1 函数 $\mathbf{f}$ 通过公式

$$(39.11)\qquad \phi \mapsto \int \phi(t)\mathbf{f}(t)\,dt, \quad \phi \in C_c^\infty(J),$$

定义一个 $\mathbf{E}$ 值广义函数. 如在纯量情形中一样，(39.11) 定义一个从 $L^1_{\mathrm{loc}}(J;\ \mathbf{E})$ 到 $\mathscr{D}'(J;\ \mathbf{E})$ 中的内射（关于自然拓扑，此内射映射是连续的）. $L^1_{\mathrm{loc}}(J;\ \mathbf{E})$ 的任一元素，看作一广义函数时称为一个*函数*. J 中的一个取值于 $\mathbf{E}$ 中的广义函数 $\mathbf{T}$，称为 J 中的一个取值于 $\mathbf{E}$ 中的 *Radon 测度*，如果它可延拓为一连续线性映射 $C_c^0(J) \to \mathbf{E}$. 自然，函数是 Radon 测度的特殊情形：$L^1_{\mathrm{loc}}(J;\mathbf{E}) \subset \mathscr{M}(J;\mathbf{E})$.

广义函数的一些标准运算可以象纯量情形中那样定义，例如，广义函数的导数：

$$(39.12)\qquad \partial_t \mathbf{T}(\phi) = -\mathbf{T}(\partial_t \phi), \qquad \partial_t = \frac{d}{dt},$$

或者，乘以一纯量 C^∞ 函数 α 的乘法：

$$(39.13)\qquad \alpha\mathbf{T}(\phi) = \mathbf{T}(\alpha\phi).$$

象张量积和卷积这样的二元运算，是需要审慎对待的，因为这里所考虑的广义函数的值域间未必有一配对（pairing）. 在这一节的末尾我们再回到这个重要的问题. 自然，在广义函数之间——这些广义函数都是纯量的，除了可能有一个例外——定义张量积是没有困难的. 我们把它留给读者.

对于 $\mathbf{E}$ 值广义函数，局部结构定理成立；这是因为 $\mathbf{E}$ 是赋范的. 一般地，当 $\mathbf{E}$ 是一局部凸空间，例如，是一 Fréchet 空间但不是一 Banach 空间时，此定理不成立. 这样，当 $\mathbf{E}$ 是一 Banach 空间，$\mathbf{T}$ 是 J 中一个任意的 $\mathbf{E}$ 值广义函数，J' 是 J 的一个任意的相对紧开子集时，我们可以写

$$\mathbf{T}=\sum_{k=0}^{M}\partial_t^k\mathbf{f}_k \quad \text{在 } J' \text{ 中}, \tag{39.14}$$

其中，$\mathbf{f}_k$ 可取作 J 中的 $\mathbf{E}$ 值 Radon 测度，或连续函数，或 L^2 函数. 其证明与纯量的情形类似.

我们现在来定义一个 $\mathbf{E}$ 值缓增广义函数的 Fourier 变换. 首先，我们引进 $\mathbf{R}^1$ 中取值于 $\mathbf{E}$ 的 C^∞ 函数 $\mathbf{u}(t)$ 的空间 $\mathscr{S}(\mathbf{E})$，这些函数在无穷远处是速降的，即，使得

$$\sup_{t\in\mathbf{R}^1}\left\{(1+t^2)^k\sum_{j=0}^{M}\|\partial_t^j\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{E}}\right\}<+\infty, \tag{39.15}$$
$$k,\ M=0,\ 1,\ \cdots.$$

用(39.15)中的半范定义 $\mathscr{S}(\mathbf{E})$ 上的拓扑. 容易看到(正如在纯量的情形一样)，Fourier 变换(39.10)确定一个从 $\mathscr{S}(\mathbf{E})$ 到其自身上的同构. 然后，我们把 $\mathscr{S}'(\mathbf{E})$ 定义为连续线性映射 $\mathscr{S}=\mathscr{S}(\mathbf{C})\to\mathbf{E}$ 的空间，它等同于 $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^1;\ \mathbf{E})$ 的一子空间，称为实直线上缓增 $\mathbf{E}$ 值广义函数空间. $\mathscr{S}'(\mathbf{E})$ 的一元素 $\mathbf{T}$ 的 Fourier 变换 $\mathscr{F}\mathbf{T}$ 由下式定义：

$$(\mathscr{F}\mathbf{T})(\phi)=\mathbf{T}(\mathscr{F}\phi),\ \phi\in\mathscr{S}. \tag{39.16}$$

立即看到，在 $\mathscr{S}'(\mathbf{E})$ 上这样定义的 $\mathscr{F}$ 拓广了在 $L^2(\mathbf{R}^1;\ \mathbf{E})$ 上定义的 Fourier 变换(39.10). 它是从 $\mathscr{S}'(\mathbf{E})$ 到其自身上的一个同构. 如果 $\mathbf{E}=\mathbf{F}^*$，即一个 Banach 空间 $\mathbf{F}$ 的对偶空间，则 $\mathscr{F}$: $\mathscr{S}'(\mathbf{E})\to\mathscr{S}'(\mathbf{E})$ 是 $\mathscr{F}$: $\mathscr{S}(\mathbf{F})\to\mathscr{S}(\mathbf{F})$ 的转置. 自然，我们不能以此作为 $\mathscr{S}'(\mathbf{E})$ 上 Fourier 变换的定义，因为并非每个 Banach 空间都是另一 Banach 空间的对偶空间.

实直线上取值于 Banach 空间 $\mathbf{E}$ 中的 Sobolev 空间的定义遵从通常的手续：如果 s 是任一实数，则 $H^s(\mathbf{E})$ 就是 $\mathbf{E}$ 值缓增广义

函数 $\mathbf{u}$ 的空间，关于测度 $(1+\tau^2)^s d\tau$，其 Fourier 变换 $\hat{\mathbf{u}}(\tau)$ 属于空间 $L^2(\mathbf{R}^1;\ \mathbf{E})$. 当 $s'<s$ 时，我们有范数 $\leqslant 1$ 的连续内射 $H^s(\mathbf{E}) \hookrightarrow H^{s'}(\mathbf{E})$. 空间 $\mathscr{S}(\mathbf{E})$ 在每个 $H^s(\mathbf{E})$ 中稠，并且，$H^{-s}(\mathbf{E}^*)$ 典则等同于 $H^s(\mathbf{E})$ 的对偶空间. 这样，$H^s(\mathbf{E})$ 是自反的，当且仅当 $\mathbf{E}$ 是自反的. 当 $\mathbf{E}$ 是一 Hilbert 空间时，我们给 $H^s(\mathbf{E})$ 赋以由 $\mathbf{E}$ 的 Hilbert 空间结构导出的自然的 Hilbert 空间结构. 可用明显的方式定义局部 Sobolev 空间：$H^s_{\text{loc}}(J;\ \mathbf{E})$ 是定义在 J 中的这样的 $\mathbf{E}$ 值广义函数 $\mathbf{T}$ 的空间，它使得对于任何 $\alpha \in C_c^\infty(J)$，有 $\alpha\mathbf{T} \in H^s(\mathbf{E})$. 至于 $H^s_c(J;\ \mathbf{E})$，它是 $H^s(\mathbf{E})$ 的子空间，由 $H^s(\mathbf{E})$ 的具有包含在 J 中的紧支集的元素组成.

39.4 E 值广义函数的二元运算

作用于一对(或 N 个)广义函数和函数上，有多种运算，这些运算我们至今尚未研究过，然而它们对于分析过程是重要的，例如，一个广义函数与一个(光滑)函数的乘法，两个广义函数的卷积，两个广义函数的张量积(后者必定"依赖于"自变量). 其困难在于，对于可能属于不同线性空间的一对值域，也就是一对向量，我们必须给出一种"自然的"处理.

为了用统一的方式来处理这些情形，我们引进三个 Banach 空间 $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ 和一个连续双线性映射 β: $\mathbf{E}\times\mathbf{F}\to\mathbf{G}$. 我们来叙述这种映射的四个重要实例：

例 39.1 取 $\mathbf{F}=\mathbf{E}^*$($\mathbf{E}$ 的强对偶空间)和 $\mathbf{G}=\mathbf{C}$(复数域)，β 取为对偶性括号映射 $(\mathbf{e},\ \mathbf{e}^*)\mapsto\langle\mathbf{e}^*,\ \mathbf{e}\rangle$.

例 39.2 令 $\mathbf{E}=\mathbf{F}=\mathbf{G}$ 是一 Banach 代数，并令 β 是其中的乘法.

例 39.3 令 $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$ 是三个 Banach 空间，并令 $\mathbf{E}=L(\mathbf{X};\ \mathbf{Y})$，赋予了算子范数的有界线性算子 $\mathbf{X}\to\mathbf{Y}$ 的空间，以及 $\mathbf{F}=L(\mathbf{Y};\ \mathbf{Z})$，$\mathbf{G}=L(\mathbf{X};\mathbf{Z})$. 取 β 为复合映射 $(A,\ B)\mapsto B\circ A$.

例 39.4 上面三个例都是这个例的特殊情形：取 $\mathbf{F}=L(\mathbf{E};\mathbf{G})$，并

令 β 是映射 $(e, A)\mapsto Ae$.

我们把连续双线性映射 β: $\mathbf{E}\times\mathbf{F}\to\mathbf{G}$ 叫做一配对.

命题 39.1　如果 β 是一配对, $\mathbf{u}$(相应地, $\mathbf{v}$)是 $C_c^\infty(J;\mathbf{E})$[相应地, $C_c^\infty(J;\mathbf{F})$]的一元素, 那么, $t\mapsto\beta(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t))$ 属于 $C_c^\infty(J;\mathbf{G})$.

这个命题是明显的. 从闭图像定理立即得到, 双线性映射 (39.17)

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})\mapsto\beta(\mathbf{u}, \mathbf{v}):\ C_c^\infty(J;\ \mathbf{E})\times C_c^\infty(J;\ \mathbf{F})\to C_c^\infty(J;\ \mathbf{G})$$

对其两个变元的每一个是连续的. 现在考虑从 $C_c^\infty(J)$ 到 $\mathbf{G}$ 中的映射

$$\phi\mapsto\int\beta(\mathbf{u}(t),\ \mathbf{v}(t))\phi(t)dt. \tag{39.18}$$

可直接验证, 它是连续的, 因而确定 J 上的一个取值于 $\mathbf{G}$ 中的广义函数 $\mathbf{u}\underset{\beta}{\cdot}\mathbf{v}$. 对于固定的 $\mathbf{v}$, 利用 $C_c^\infty(J;\ \mathbf{E})$ 在 $\mathscr{D}'(J;\ \mathbf{E})$ 中的稠性, 可以把映射拓广到整个 $\mathscr{D}'(J;\ \mathbf{E})$ 上. 这样, 我们就定义了 J 中 $\mathbf{E}$ 值广义函数与 $\mathbf{F}$ 值 C^∞ 函数(也定义于 J 中)的 β 乘法. 可以验证, 此 β 乘法是一连续的双线性映射

$$\mathscr{D}'(J;\ \mathbf{E})\times C^\infty(J;\ \mathbf{F})\to\mathscr{D}'(J;\ \mathbf{G}).$$

读者不妨将此定义应用于例 39.1 至例 39.3. 读者将看到, 例如, 如果 $\mathbf{T}$ 是一 $\mathbf{E}$ 值广义函数, $A(t)$ 是一 t 的 C^∞ 函数, 取值于算子 Banach 空间 $L(\mathbf{E};\ \mathbf{G})$ 中, 则 $A(t)\mathbf{T}$ 定义一 $\mathbf{G}$ 值广义函数.

我们暂且用 x 表示 J 中的变量, 用 y 表示另一开区间 J' 中的变量. 令 $\mathbf{S}$(相应地, $\mathbf{T}$)是 J 中(相应地, J' 中)一 $\mathbf{E}$ 值(相应地, $\mathbf{F}$ 值)广义函数. 用与纯量情形相同的方法, 可以证明,

$$\phi(x,\ y)\mapsto\mathbf{T}_y(\phi(x,\ y))$$

是从 $C_c^\infty(J\times J')$ 到 $C_c^\infty(J;\ \mathbf{F})$ 中的一个连续线性映射. 因而, 可以作出配对 $\beta(\mathbf{S}_x,\ \mathbf{T}_y(\phi(x,\ y)))\in\mathscr{D}'(J;\ \mathbf{G})$. 如果 $\psi(x)$ 是具有紧支集在 J 中的任一纯量 C^∞ 函数, 它在 $\operatorname{supp}\phi$ 的 x 投影的一邻域中等于 1, 那么可以令

$$(\mathbf{S}_x\underset{\beta}{\otimes}\mathbf{T}_y)(\phi)=\beta(\mathbf{S}_x,\ \mathbf{T}_y(\phi(x,\ y)))(\psi). \tag{39.19}$$

可以立即验证, 定义 (39.19) 不依赖于截断函数 ψ 的选取. 将此应

用于可分解函数 $\phi(x, y)=\sum_{j=1}^{N}\phi_j^1(x)\phi_j^2(y)$，并利用关于广义函数的 Fubini 定理，我们还看到，为了完成定义，我们可以交换 x 和 y 的作用[即，先计算 $\mathbf{S}_x(\phi(x, y))\in C_c^\infty(J'; \mathbf{E})$，再作出 $\beta(\mathbf{S}_x(\phi(x, y)), \mathbf{T}_y)$]. 这样就定义了 β 张量积 $\mathbf{S}_x\underset{\beta}{\otimes}\mathbf{T}_y$: 它确定一个分别连续的双线性映射

$$\mathscr{D}'(J; \mathbf{E})\times\mathscr{D}'(J'; \mathbf{F})\to\mathscr{D}'(J\times J'; \mathbf{G}).$$

由此容易定义实直线上两个分别取值于 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{F}$ 中的广义函数的 β 卷积 $\mathbf{S}\underset{\beta}{*}\mathbf{T}$. 我们用公式

$$(39.20)\qquad (\mathbf{S}\underset{\beta}{*}\mathbf{T})(\phi)=(\mathbf{S}_x\underset{\beta}{\otimes}\mathbf{T}_y)(\phi(x+y)),\ \phi\in C_c^\infty(\mathbf{R}^1)$$

来定义 β 卷积. 公式(39.20)不是对任意的广义函数对都有意义：广义函数对 $\mathbf{S}$, $\mathbf{T}$ 必须是“可卷”的，即，关于它们的支集，或在无穷远处的衰减要满足一定的要求. 然而，当 $\mathbf{S}$ 和 $\mathbf{T}$ 之一有紧支集，或者，当 $\mathbf{S}$ 和 $\mathbf{T}$ 都属于 L^1(分别取值于 $\mathbf{E}$ 中和 $\mathbf{F}$ 中)时，(39.20)有意义.

还有很多可以提及的情形，但是在我们自己所规定的初等水平上，这些情形的大多数不过是纯量理论的简单重复. 对于 Fourier 变换(例如，Paley-Wiener-Schwartz 定理)、卷积，以及它们的相互关系而言，也是如此.

习　题

(在下面这些习题中，$\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ 表示复 Banach 空间，J 表示实直线的一个开区间，其中的变量是 t.)

39.1　令 m 是一非负整数，$A(t)$是 J 中的一 C^m 函数，取值于从 $\mathbf{E}$ 到 $\mathbf{F}$ 中的有界线性算子的 Banach 空间 $L(\mathbf{E}; \mathbf{F})$中. 证明，$A(t)$的转置 ${}^tA(t)$是 J 中的 C^m 函数，取值于 $L(\mathbf{F}^*; \mathbf{E}^*)$中(星标*表示对偶).

39.2　令 m 是一个$\geqslant 1$ 的整数，$\mathbf{u}(t)$是一个从 J 到 $\mathbf{E}$ 中的映射. 证明，如果对于 $\mathbf{E}$ 上任意的连续线性泛函 $\mathbf{x}^*$, J 中的复值函数$\langle\mathbf{x}^*, \mathbf{u}(t)\rangle$是 C^m 的，那么函数 $\mathbf{u}(t)$本身就是 C^{m-1} 的. [提示：首先证明，如果所有的函数$\langle\mathbf{x}^*, \mathbf{u}(t)\rangle(\mathbf{x}^*\in\mathbf{E}^*)$在 J 中是 Lipschitz 连续的，那么 $\mathbf{u}(t)$也是 Lipschitz

连续的.]

39.3　令 $\mathbf{H}$ 表示一 Hilbert 空间, $\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_m, \cdots$ 是 $\mathbf{H}$ 中的一完备规格化正交系(假设 $\dim\mathbf{H}=+\infty$). 考虑闭区间 $0\leqslant t\leqslant 1$ 中的函数 $\mathbf{u}(t)$, 它的定义如下:

$$\mathbf{u}(0)=0, \quad \mathbf{u}(t)=(1-\theta)\mathbf{e}_{m+1}+\theta\mathbf{e}_m$$

$$\text{当 } t=\theta(1/m)+(1-\theta)\frac{1}{m+1} \text{ 时} (0\leqslant\theta\leqslant 1).$$

证明,任给 $\mathbf{x}^*\in\mathbf{H}^*$, 纯量函数 $\langle\mathbf{x}^*, \mathbf{u}(t)\rangle$ 在 $[0, 1]$ 中是连续的, 然而, 作为取值于赋范空间 $\mathbf{H}$ 中的函数, $\mathbf{u}$ 在 $t=0$ 处不是连续的.

39.4　令 $\mathscr{O}$ 是复平面中的一个开子集,其中的变量用 z 表示. 令 β 表示从 $\mathbf{E}\times\mathbf{F}$ 到 $\mathbf{G}$ 中的一个连续双线性映射, $\mathbf{u}$(相应地, $\mathbf{v}$)是从 $\mathscr{O}$ 到 $\mathbf{E}$(相应地, $\mathbf{F}$)中的一个全纯映射. 证明, $\beta(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ 是从 $\mathscr{O}$ 到 $\mathbf{G}$ 中的全纯映射.

39.5　令 K 是实直线的一个紧区间, $\mathbf{f}(t)$ 是从 K 到 Banach 空间 $\mathbf{E}$ 中的一个连续映射. 证明,在 $\mathbf{E}$ 的对偶空间 $\mathbf{E}^*$ 上的线性泛函

$$\mathbf{x}^*\mapsto\int_K \langle\mathbf{x}^*, \mathbf{f}(t)\rangle dt \tag{39.21}$$

定义 $\mathbf{E}$ 的一个唯一的元素, 并证明这个元素等于 § 39.2 中定义的 Riemann 积分. 如果不假设 $\mathbf{E}$ 是完备的,而只假设它是赋范的,这个事实仍成立吗?

39.6　令 $\mathbf{E}$ 是二维空间(复) $\mathbf{C}^2$, 赋予范数

$$\|x\|_{\mathbf{E}}=\sup(|x^1|, |x^2|), \quad x=(x^1, x^2)\in\mathbf{C}^2.$$

给出实直线上 $\mathbf{E}$ 值 L^2 函数 $\mathbf{f}(t)$ 的一个例子,它的 Fourier 变换是 $\hat{\mathbf{f}}(\tau)$, 使得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\|\mathbf{f}(t)\|_{\mathbf{E}}^2\, dt\neq\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\|\hat{\mathbf{f}}(\tau)\|_{\mathbf{E}}^2\, d\tau. \tag{39.22}$$

39.7　描述具有下述性质的对 $(s, s')\in\mathbf{R}^2$ 的集合: 它使得在 $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$ 的对角线上的 Dirac 测度 $\delta(x-y)$, 作为变量 x 的广义函数,取值于 y 的广义函数空间中, 属于空间 $H^s(\mathbf{R}_x^n; H^{s'}(\mathbf{R}_y^n))$. 由此结论推导, 在 $\mathscr{D}'(\mathbf{R}_x^1; C^\infty(\mathbf{R}_y^1))$ 中局部结构定理不成立.

39.8　令 $\mathbf{H}$ 是一 Hilbert 空间, A 是 $\mathbf{H}$ 上一稠定的[1]、可能是无界的、自伴线性算子. 证明下述论断: 考虑定义于实直线上取值于 $\mathbf{H}$ 中的广义函数 $\mathbf{u}(t)$, 它是齐次方程

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt}=A\mathbf{u} \tag{39.23}$$

的一个解; 为了使每个这样的广义函数 $\mathbf{u}(t)$ 是 t 的 C^1 函数, 取值于 $\mathbf{H}$ 中, 必要和充分的条件是: A 是有界的. 因而, (39.23)的所有解都是实直线上 t 的解析函数, 取值于 $\mathbf{H}$ 中(事实上, 可把解延拓到复值 t, 成为 $\mathbf{C}$ 中的整函数).

1) 译者注: 即 A 的定义域在 $\mathbf{H}$ 中是稠的.

39.9 令 $\mathbf{E}$ 是一 Banach 空间，$\mathbf{f}$ 是一定义于实直线上并取值于 $\mathbf{E}$ 中的局部可积函数. 证明，存在 $\mathbf{R}^1$ 的一个 Lebesgue 测度为零的子集 S，和 $\mathbf{E}$ 的一个可分的闭线性子空间 $\mathbf{E}_0$，使得对于所有的 $t\in\mathbf{R}^1\backslash S$，有 $\mathbf{f}(t)\in\mathbf{E}_0$.

39.10 令 $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$ 是两个 Banach 空间，$L(\mathbf{E};\ \mathbf{F})$是从 $\mathbf{E}$ 到 $\mathbf{F}$ 中的有界线性算子的 Banach 空间，$t\mapsto A(t)$是从 $\mathbf{R}^1$ 到 $L(\mathbf{E};\ \mathbf{F})$中的一映射，它有下述性质:

(39.24) 给定任一 $\mathbf{u}\in\mathbf{E}$，任一 $\mathbf{v}^*\in\mathbf{F}^*$($\mathbf{F}$ 的对偶空间)，
$t\mapsto\langle A(t)\mathbf{u},\ \mathbf{v}^*\rangle$是 $\mathbf{R}^1$ 中的可测函数.

那么，对于 $\mathbf{R}^1$ 中任何 $\mathbf{E}$ 值可测函数 $\mathbf{u}(t)$，$A(t)\mathbf{u}(t)$是不是 $\mathbf{R}^1$ 中 $\mathbf{F}$ 值的可测函数?

39.11 令 $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$, $A(t)$如习题 39.10 中所述，但现在假设 $A(t)\in L^\infty(0,T;\ L(\mathbf{E};\ \mathbf{F}))$. 证明，$\mathbf{u}\mapsto A\mathbf{u}$ 是从 $L^2(0,\ T;\mathbf{E})$到 $L^2(0,\ T;\mathbf{F})$中的一个有界线性映射.

39.12 令 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中有 C^∞ 边界 Γ 的一个有界开子集，位于 Γ 的一侧. 令 m 是一个$\geqslant 1$ 的整数，并令 $g_j(\cdot,\ t)(j=0,\ 1,\ \cdots,\ m-1)$是闭区间$[0,\ T]$ $(T>0)$中 t 的 m 个 $C^k(0\leqslant k\leqslant+\infty$, k 不依赖于 $j)$函数，分别取值于 Sobolev 空间 $H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$中. 证明，存在一个 $t(0\leqslant t\leqslant T)$的 C^k 函数 g，取值于 $H^m(\Omega)$中，使得对每个 $j=0,\ 1,\ \cdots,\ m-1$，有

$$\gamma_j(g(\cdot,\ t))=\left.\frac{\partial^j g}{\partial\nu^j}\right|_\Gamma=g_j(\cdot,\ t),\quad 0\leqslant t\leqslant T.$$

39.13 令 $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$ 是两个 Banach 空间，$L_s(\mathbf{E};\ \mathbf{F})$是有界线性算子 $\mathbf{E}\to\mathbf{F}$ 的空间，赋予在 $\mathbf{E}$ 中点态收敛的拓扑. 令 X 是一个紧 Hausdorff 拓扑空间，$\mathbf{f}$ 是从 X 到 $\mathbf{E}$ 中的一个连续映射，A 是从 X 到 $L_s(\mathbf{E};\ \mathbf{F})$中的一个连续线性映射. 问，$A\mathbf{f}$ 是从 X 到 $\mathbf{F}$ 中的连续映射这一论断是对的吗?

40. 混合问题. 弱形式

考虑空间中由一超曲面 Γ 所界的区域(即，开集)Ω(这样，$\Gamma=\partial\Omega$). 假设 Ω 中充满着物质，例如，Ω 是一堵墙，或是一金属棒，并设 Γ 上用某个热(或者，冷)装置维持于某一温度 g. 我们想研究在 Ω 的各点处的温度. 自然，它将随着时间而变，因为热从界面向内部扩散: 它是空间和时间的函数 $u=u(x,\ t)$. 它还将依赖于它的初值，即依赖于开始加热界面 Γ 的那个时刻(通常取作

原点)的温度分布. 在时刻 $t=0$, 这温度分布将用 $u_0(x)$ 表示. 注意, 在 Γ 上维持的温度 g 对于空间而言不必是均匀的, 它可以逐点不同; 换言之, 它可以依赖于 x. 事实上, 它也许还随时间而变, 因而 $g=g(x, t)$. 一个非常简单的推理——它基于在充满 Ω 的物质内部从原子到原子的热转移方式——指出, 关于空间和时间, Ω 中温度 u 的变化服从(在某种逼近程度下)热导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\,\Delta u, \tag{40.1}$$

其中, k 是传导性常数, 它依赖于充满区域 Ω 的物质的属性. 只要这种物质是均匀的(即, 它的由 k 所反映的特征不依赖于 x, 当然, 它原来就不依赖于 t), 各向同性的(热在各个方向的传播是相同的), 并且在 Ω 的内部没有(例如起因于化学反应的)热的发生或吸收, 那么方程(40.1)是有效的. 在有热发生或吸收的情形, 方程(40.1)应由非齐次热导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\,\Delta u+f \tag{40.2}$$

代替, 其中 $f=f(x, t)$ 是 Ω 中的一函数, 它描述热的发生或吸收. 在处理更复杂的过程时, 例如当失去均匀性和各向同性性时, 我们也许不得不用更一般的二阶椭圆(参阅定义 23.2)微分算子

$$A=A\left(x,\ t,\ \frac{\partial}{\partial x}\right)=-\sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}(x,\ t)\frac{\partial^2}{\partial x^i\,\partial x^j}+\sum_{j=1}^{n}a^{j}(x,\ t)\frac{\partial}{\partial x^j}+c(x,\ t) \tag{40.3}$$

来代替 $-k\Delta$, 实际上, 我们还将考察(40.2)的类似方程, 其中用 $A(x, t, \partial/\partial x)$ 代替了 $-k\Delta$. 但是, 在方程(40.2)(其中, 可能在经过单位改变后, 可设 $k=1$)的情形, 记住我们将要研究的问题的含义是有用的. 这样, 假设 u 表示区域 Ω 中的温度, 它由初始温度 u_0 和界面温度 g 确定. 我们有

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\Delta u+f(x,\ t)\quad 在\ \Omega\ 中, \tag{40.4}$$

$$u=u_0(x)\quad 在\ \Omega\ 中\ 当\ t=0\ 时, \tag{40.5}$$

(40.6) $u=g(x, t)$ 在 Γ 上, 对每个 $t>0$.

在(40.6)中, 我们看到了在 Dirichlet 问题中曾经遇到过的那类边界条件. 另一方面, (40.5)类似于 Cauchy 问题中的初始条件. 由于这两种类似性, 通常把问题(40.4)—(40.5)—(40.6)称为混合问题.

我们指出, 与(40.4)—(40.5)相联的边界条件不必是 Dirichlet 类型的. 它完全可以是 Neumann 类型的(参阅 § 37): 我们不是给出 Γ 上的温度, 而是给出通过 Γ 的热流(或流量). 这相当于用一个新的条件(参阅 § 37.1):

(40.7) $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}=h(x, t)$ 在 Γ 上, 对每个 $t>0$

代替(40.6); 在(40.7)中, 如通常一样, $\partial/\partial\nu$ 表示在 Γ 的点 x 处的法微商. 我们还可以提出一种"混杂"型的边界条件: 在边界的某部分给出温度, 同时, 在边界的其余部分给出热流. 记

$$\Gamma=\Gamma_0\cup\Gamma_1, \quad \Gamma_0\cap\Gamma_1=\emptyset,$$

并要求(参阅 § 37.2)

(40.8) $u=g(x, t)$ 在 Γ_0 上,

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}=h(x, t) \text{ 在 } \Gamma_1 \text{ 上, 对每个 } t>0.$$

热导算子 $\partial/\partial t-\Delta$ 是抛物算子的原型. 然而, 可以对不同于抛物算子的一些算子提出混合问题, 例如, 对于双曲算子: 如果所研究的双曲算子是二阶的, 那么, 根据 Cauchy 问题的要求, 将有两个初始条件: 必须事先指定 u 和其关于时间 t 的一阶导数 $\partial u/\partial t$ 在 $t=0$ 时的值. 在声学中, 或在电磁学中, 自然地产生了二阶双曲方程(和方程组)的混合问题, 例如, 为了描述在一产生噪声的房间中气压的发展, 或者, 为了描述在空间的某个区域中电磁场的发展(在后一例中, 我们处理的是一方程组, 明确一些, 就是 Maxwell 方程组), 等等, 双曲方程混合问题的最简单的例子具有下述形式:

(40.9)　$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\Delta u+f(x,\ t)\quad 在\ \Omega\ 中,$$

(40.10)　$$u=u_0(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}=u_1(x)\quad 在\ \Omega\ 中,当\ t=0\ 时,$$

(40.11)　$$u=g(x,\ t)\quad 在\ \Gamma\ 上,对每个\ t>0.$$

在物理应用中，(40.9)右端的 Laplace 算子之前，应该有一个 V^2 形式的因子(V 表示速度)．这里，我们假设空间和时间单位的选取使得 $V=1$． Dirichlet 边界条件 (40.11) 可用不同类型的边界条件来代替，例如，用 Neumann 类型的条件，或者，用 Dirichlet 条件和 Neumann 条件的混合来代替，正象在抛物的情形中一样．

我们将把注意力主要集中于具有 Dirichlet 边界条件的抛物型方程的混合问题上，而(40.4)—(40.5)—(40.6)即为这样的问题的原型．但我们将考虑这样的情形，其中 $-\Delta$ 将用一个象在(40.3)中给出的更一般的椭圆算子 A 来代替．另一方面，把时间 t 的变化限制于某个区间$[0,\ T]$ $(T>0)$中是方便的，虽然在某些情形中我们仍将要求 t 从 $-\infty$，或从 0 变到 $+\infty$．这样，我们打算研究的问题即为下述问题：

(40.12)
$$\frac{\partial u}{\partial t}+A\left(x,\ t,\ \frac{\partial}{\partial x}\right)u=f(x,\ t)\quad 在\ \Omega\times]0,\ T\,[中,$$

(40.13)　$$u(x,\ 0)=u_0(x)\quad 在\ \Omega\ 中,$$

(40.14)　$$u(x,\ t)=g(x,\ t)\quad 在\ \Gamma\times]0,\ T[\ 中\ .$$

我们将用较明确的语言来叙述关于这个问题的数据所作的假设．在下面几节中，我们还将研究这个问题的某些变形，例如，边界条件 (40.14) 换为 (40.7) 或(40.8)(如对于双曲型混合问题(40.9)—(40.10)—(40.11)所能做的那样)．我们主要用变分方法，即处理弱问题，因而考虑 Sobolev 空间 $H^m(\Omega)$, $H_0^m(\Omega)$, $H^{-m}(\Omega)$, …(参阅 §§ 22 和 23)．

首先，我们必须对微分算子 A 的假设作一确切的叙述．将其写成变分形式[参阅(23.6)]

$$(40.15)\qquad A\left(x,\ t,\ \frac{\partial}{\partial x}\right)=-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^i}\ a^{ij}(x,\ t)\frac{\partial}{\partial x^j}+\sum_{j=1}^{n}b^j(x,\ t)\frac{\partial}{\partial x^j}+c(x,\ t)$$

是方便的．我们从关于系数的属性的假设开始：

(40.16)

$a^{ij},\ b^j,\ c\in L^\infty(\Omega\times]0,\ T[)$　对于所有的 $i,\ j=1,\ \cdots,\ n$.

现在，我们来叙述下述结果：

引理 40.1　如果(40.16)成立，则 $A(x,\ t,\ \partial/\partial x)$ 确定一个有界线性算子

$$L^2(0,\ T;\ H^1(\Omega))\to L^2(0,\ T;\ H^{-1}(\Omega)).$$

证明　只需证明用 $(\partial/\partial x^i)a^{ij}(x,\ t)(\partial/\partial x^j)$, $b^j(x,\ t)\partial/\partial x^j$, $c(x,t)$ 中的任一项代替 A 时引理结论成立即可．因为 $\partial/\partial x^j$ 是一有界线性算子 $L^2(0,\ T;\ H^m(\Omega))\to L^2(0,\ T;\ H^{m-1}(\Omega))$, $m=\cdots,\ -1,\ 0,\ 1,\ \cdots$，因而只需证明与

$$L^\infty(\Omega\times]0,\ T[)$$

的任一元素的乘法确定一个从 $L^2(0,T;\ H^0(\Omega))=L^2(\Omega\times]0,T[)$ 到其自身中的有界线性算子即可，而这是熟知的．　　证毕．

现在我们来给出关于 A 的椭圆性假设．它将强于(23.13)中描述的标准的一致椭圆性．特别，如果它对于 A 是成立的，那么对于 $-A$，它将不成立．注意，从 A 到 $-A$ 的改变，粗略地说，相应于时间的逆转．但是，抛物型问题在时间的逆转下不是不变的——不象双曲型问题那样(一般而言)．这与要把已经扩散到某物质中的热送回(原处)(或者，与要把一经损坏无法修复的东西重新修复)这样一种困难有关．总而言之，我们的条件将是

(40.17)　对于某个 $c_0>0$ 和(几乎)每个 $(x,\ t)\in\Omega\times]0,\ T[$:

$$(40.18)\qquad c_0|\zeta|^2\leqslant\mathrm{Re}\sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}(x,\ t)\zeta_i\bar{\zeta}_j\quad 对于所有的\ \zeta\in\mathbf{C}^n.$$

我们指出一个使得(40.17)成立的简单的，然而是重要的情形．这就是当系数 a^{ij} 是实对称的，即，$a^{ij}=a^{ji}$，并且二次型

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x,\ t)\zeta_i\bar{\zeta}_j$$

关于$(x,\ t)$是一致地正定的情形.

现在我们来解释边界条件. 与在“弱” Dirichlet 问题中的情形(§§ 22 和 23)相一致,我们假设,$g(x,\ t)$是 Γ 上的一个迹,依赖于t,更明确地,它是$t(0<t<T)$的一个函数,取值于迹空间$\mathrm{Tr}^1(\Omega)=H^1(\Omega)/H_0^1(\Omega)$中. 但是,正如在 Dirichlet 问题中一样,引进 g 的一个代表 $\tilde{g}=\tilde{g}(x,\ t)\in H^1(\Omega)$是方便的. 对于每个$t$,或对于几乎每个 t, $0<t<T$, $\tilde{g}$ 的迹,也就是,它在商空间 $\mathrm{Tr}^1(\Omega)$中的典则像,等于 g. 这时可以把条件(40.6)重新叙述为

(40.19) $\quad u-\tilde{g}\in H_0^1(\Omega)$ 对于几乎每个 t, $0<t<T$.

但是, 在现在的讨论中, 我们不能排斥有关所出现函数——或数据, 或未知函数——的正规性的问题. 我们必须确定应该给 $\tilde{g}$ 指定, 或对 u 要求什么样的关于 t 的正规性类型. 从经验的考虑出发,一个“好的”函数空间将是我们现在要定义的:

定义 40.1 用 $\boldsymbol{\Phi}$ 表示具有下述性质的函数 w 的空间:

(40.20)

$$w\in L^2(0,\ T;\ H^1(\Omega)),\quad \frac{dw}{dt}\in L^2(0,\ T;\ H^{-1}(\Omega)),$$

它被赋予自然范数

(40.21) $$\|w\|=\left(\int_0^T\{\|w(\cdot,\ t)\|_1^2+\|w_t(\cdot,\ t)\|_{-1}^2\}dt\right)^{1/2}.$$

立刻知道,$\boldsymbol{\Phi}$ 是一 Hilbert 空间,并且 $C^\infty([0,\ T];\ H^1(\Omega))$在其中稠. 如果我们考虑的对象多于一个区间$[0,\ T]$, 或者多于一个开集 Ω, 记号 $\boldsymbol{\Phi}$ 可能产生某种混乱. 更一般地, 我们应该引进空间 $\boldsymbol{\Phi}(a,\ b;\ \Omega)$. 但是因为我们给 $\boldsymbol{\Phi}$ 以一个形式定义的唯一目的是简化此后的叙述和证明,所以我们还是采用记号 $\boldsymbol{\Phi}$.

定义 40.2 用 $\boldsymbol{\Phi}_0$ 表示 $\boldsymbol{\Phi}$ 的一个子空间, 它由所有适合如下性质的函数 w 组成: 对于几乎每个 $t(0<t<T)$, 有 $w(\cdot,\ t)\in H_0^1(\Omega)$.

因为 $H_0^1(\Omega)$在 $H^1(\Omega)$中是闭的, 因而 $\boldsymbol{\Phi}_0$ 在 $\boldsymbol{\Phi}$ 中也是闭的. 我们将总是给 $\boldsymbol{\Phi}_0$ 赋予由 $\boldsymbol{\Phi}$ 的 Hilbert 空间结构诱导的结构.

条件(40.19)现在变为

(40.22) $$u-\tilde{g}\in\boldsymbol{\Phi}_0.$$

注意，每个函数 $w\in\boldsymbol{\Phi}$ 可被延拓到闭区间 $[0,T]$ 上成为一个取值于 $H^{-1}(\Omega)$ 中的绝对连续函数，因此，在 $+0$ 处它在 $H^{-1}(\Omega)$ 中有一极限. 我们可以用这种方式解释初始条件(40.13). 但是，寻找某种较强类型的连续性——不是在 $H^{-1}(\Omega)$ 中的，而是在 $H^0(\Omega)=L^2(\Omega)$ 中的连续性，是有好处的. 事实上，这将自动地达到，如果我们用 $\boldsymbol{\Phi}_0$ 代替 $\boldsymbol{\Phi}$，现在我们就来证明这一点. 给 $C^0([0,T];L^2(\Omega))$ 赋予"极大值范数"：

$$\sup_{0<t<T}\|u(\cdot,t)\|_0=\sup_{0<t<T}\left\{\int_\Omega|u(x,t)|^2dx\right\}^{1/2}.$$

引理 40.2 自然内射

(40.23) $$C^\infty([0,T];H_0^1(\Omega))\to C^0([0,T];L^2(\Omega))$$

可被延拓为一连续内射 $\boldsymbol{\Phi}_0\to C^0([0,T];L^2(\Omega))$.

证明 令 $u\in\boldsymbol{\Phi}_0$；在对称区间 $]-T,T[$ 上定义一函数 $\tilde{u}$：当 $t>0$ 时，令 $\tilde{u}(t)=u(t)$，当 $t<0$ 时，令 $\tilde{u}(t)=u(-t)$. 显然，$u\mapsto\tilde{u}$ 是一从 $\boldsymbol{\Phi}_0=\boldsymbol{\Phi}(0,T)$ 到 $\boldsymbol{\Phi}_0(-T,T)$ 中的连续内射. 现在令 $\alpha\in C^\infty(\mathbf{R})$，当 $t<-T$ 时 $\alpha(t)=0$，当 $t>0$ 时 $\alpha(t)=1$. 令 $u\in C^\infty([0,T];H_0^1(\Omega))$. 我们有

(40.24)

$$\begin{aligned}\|(\alpha\tilde{u})(\cdot,t)\|_0^2&=2\mathrm{Re}\int_{-T}^t\langle(\alpha\tilde{u})(\cdot,s),\ (\overline{\alpha\tilde{u}})_t(\cdot,s)\rangle ds\\&\leqslant\int_{-T}^T\{\|(\alpha\tilde{u})(\cdot,s)\|_1^2+\|(\alpha\tilde{u})_t(\cdot,s)\|_{-1}^2\}ds\\&\leqslant C(\alpha)\int_{-T}^T\{\|\tilde{u}(\cdot,s)\|_1^2+\|\tilde{u}_t(\cdot,s)\|_{-1}^2\}ds\\&\leqslant 2C(\alpha)\|u\|\end{aligned}$$

(因为映射 $u\mapsto\tilde{u}$ 有范数 2). 因为 $\alpha\tilde{u}$ 在 $[0,T]$ 上的限制等于 u，我们就知道，当 $C^\infty([0,T];H_0^1(\Omega))$ 赋有由 $\boldsymbol{\Phi}_0$ 诱导的范数 $\|\ \|$ [(40.21)所定义]时，自然内射(40.23)是连续的，因而它在 $\boldsymbol{\Phi}_0$[空

间 $C^\infty([0, T]; H_0^1(\Omega))$ 在其中稠]上有一唯一的连续延拓.

证毕.

这样, 可以把 Φ_0 的元素看作闭区间 $[0, T]$ 中的连续函数, 取值于 $L^2(\Omega)$ 中. 如果对于 Φ 的元素, 同一事实成立, 那么对于初始条件(40.13), 我们就有一个非常方便的解释. 实际上, 当 Ω 有界并有 C^1 边界(且 Ω 位于其边界的一侧)时, 情形就是这样(习题 40.4). 但是, 为了不失一般性, 我们将不对开集 Ω 的选择加以限制. 然而, 我们要对边界条件中的函数 g 的选取加以限制(很弱的): 要求当 $t \to +0$ 时, $\tilde{g}(\cdot, t)$ 在 $L^2(\Omega)$ 中收敛.

我们来叙述存在性和唯一性定理:

定理 40.1 假设在变分形式(40.15)中, $A(x, t, \partial/\partial x)$ 的系数 a^{ij}, b^j, c $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$ 都属于 $L^\infty(\Omega \times]0, T[)$, 并且 $A(x, t, \partial/\partial x)$ 满足椭圆性假设(40.17).

那么, 对于每个 $f \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$; 每个 $u_0 \in L^2(\Omega)$, 以及每个使得

(40.25) $$\frac{\partial \tilde{g}}{\partial t} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)),$$

(40.26) 当 $t>0$ 趋于零时, $\tilde{g}(\cdot, t)$ 在 $L^2(\Omega)$ 中收敛于某个函数 $\tilde{g}(\cdot, 0)$

的 $\tilde{g} \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$, 存在唯一的函数 $u \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$, 具有下述一些性质:

(40.27) $$\frac{\partial u}{\partial t} + A(x, t, \partial/\partial x)u = f \quad 在\ \Omega \times]0, T[\ 中,$$

(40.28) $$u(\cdot, t) - \tilde{g}(\cdot, t) \in H_0^1(\Omega) \quad 对于几乎每个\ t,\ 0<t<T,$$

(40.29) 当 $t \to +0$ 时 $u(\cdot, t)$ 在 $L^2(\Omega)$ 中收敛于 u_0.

注 40.1 如果 $u \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ 满足(40.27), 则 u 属于 Φ(定义 40.1). 此外, 如果(40.28)成立, 则 $u - \tilde{g} \in \Phi_0$, 因而, 由引理 40.2, $u - \tilde{g}$ 是一个从闭区间 $[0, T]$ 到 $L^2(\Omega)$ 中的连续映射. 于是, 由(40.26)知道, 当 $t \to +0$ 时 $u(\cdot, t)$ 在 $L^2(\Omega)$ 中必定收敛

于某一极限,用$u(\cdot, 0)$表示此极限. 条件(40.29)仅仅意味着

$$u(\cdot, 0)=u_0. \tag{40.30}$$

注 40.2 在$f\equiv 0$, $\tilde{g}\equiv 0$的情形,我们可以应用定理40.1. 由于引理40.2,我们得到下述结果:

定理 40.2 从Φ_0到$L^2(\Omega)$中的映射$u\mapsto u(\cdot, 0)$是映上的.

象定理40.2这样的结果可以推广到$H_0^1(\Omega)$, $L^2(\Omega)$, $H^{-1}(\Omega)$以外的Hilbert空间(或Banach空间). 它们是插值理论(和插值迹方法; 参阅习题25.1)的非常简单的特殊情形. 定理40.2蕴涵着$L^2(\Omega)=H^0(\Omega)$是$H_0^1(\Omega)$和$H^{-1}(\Omega)$间的一个插值空间.

注 40.3 定理40.2的有效性说明了在定理40.1中为什么没有联系u_0和$\tilde{g}$的相容性条件. 由于(40.28)—(40.29), 我们可以期望$u_0-\tilde{g}(\cdot, 0)$属于$H_0^1(\Omega)$. 但是注意, 这样一种要求是没有意义的, 因为u_0属于$L^2(\Omega)$. 更重要的是, $\tilde{g}$在$t=0$时的值对于定理40.1的叙述是无关紧要的: 事实上, 定理40.2告诉我们, 在Φ_0中总存在一函数h, 使得$h(\cdot, 0)=\tilde{g}(\cdot, 0)$. 当用$\tilde{g}-h$代替$\tilde{g}$时,关于$u$的要求(40.28)不必修改.

注 40.4 自然,定理40.1可应用于$\Omega=\mathbf{R}^n$. 此时, 边界条件(40.28)是多余的, 因为$H^1(\mathbf{R}^n)=H_0^1(\mathbf{R}^n)$. 在这个情形, 定理40.1断言,给定任何$f\in L^2(0, T; H^{-1}(\mathbf{R}^n))$, 方程$u_t+Au=f$存在一个唯一的解$u\in L^2(0, T; H^1(\mathbf{R}^n))$, 它具有事先任意指定的初始值$u(\cdot, 0)\in L^2(\mathbf{R}^n)$. 这不再是混合问题了——它是一Cauchy问题(参阅第II章).

注 40.5 象定理40.1这样的存在性和唯一性的叙述, 通常将用数据的连续依赖性来补充. 在现在的情形, 这将取下述形式: 从$L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))\times L^2(\Omega)\times\Phi$到$L^2(0, T; H^1(\Omega))$中的映射

$$(f, u_0, \tilde{g})\mapsto u$$

是连续的. 事实上, 这样的论断通常从解的存在性和唯一性通过闭图像定理即得. 但是在我们的情形中,附加的条件(40.26)多少有点把事情弄乱. 这样, $\tilde{g}$和u属于Φ(定义40.1)的一个线性子

空间，这个子空间不是闭的．因而，我们不能应用闭图像定理．然而连续性仍成立．这从一个估计就能推得，这个估计是在证明解的存在性的同时导得的[估计(41.26)]．

习　题

40.1　令 $\mathbf{V}$ 是一 Hilbert 空间，$\bar{\mathbf{V}}'$ 是其反对偶空间，$\mathbf{H}$ 是第三个 Hilbert 空间；我们有具有稠像的连续内射，$\mathbf{V}\hookrightarrow\mathbf{H}\hookrightarrow\bar{\mathbf{V}}'$．再假设内射 $\mathbf{H}\hookrightarrow\bar{\mathbf{V}}'$ 是内射 $\mathbf{V}\hookrightarrow\mathbf{H}$ 的"伴随"映射．令 T 是任一大于零的数，并记 $\Phi_0(0, T; \mathbf{V})$ 为 $[0, T]$ 中具有下述性质的 $\mathbf{V}$ 值函数 $\mathbf{u}(t)$ 的空间：

$$\mathbf{u}\in L^2(0, T; \mathbf{V}),\quad \frac{d\mathbf{u}}{dt}\in L^2(0, T; \bar{\mathbf{V}}'), \tag{40.31}$$

赋它以 Hilbert 范数

$$|||\mathbf{u}||| = \left(\int_0^T\left\{\|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}}^2+\left\|\frac{d\mathbf{u}}{dt}(t)\right\|_{\bar{\mathbf{V}}'}^2\right\}dt\right)^{1/2}. \tag{40.32}$$

证明 $C^\infty([0, T]; \mathbf{V})$ 在 $\Phi_0(0, T; \mathbf{V})$ 中稠，并证明从 $C^\infty([0, T]; \mathbf{V})$ 到 $C^0([0, T]; \mathbf{H})$ 中的自然内射，可延拓为一个从 $\Phi_0(0, T; \mathbf{V})$ 到 $C^0([0, T]; \mathbf{H})$ 中的连续内射．

40.2　对于几乎每个 t，$0\leqslant t\leqslant T$，令 $A(t)$ 是一从 $\mathbf{V}$ 到 $\bar{\mathbf{V}}'$ 中的有界线性算子(参阅习题 40.1)，使得对于任何 $\mathbf{v}, \mathbf{w}\in\mathbf{V}$．

$$\text{函数 } t\mapsto\langle A(t)\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle^- \text{ 属于 } L^\infty(0, T). \tag{40.33}$$

证明，$\mathbf{v}(t)\mapsto A(t)\mathbf{v}(t)$ 定义了一个从 $L^2(0, T; \mathbf{V})$ 到 $L^2(0, T; \bar{\mathbf{V}}')$ 中的有界线性映射．($\langle, \rangle^-$ 是 $\mathbf{V}$ 和 $\bar{\mathbf{V}}'$ 间的反对偶性括号.)

40.3　考虑一个算子

$$A(x, t, \partial/\partial x) = \sum_{|p|, |q|\leqslant m}(-1)^{|p|}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^p a_{p,q}(x, t)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^q,\quad m\geqslant 1. \tag{40.34}$$

它的系数属于 $L^\infty(\Omega\times[0, T])$．在定理 40.1 中，按照(40.34)来选取 $A(x, t, \partial/\partial x)$，可以得到一个类似的定理；试明确地叙述此定理中的假设和结论(特别谨慎地叙述，边界条件以及关于边界数据的假设应该是什么)．

40.4　令 T 是一严格正数，$u(x, t)$ 是 $\mathbf{R}^1_+\times]0, T[$ 中的一函数，使得

$$u\in L^2(0, T; H^1(\mathbf{R}^1_+)),\quad \frac{du}{dt}\in L^2(0, T; H^{-1}(\mathbf{R}^1_+)).$$

记 $\tilde{u}(x, t)$ 为 $\mathbf{R}^1\times]0, T[$ 中的一函数，当 $x>0$ 时它等于 $u(x, t)$，当 $x<0$ 时它等于 $u(-x, t)$．证明

$$\tilde{u}\in L^2(0, T; H^1(\mathbf{R}^1)),\quad \frac{d\tilde{u}}{dt}\in L^2(0, T; H^{-1}(\mathbf{R}^1)).$$

试指出如何能由此推得下述结果:

引理 40.3 令 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的一有界开子集,其边界是一C^1超曲面(并且Ω位于边界的一侧). 令 Ω_0 是 $\mathbf{R}^n$ 的一开子集,它包含 $\overline{\Omega}$. 那么,存在一个连续线性映射 $\varepsilon_\Omega: H^1(\Omega)\to H_0^1(\Omega_0)$, 使得 $r_\Omega\varepsilon_\Omega$ 等于 $H^1(\Omega)$ 中的恒等映射(r_Ω 是映射"在 Ω 上的限制"), 并且 ε_Ω 可以延拓为一个从 $\Phi(0, T; \Omega)$到 $\Phi_0(0, T; \Omega_0)$(定义 40.1 和 40.2)中的连续线性映射.

40.5 令 Ω 如引理 40.3 中所述. 证明,可以把空间 Φ(定义 40.1)自然地并连续地内射到 $C^0([0, T]; L^2(\Omega))$中.

40.6 令 Ω 如引理 40.3 中所述,但是现在假设它的边界是一 C^{m+1} 超曲面($m\geqslant 1$ 是任意的). 考虑 $\Omega\times]0, T[$ 中具有下述性质的函数 $u(x, t)$的空间 $\Phi^m(0, T; \Omega)$:

$$u\in L^2(0, T; H^{m+1}(\Omega)),\qquad \frac{\partial u}{dt}\in L^2(0, T; H^{m-1}(\Omega)).$$

证明,$\Phi^m(0, T; \Omega)$可被自然地内射到 $C^0([0, T]; H^m(\Omega))$中,并证明,当给 $\Phi^m(0, T; \Omega)$赋予显然的范数时,此内射是连续的. [提示: 利用定理 26.A.3 和注 26.A.1.]

41. 能量不等式. 定理 40.1 的证明: 抛物型混合问题的弱解的存在性和唯一性

对于 $\tau>0$, 我们定义 $H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)$ 上的拟双线性形式:

$$a_\tau(t; u, v)=\tau\int_\Omega u\bar{v}\,dx+\sum_{i,j=1}^n\int_\Omega a^{ij}(x, t)\frac{\partial u}{\partial x^j}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x^i}\,dx$$
$$+\sum_{j=1}^n\int_\Omega b^j(x, t)\frac{\partial u}{\partial x^j}\bar{v}\,dx+\int_\Omega c(x, t)u\bar{v}\,dx.$$

在现在的情形中, 它是泛函(23.7)的类似物. 假设(40.16)和(40.17)蕴涵着

(41.1) 存在 $\tau_0>0$, 使得对所有 $\tau>\tau_0$, 所有 $u\in H^1(\Omega)$和几乎所有的 $t\,(0<t<T)$,

(41.2) $$c_0\|u\|_1^2\leqslant 2\mathrm{Re}\, a_\tau(t; u, u).$$

记住, $\|u\|_1$ 是 u 在 $H^1(\Omega)$ 中的范数. 常数 c_0 同(40.17)中的 c_0.

在(41.2)中可以取 u 依赖于 t. 事实上, 从(41.2)推得, 对任意的 $u\in L^2(0, T; H^1(\Omega))$, 有

$$(41.3)\qquad c_0\int_0^T\|u\|_1^2\,dt\leqslant 2\mathrm{Re}\int_0^T a_\tau(t;\,u,\,u)\,dt.$$

现在定义 $\Phi_0\times\Phi_0$(定义 40.2)上的两个拟双线性形式:

$$(41.4)\qquad \mathfrak{A}_\tau(u,\,v)=\int_0^T\{-\langle u,\,\bar{v}_t\rangle+a_\tau(t;u,\,v)\}dt,$$

$$(41.5)\qquad \mathfrak{A}'_\tau(u,\,v)=\int_0^T\{\langle u_t,\,\bar{v}\rangle+a_\tau(t;u,\,v)\}dt.$$

我们注意到(对于 $u\in\Phi_0$)

$$(41.6)\qquad 2\mathrm{Re}\int_0^T\langle u,\,\bar{u}_t\rangle dt=\int_\Omega(|u(x,\,T)|^2-|u(x,\,0)|^2)dx$$

(参阅引理 40.2).

如把(41.3)和(41.6)结合起来,就得到下述重要的"能量不等式":

引理 41.1 如果(40.16)和(40.17)成立,那么,对于所有 $\tau>\tau_0$ 和所有 $u\in\Phi_0$(定义 40.2),我们有

$$(41.7)\qquad c_0\int_0^T\|u(\cdot,\,t)\|_1^2\,dt+\int_\Omega|u(x,\,0)|^2dx\leqslant 2\mathrm{Re}\,\mathfrak{A}_\tau(u,\,u)+\int_\Omega|u(x,\,T)|^2dx.$$

$$(41.8)\qquad c_0\int_0^T\|u(\cdot,\,t)\|_1^2\,dt+\int_\Omega|u(x,\,T)|^2dx\leqslant 2\mathrm{Re}\,\mathfrak{A}'_\tau(u,\,u)+\int_\Omega|u(x,\,0)|^2dx.$$

定理 40.1 的证明基于这两个不等式的应用:(41.7)将导致解的存在性,(41.8)导致解的唯一性.在某种程度上,参数 $\tau>0$ 是必须引进的.这可通过未知函数的变换来做到.令

$$U=e^{-\tau t}(u-\tilde{g}).$$

显然,$U\in\Phi_0$,并且

$$(41.9)\qquad U_t+(\tau+A)U=F,$$

其中

$$(41.10)\qquad F=e^{-\tau t}\left(f-\frac{\partial\tilde{g}}{\partial t}-A\tilde{g}\right)\in L^2(0,\,T;\,H^{-1}(\Omega)).$$

初始条件 (40.28) 现在变为

(41.11) $$U(\cdot,\ 0)=U_0,$$

其中

(41.12) $$U_0=u_0-\tilde{g}(\cdot,\ 0).$$

I. 解的存在性

我们将应用 Lax-Milgram 引理 (引理 23.1) 的下述推广 (属于 J. L. Lions):

引理 41.2 令 $\mathbf{E}$ 是一 Hilbert 空间, $\mathfrak{h}$ 是 $\mathbf{E}$ 的一个线性子空间, $\mathfrak{A}(\mathbf{w},\ \mathbf{h})$ 是 $\mathbf{E}\times\mathfrak{h}$ 上的一个拟双线性泛函, 它具有下述两性质:

(41.13) 对于每个固定的 $\mathbf{h}\in\mathfrak{h}$, $\mathbf{w}\mapsto\mathfrak{A}(\mathbf{w},\ \mathbf{h})$ 是 $\mathbf{E}$ 上的连续线性泛函;

(41.14) 存在 $c_0'>0$, 使得对每个 $\mathbf{h}\in\mathfrak{h}$, 有

$$c_0'\|\mathbf{h}\|_{\mathbf{E}}^2\leqslant|\mathfrak{A}(\mathbf{h},\ \mathbf{h})|.$$

结论 存在一个从 $\mathbf{E}$ 的反对偶空间 $\overline{\mathbf{E}}'$ 到 $\mathbf{E}$ 中的有界线性映射 G, 其范数 $\leqslant c_0'^{-1}$, 使得对 $\mathbf{E}$ 上每个连续反线性泛函 λ 有

(41.15) $$\mathfrak{A}(G\lambda,\ \mathbf{h})=\lambda(\mathbf{h})\quad 对每个\ \mathbf{h}\in\mathfrak{h}.$$

证明 由 (41.13), 对于每个 $\mathbf{h}\in\mathfrak{h}$, 存在 $\mathbf{E}$ 的一个元素 $R\mathbf{h}$, 使得对所有的 $\mathbf{w}\in\mathbf{E}$, 有 $\mathfrak{A}(\mathbf{w},\ \mathbf{h})=(\mathbf{w},\ R\mathbf{h})_{\mathbf{E}}$. 由 (41.14), 我们有

(41.16) $$\|\mathbf{h}\|_{\mathbf{E}}\leqslant c_0'^{-1}\|R\mathbf{h}\|_{\mathbf{E}},\ \forall\mathbf{h}\in\mathfrak{h}.$$

这样, R 定义一个内射的线性映射 $\mathfrak{h}\to\mathbf{E}$ (一般地, 不是连续的). 此外, (41.16) 指出, 从赋予 $\mathbf{E}$ 的范数的 $R\mathfrak{h}$ 到 $\mathbf{E}$ 中的映射 $R\mathbf{h}\mapsto\mathbf{h}$ 是连续的. 由连续性, 将它延拓到 $R\mathfrak{h}$ 在 $\mathbf{E}$ 中的闭包; 再令它在 $R\mathfrak{h}$ 的正交补空间上等于零, 将它延拓到整个 $\mathbf{E}$ 上. 用 G_1^* 表示这个延拓, 它的范数 $\leqslant c_0'^{-1}$. 用 G_1 表示 G_1^* 的伴随算子, 这是一个有界线性算子 $\mathbf{E}\to\mathbf{E}$, 它与 G_1^* 有相同的范数. 对于所有的 $\mathbf{w}\in\mathbf{E}$ 和所有的 $\mathbf{h}\in\mathfrak{h}$, 我们有

$$\mathfrak{A}(G_1\mathbf{w},\ \mathbf{h})=(G_1\mathbf{w},\ R\mathbf{h})_{\mathbf{E}}=(\mathbf{w},\ G_1^*R\mathbf{h})_{\mathbf{E}}=(\mathbf{w},\ \mathbf{h})_{\mathbf{E}}.$$

现在令 J 表示从 $\overline{\mathbf{E}}'$ 到 $\mathbf{E}$ 上的典则同构. 再令 $G\lambda=G_1J\lambda$ (对所

有 $\lambda\in\overline{\mathbf{E}'}$) 即可.　　　　证毕.

对于 $\mathbf{E}$ 的下列选择，我们来应用引理 41.2：选 $\mathbf{E}$ 为对 (v, v_0) 的空间，其中 $v\in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, $v_0\in L^2(\Omega)$. $\mathbf{E}$ 上的范数选为自然范数：

$$\|(v, v_0)\|_{\mathbf{E}}=\left\{\int_0^T\|v(\cdot, t)\|_1^2\,dt+\int_\Omega|v_0(x)|^2\,dx\right\}^{1/2}.$$

至于 $\mathfrak{h}$，它将是 $\mathbf{E}$ 的一子空间，由具有下述性质的对 (v, v_0) 组成：$v\in\boldsymbol{\Phi}_0$, v_0 等于 $v(\cdot, t)$ 当 $t\mapsto+0$ 时在 $L^2(\Omega)$ 中的极限；因而，也有

(41.17)　当 $t<T$ 趋于 T 时，$v(\cdot, t)$ 在 $L^2(\Omega)$ 中的极限是零.

(我们暗中已经应用了引理 40.2.)

在我们的情形，引理 41.2 中的形式 $\mathfrak{A}$ 将是

$((w, w_0), (h, h_0))\mapsto\mathfrak{A}_\tau(w, h)$,　$\mathfrak{A}_\tau$ 由 (41.4) 给出. †

由于 (41.17)，能量估计 (41.7) 指出，引理 41.2 的假设 (41.14) 得到验证；至于 (41.13)，它的被满足是由于 $\mathfrak{h}\subset\boldsymbol{\Phi}_0$ 这一事实. 因而，我们不妨利用此结论. $\mathbf{E}$ 上的连续泛函 λ 将是

$$(41.18)\qquad (v, v_0)\mapsto\int_0^T\langle F, \bar{v}\rangle dt+\int_\Omega U_0(x)\bar{v}_0(x)\,dx,$$

其中，F 和 U_0 分别是 (41.9) 和 (41.11) 中的函数，而 $\langle,\rangle$ 是 $H^{-1}(\Omega)$ 和 $H_0^1(\Omega)$ 之间的对偶性括号. 我们得到结论：存在 $(V, V_0)\in\mathbf{E}$，使得

(41.19)

$$\mathfrak{A}(V, h)=\int_0^T\langle F, \bar{h}\rangle dt+\int_\Omega U_0(x)\bar{h}(x, 0)\,dx,\ \forall h\in\mathfrak{h}.$$

我们首先在 $C_c^\infty(]0, T[; H_0^1(\Omega))$ 中选取 h. 在此情形，方程 (41.19) 化为

$$(41.20)\qquad \int_0^T\langle V_t+(\tau+A)V, \bar{h}\rangle dt=\int_0^T\langle F, \bar{h}\rangle dt,$$

它蕴涵着，在 $]0, T[$ 中广义函数（取值于 $H^{-1}(\Omega)$ 中）的意义下，或

† 显然，$\mathfrak{A}_\tau'(w, h)$ 可延拓到 $\boldsymbol{\Phi}_0\times L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ 上，而 $\mathfrak{A}_\tau(w, h)$ 却可延拓成 $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))\times\boldsymbol{\Phi}_0$ 上的一个拟双线性泛函.

在 $\Omega\times]0, T[$ 中的广义函数意义下，

$$V_t+(\tau+A)V=F. \tag{41.21}$$

从方程(41.21)立刻就得到 $V_t\in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$，因而，$V\in\Phi_0$. 特别，$V$ 可视作闭区间$[0, T]$中的连续函数，取值于 $L^2(\Omega)$ 中．如再回到(41.19)，通过分部积分，我们看到

$$\mathfrak{A}_\tau(V, h)=\langle V, \bar{h}\rangle|_{t=0}+\int_0^T\langle V_t+(\tau+A)V, \bar{h}\rangle dt,$$

因而，由(41.21)，我们有

$$\langle V, \bar{h}\rangle|_{t=0}=\int_\Omega V(x, 0)\bar{h}(x, 0)dx=\int_\Omega U_0(x)\bar{h}(x, 0)dx. \tag{41.22}$$

显然，可以取 $h\in\mathfrak{H}$ 使得 $h(x, 0)$ 是 $H_0^1(\Omega)$ 的一个任给的元素．这样，(41.22)蕴涵着在 Ω 中几乎处处 $V(x, 0)=U_0(x)$．我们看到 V 是(41.9)—(41.11)的一个解.

II．解的唯一性

通过减法，所谓唯一性，就是证明下述事实：如果 $W\in\Phi_0$ 满足

$$W_t+(\tau+A)W=0, \tag{41.23}$$

$$W(\cdot, 0)=0, \tag{41.24}$$

则必有 $W\equiv 0$．由(41.5)和(41.23)，我们有

$$\mathfrak{A}'_\tau(W, W)=\int_0^T\langle W_t+(\tau+A)W, \overline{W}\rangle dt=0,$$

因而由(41.8)[由于(41.24)]，就得到我们的结论.

III．解的估计

暂且回到本节第 I 部分(解的存在性)的推理，特别，当我们应用引理 41.2 时，回到空间 $\mathbf{E}$, $\mathfrak{H}$ 的选择，形式 $\mathfrak{A}$ 的选择等等上来．我们注意到，由(41.18)所给出的反线性泛函 λ 在 $\mathbf{E}'$ 中的范数是

$$\|\lambda\|=\left\{\int_0^T \|F(\cdot,\ t)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 dt+\int_\Omega |U_0(x)|^2 dx\right\}^{1/2}.$$

如果应用引理 41.2 的结论，特别，应用关于算子 G 的范数的估计，我们就发现，(41.9)—(41.11)的解 U 在 $\mathbf{E}$ 中的范数 $\leqslant 2c_0^{-1}\|\lambda\|=C_0\|\lambda\|$. 换句话说，

(41.25)

$$\int_0^T \|U(\cdot,\ t)\|_{H^1(\Omega)}^2 dt\leqslant C_0^2\left\{\int_0^T \|F(\cdot,\ t)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 dt+\|U_0\|_{L^2(\Omega)}^2\right\}.$$

这里，我们回到原来的未知函数 u，并用 u 和 $\tilde{g}$ 来表示 U. 从(41.25)就推得下述估计：

(41.26)
$$\int_0^T \|u(\cdot,\ t)-\tilde{g}(\cdot,\ t)\|_{H^1(\Omega)}^2 dt$$
$$\leqslant K^2\left\{\int_\Omega |u_0(x)-\tilde{g}(x,0)|^2 dx+\int_0^T \|f(\cdot,t)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 dt\right.$$
$$\left.+\int_0^T \{\|\tilde{g}(\cdot,\ t)\|_{H^1(\Omega)}^2+\|\tilde{g}_t(\cdot,\ t)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2\}dt\right\}.$$

这就是在注 40.5 中提到过的估计式. 常数 K 依赖于 Ω, $A(x,\ t,\ \partial/\partial x)$，也依赖于数 $T>0$.

习　　题

41.1 令 $\mathbf{V}$, $\mathbf{H}$ 如习题 40.1 中所述，算子值函数 $A(t)$ 如习题 40.2 中所述. 现在假设，存在两个常数 $\lambda_0\in\mathbf{R}$, $c_0>0$, 使得对于几乎每个 $t\in[0,\ T]$, 有

(41.27) $$\operatorname{Re}\langle A(t)\mathbf{v},\ \mathbf{v}\rangle^- +\lambda_0\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}^2\geqslant c_0\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}^2,\ \forall \mathbf{v}\in\mathbf{V}.$$

重复 § 41 中的推理，证明下述定理：

定理 41.1 在上面的假设下，对于任给的函数 $\mathbf{f}(t)\in L^2(0,\ T;\ \bar{\mathbf{V}}')$ 和任给的元素 $\mathbf{u}_0\in\mathbf{H}$，存在唯一的函数 $\mathbf{u}\in L^2(0,\ T;\ \mathbf{V})$，使得

(41.28) $$\frac{d\mathbf{u}}{dt}+A(t)\mathbf{u}=\mathbf{f}\quad 在\ ]0,\ T[\ 中;$$

(41.29) $$\mathbf{u}(0)=\mathbf{u}_0.$$

[由习题 40.2 中的结果，从方程(41.28)我们就推得 $d\mathbf{u}/dt\in L^2(0,T;\bar{\mathbf{V}}')$，并由习题 40.1 中的结果，我们看到，$\mathbf{u}$ 可视作闭区间 $[0,\ T]$ 中的 $\mathbf{H}$ 值连续函数，由此就得到(41.29)的意义.]

41.2 当定理 40.1 中的算子 $A(x, t, \partial/\partial x)$是空间变量 x 的负 Laplace 算子时,明确地写下并验证能量估计(41.7)和(41.8).

41.3 令 $\mathbf{V}$ 和 $A(t)$如习题 40.2 中所述. 令 $\mathbf{v}\in L^2(0, T; \mathbf{V})$是方程

(41.30) $$\frac{d\mathbf{v}}{dt}+A(t)\mathbf{v}=0 \quad 在]0, T[中$$

的一个解. 证明,存在一个常数 $C>0$,使得

(41.31) $$\left\|\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right\|_{\overline{\mathbf{V}}'}\leqslant C\|\mathbf{V}\|_{\mathbf{V}}.$$

应用习题 20.2 中的方法, 证明: 如果 $\mathbf{v}(0)=0$[$\mathbf{v}(t)$是闭区间 $0\leqslant t\leqslant T$ 中 $\overline{\mathbf{V}}'$ 值的一个绝对连续函数],那么对于所有 $t<T$,必定有 $\mathbf{v}(t)=0$.

41.4 令 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的一有界开子集, 其边界 Γ 是一 C^∞ 超曲面, 并且, Ω 在 Γ 的一侧. 令 $\Gamma=\Gamma_0\cup\Gamma_1$, $\Gamma_0\cap\Gamma_1=\emptyset$, 并令 $g(x, t)$是 $t\in\mathbf{R}^1$ 的 $H^2(\Omega)$ 值的 C^1 函数, 当 $t>0$ 时它等于零. 令 $u_0(x)\in L^2(\Omega)$. 指出, 对于适当选取的 $\mathbf{V}$, $H_0^1(\Omega)\subset\mathbf{V}\subset H^1(\Omega)$, 并在关于 u_0 和 g 的适当的假设下(明确叙述这些假设),如何应用定理 41.1 去证明混合问题

(41.32) $$u_t=\Delta u \quad 在 \Omega\times]0, T[中,$$

(41.33) $$u(x, 0)=u_0(x) \quad 在 \Omega 中,$$

(41.34) $$u-g=0 \quad 在 \Gamma_0 上, \quad \frac{\partial}{\partial\nu}(u-g)=0 \quad 在 \Gamma_1 上, \ \forall t>0$$

有一个且仅有一个解 $u\in L^2(0, T; \mathbf{V})$.

41.5 令 Ω 和 $\Gamma=\partial\Omega$ 如习题 41.4 中所述. 令

$$P(x, t, D)=\sum_{|\alpha|\leqslant 2m}a_\alpha(x, t)D^\alpha.$$

是 Ω 中的一个一致强椭圆算子(参阅 § 36; $m\geqslant 1$). 假设每个系数 a_α 关于 x 的所有阶数$\leqslant m$ 的偏导数都属于 $L^\infty(\Omega\times[0, T])$. 令 $u_0\in L^2(\Omega)$, $g_j(\cdot, t)$是 $t(0\leqslant t\leqslant T)$的一次连续可微函数, 取值于 $H^{m-j-1/2}(\Gamma)$中(对每个 $j=0, 1, \cdots, m-1$). 指出, 在连结 u_0 和 g_j 的适当的附加条件下——读者必须明确地叙述它(参阅习题 40.3),如何应用定理 41.1 去推导,混合问题

(41.35) $$\frac{du}{dt}+P(x, t, D_x)u=0 \quad 在 \Omega\times]0, T[中,$$

(41.36) $$u(x, 0)=u_0(x) \quad 在 \Omega 中,$$

(41.37) $$\frac{\partial^j}{\partial\nu^j}u|_\Gamma=g_j, \quad j=0, 1, \cdots, m-1$$

有唯一的解 $u\in\Phi^m(0, T; \Omega)$(参阅习题 40.6).

42. 弱解关于时间变量的正规性

我们已经建立了混合问题(40.27)—(40.28)—(40.29)的解 u 的存在性和唯一性，现在要在数据的适当正规性假设下，来考察其正规性. 但是如果我们将现在的情况与边值问题的情况加以比较，并把混合问题看作与空间 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中一截头柱体，即 $\Omega\times]0, T[$，相应的一种特殊类型的边值问题，那就不能避开而必须注意下述事实，即，问题中出现的区域决不会是光滑的：在位于超平面 $t=0$ 中的集合 Ω 的边界处，它必定总是有隅角的(除非 Ω 就是整个空间 $\mathbf{R}^n$，而此时根本就没有边界——但是我们的问题就是一个整体 Cauchy 问题了!). 实际上，即使在最简单的情形，这样的隅角也导致奇性(参阅习题 44.2). 因而，人们也许愿意把解的正规性的考察限制在边界的充分光滑的那一部分附近，实际上，这可以通过某种方法来实现，这种方法类似于在椭圆边界问题中所用的方法(§ 27)，当然，前者比后者更复杂一些. 事实上，这个注解也适用于只涉及空间变量的正规性研究. 在适当的假定下，后者(关于空间变量的正规性)可从椭圆型方程的类似结果，从 § 27 中对于 $\lambda-\Delta$ 所得到的那一类结果而得到(但是，不用说，是更一般的). 当所研究的算子的系数与 t 无关时，人们可以在这个方向上走得更远，并且毋需化太大的代价，例如，用连续半群方法(§ 45)或用 Laplace 变换的方法(§ § 43 和 44)即可. 在习题 44.4 中给出了在这方面能够得到的结果的提示.

本节中只讨论关于时间变量 t 的正规性. 我们能够这样做的理由是，这样的讨论同样也能适用于抽象的发展方程(自然，其中的区域或数据的特性不引起复杂性). 然而，关于空间变量的正规性的讨论必须把这些特性考虑在内，并且必然大大提高其技巧性. 在比较初等的水平上——本书宁愿停留于此，习题 44.4 中的提示应该足够了.

这样，我们必须假定，关于 t，数据是适当正规的：这与微分算

子 $A(x, t, \partial/\partial x)$ 的系数，右端 $f(x, t)$ 以及函数 $\tilde{g}(x, t)$（它决定了解的边值）有关．它既与开集 Ω（特别，与其边界 $\Gamma=\partial\Omega$）无关，又与初始数据 u_0 无关——虽然，如我们将要看到的，u, f, $\tilde{g}$ 关于 t 的较强的正规性性质，就 u_0 而言，将要求关于 x 有更严格的正规性条件[参阅(42.19)]．

如果对于所期望的结果的类型，以及证明它们所用的方法，希望获得一种清楚的想法，那么，彻底地研究一阶可微性的情形也许是恰当的．这就是我们准备做的事情．我们作如下假设（除了在定理 40.1 中已经作的假设外）：

(42.1) $A(x,t, \partial/\partial x)$ 的系数 $a^{ij}(x, t)$, $b^j(x, t)$, $c(x, t)$ 关于 t 有一阶导数（在广义函数意义下），并且都属于 $L^\infty(\Omega\times]0, T[)$．

用 $A_t=A_t(x, t, \partial/\partial x)$ 表示 A 的所有系数关于 t 求微商而得到的微分算子：

$$A_t v=(\partial/\partial t)(Av)-Av_t.$$

注意，(42.1)等价于下述假设：系数 a^{ij}, b^j, c 是 $[0, T]$ 中 t 的一致 Lipschitz 连续函数，取值于 $L^\infty(\Omega)$ 中．

其次，我们引进下述假设：

(42.2) $f_t\in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$,

(42.3) $\tilde{g}_t\in L^2(0, T; H^1(\Omega))$, $\tilde{g}_{tt}\in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$（即，$\tilde{g}_t\in\boldsymbol{\Phi}$），

(42.4) 当 $t\to+0$ 时，$\tilde{g}_t(\cdot, t)$ 在 $L^2(\Omega)$ 中收敛于一函数 $\tilde{g}_t(\cdot, 0)$．

不用说，我们假定了 $\tilde{g}\in L^2(0, T; H^1(\Omega))$；因而，在现在的假设下，$\tilde{g}$ 是闭区间 $[0, T]$ 中的绝对连续函数，取值于 $H^1(\Omega)$，而 (40.26) 中的初始值 $\tilde{g}(\cdot, 0)$ 必定属于 $H^1(\Omega)$．

我们也许要问：在(42.1)到(42.4)这些假设下，是否可以断言(40.27)—(40.28)—(40.29)的解 u 有下面两个性质：

(42.5) $$u_t\in\boldsymbol{\Phi}.$$

(42.6) 当 $t\to+0$ 时 $u_t(\cdot, t)$ 在 $L^2(\Omega)$ 中收敛．

条件(42.5)蕴涵着，u，象 $\tilde{g}$ 一样，是 $[0, T]$ 中的绝对连续函数，取

值于 $H^1(\Omega)$ 中. 因而, 其初始值 u_0 必定在 $H^1(\Omega)$ 中, 而不是只在 $L^2(\Omega)$ 中. 再者, 条件(40.28)蕴涵着 $u-\tilde{g}\in C^0([0, T]; H_0^1(\Omega))$, 所以, 我们应该有 $u_0-\tilde{g}(\cdot, 0)\in H_0^1(\Omega)$. 另一方面, Au, 象 f 一样, 是 $[0, T]$ 中的绝对连续函数, 取值于 $H^{-1}(\Omega)$ 中. 因为这个事实, 初始值 $u_t(\cdot, 0)$ 就由方程(40.27)完全确定:

(42.7) $\quad u_t(\cdot, 0)=u_1=f(\cdot, 0)-A(x, 0, \partial/\partial x)u_0.$

由(42.6), 我们必定有 $u_1\in L^2(\Omega)$. 一般而言, 我们看到, 关于 t 的正规性要求增加了关于 x 的[自然, 也关于 (x, t) 的]正规性. 如果关于 t 微商(40.27), 就得到

(42.8) $\quad u_{tt}+A(x, t, \partial/\partial x)u_t=f_t-A_t(x, t, \partial/\partial x)u.$

这就提示我们考察下述混合问题:

(42.9) $\quad v_t+A(x, t, \partial/\partial x)v=f_t-A_tu$ 在 $\Omega\times]0, T[$ 中,

(42.10) $\quad v(\cdot, t)-\tilde{g}_t(\cdot, t)\in H_0^1(\Omega)$ 对几乎所有 t, $0<t<T$,

(42.11) 当 $t\to+0$ 时, $v(\cdot, t)$ 在 $L^2(\Omega)$ 中收敛于 u_1.

由定理 40.1 我们知道, 这个问题有一个唯一的解 $v\in\Phi$. 我们将证明 $v=u_t$. 而这就证明了(42.5)和(42.6). 为此, 我们证明

$$w(\cdot, t)=u_0+\int_0^t v(\cdot, t')dt'$$

等于 u. 注意, $w\in C^0([0, T]; H^1(\Omega))$, 并且, $w_t\in\Phi$. 鉴于 u_1 的表达式[(42.7)], 并由于由分部积分而得来的事实

$$\int_0^t Av\,dt=\int_0^t Aw_t\,dt=Aw-A(x, 0, \partial/\partial x)u_0-\int_0^t A_tw\,dt,$$

我们有

$$\begin{aligned}w_t=v&=u_1-\int_0^t Av\,dt+f-f(\cdot, 0)-\int_0^t A_tu\,dt\\&=-Aw+\int_0^t A_t(w-u)\,dt+f.\end{aligned}$$

从(40.27)减去它, 就得到

(42.12) $\quad (u-w)_t+A(u-w)=\int_0^t A_t(u-w)dt.$

另一方面,

$$w(\cdot,\ t)-\tilde{g}(\cdot,\ t)=u_0-\tilde{g}(\cdot,\ 0)+\int_0^t[v(\cdot,\ t)-\tilde{g}_t(\cdot,\ t)]dt,$$

由此,并由(42.10),得到

$$w(\cdot,\ t)-\tilde{g}(\cdot,\ t)-[u_0-\tilde{g}(\cdot,\ 0)]\in H_0^1(\Omega)$$

在[0, T]中几乎处处.

从条件(42.5)—(42.6)下面的注我们知道,$u_0-\tilde{g}(\cdot,0)\in H_0^1(\Omega)$. 这样,在[0, T]中几乎处处有 $w(\cdot,\ t)-\tilde{g}(\cdot,\ t)\in H_0^1(\Omega)$,因而,由(40.28),我们有

(42.13) $u(\cdot,\ t)-w(\cdot,\ t)\in H_0^1(\Omega)$ 对几乎每个 t, $0<t<T$.

最后,

(42.14) 当 $t\to+0$ 时,$u(\cdot,\ t)-w(\cdot,\ t)$ 在 $L^2(\Omega)$ 中收敛于 0.

事实上,由(42.13)知 $u-w\in\boldsymbol{\Phi}_0$,因而 $u-w\in C^0([0,\ T];\ L^2(\Omega))$(引理 40.2). 因而可以把条件(42.14)重新写成下述形式:

(42.15) $$(u-w)(\cdot,\ 0)=0.$$

现在考虑下述问题:

(42.16) $$h\in\boldsymbol{\Phi}_0,$$

(42.17) $$h_t+Ah=f_1\in L^2(0,\ T;\ H^{-1}(\Omega)),$$

(42.18) $$h(\cdot,\ 0)=0.$$

由定理 40.1 知道,h 是唯一确定的. 此外,在现在的情形中,估计式(41.26)大大地简化了. 在这里,它变为

(42.19) $$\int_0^T\|h(\cdot,\ t)\|_{H^1(\Omega)}^2dt\leqslant K^2\int_0^T\|f_1(\cdot,\ t)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2dt.$$

我们暂时固定 T,并令 T' 是任一数,$0<T'\leqslant T$. 令 $f_1^\natural$ 是 $L^2(0,\ T';\ H^{-1}(\Omega))$ 的任一元素, 并令 $h^\natural$ 表示问题(42.16)—(42.17)—(42.18)的解,但在此问题中 T 和 f_1 分别用 T' 和 $f_1^\natural$ 代替. 我们可以把 $f_1^\natural$ 延拓到[0, T]上,只要令延拓 f_1 在]T', T] 中等于零,并令 h 表示同一问题(但这次在问题中出现的是 T 和 f_1)的解. 由于解的唯一性,在 [0, T'[中必须有 $h=h^\natural$. 由(42.19),我们得到

$$(42.20)\quad \int_0^{T'} \|h^\natural(\cdot, t)\|^2_{H^1(\Omega)}dt \leqslant K^2\int_0^T \|f_1(\cdot, t)\|^2_{H^{-1}(\Omega)}dt$$
$$=K^2\int_0^{T'} \|f_1^\natural(\cdot, t)\|^2_{H^{-1}(\Omega)}dt.$$

这就证明了常数 K^2 的选取与任何有限区间 $[0, T_0]$ 中的 T 无关.

现在选取 $h=u-v$. 那么 h 满足(42.16)—(42.17)—(42.18), 其中

$$f_1=\int_0^t A_t h\,dt \qquad [\text{参阅}(42.12)].$$

由我们关于 $A(x, t, \partial/\partial x)$ 的系数的假设(42.1)以及引理 40.1, 我们有

$$(42.21)\quad \|f_1(\cdot, t)\|^2_{H^{-1}(\Omega)} \leqslant K_1^2\left\{\int_0^t \|h(\cdot, t')\|_{H^1(\Omega)}dt'\right\}^2.$$

现在, 令 T' 是 $[0, T]$ 中使得在 $[0, T']$ 中 $h\equiv 0$ 的最大数; 显然, T' 存在(自然, 它可以是零). 从(42.21)我们得到, 在 $[0, T']$ 中 $f_1\equiv 0$, 因而, 由(42.19)和(42.21),

$$\int_{T'}^T \|h(\cdot, t)\|^2_{H^1(\Omega)}dt \leqslant K^2K_1^2\int_{T'}^T \left\{\int_{T'}^t \|h(\cdot, t')\|_{H^1(\Omega)}dt'\right\}^2 dt$$
$$\leqslant K^2K_1^2\int_{T'}^T (t-T')dt\int_{T'}^T \|h(\cdot, t')\|^2_{H^1(\Omega)}dt'.$$

假设我们有 $T'<T$. 那么从上面的不等式就能推得

$$(42.22)\qquad 1\leqslant K^2K_1^2(T-T')^2/2.$$

但是由我们早先关于 K 可与 $T\leqslant T_0$ 无关地选取这一事实的注(对于 K_1, 同样的事实显然成立), 现在我们不妨使 T 收敛于 $T'<T$; 这样, (42.22)是荒谬的! 因此, 我们已证明了我们必须有 $T'=T$, 即 h 恒等于零, 也就是在 $[0, T]$ 中 $u=w$, 因而, $v=u_t$.

总之, 我们证明了 $m=1$ 时的下述结论:

定理 42.1　除了定理 40.1 中的所有假设之外, 我们还作下述一些假设:

(42.23)　$A(x, t, \partial/\partial x)$ 的系数 a^{ij}, b^i, $c(1\leqslant i, j\leqslant n)$ 关于 t 的阶数 $\leqslant m$ 的所有导数属于 $L^\infty(\Omega\times]0, T[)$,

(42.24)　$f^{(j)}\in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$, $0\leqslant j\leqslant m$,

(42.25)　$\tilde{g}^{(j)} \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$，$0 \leqslant j \leqslant m$，$\tilde{g}^{(m+1)} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$，

(42.26)　当 $t \to +0$ 时 $\tilde{g}^{(m)}(\cdot, t)$ 在 $L^2(\Omega)$ 中收敛.

再令 u 表示问题(40.27)—(40.28)—(40.29)的解，其存在性和唯一性在定理 40.1 中被断言．假设下述关系成立：

(42.27)　$u^{(j)}(\cdot, 0) \in L^2(\Omega)$，　$0 \leqslant j \leqslant m$，

(42.28)　$u^{(j)}(\cdot, 0) - \tilde{g}^{(j)}(\cdot, 0) \in H_0^1(\Omega)$，

$$0 \leqslant j \leqslant m-1.$$

那么，下述结论成立：

(42.29)　$u^{(j)} \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$，$0 \leqslant j \leqslant m$，

$$u^{(m+1)} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)),$$

(42.30)　$u^{(j)}(\cdot, t) - \tilde{g}^{(j)}(\cdot, t) \in H_0^1(\Omega)$　对于几乎每个 t，$0<t<T$，和对于每个 $j=0, 1, \cdots, m-1$，

(42.31)　当 $t \to +0$ 时 $u^{(m)}(\cdot, t)$ 在 $L^2(\Omega)$ 中收敛.

对于一般的 $m>0$，定理 42.1 的证明是简单的：通过关于 m 的归纳法和对于 $u^{(m-1)}$ 应用 $m=1$ 时的定理 42.1（这是我们已经证明了的）．我们把其细节留给读者.

关于条件(42.27)和(42.28)，宜提一注记：读者不应得到这样的印象，即与其说这两个条件是加在 u 的微商上的，还不如说是加在数据上的[显然，条件(42.23)到(42.26)与数据有关]．事实上，(42.27)—(42.28)与初始数据 u_0 和 f 在 $t=0$ 时的导数 $f^{(j)}(\cdot, 0)$ 有关．诚然，从微分方程(40.27)我们推得，u_t，更一般地，所有 $u^{(j)}$，$0 \leqslant j \leqslant m$，是闭区间 $[0, T]$ 中的连续函数，取值于 $H^{-1}(\Omega)$ 中[我们暗中用了假设(42.23)和(42.24)]，因而，作为 $H^{-1}(\Omega)$ 的元素，$u^{(j)}(\cdot, 0)$ $(0 \leqslant j \leqslant m)$ 是有意义的．再者，这个元素可表为 u_0 和 $f^{(j')}(\cdot, 0)$ $(j'<j)$ 的一个线性函数——虽然这个表达式可能是复杂的(特别，当 j 非常大时)．例如，

$$u_t(\cdot, 0) = -A(x, 0, \partial/\partial x)u_0 + f(\cdot, 0),$$

$$u_{tt}(\cdot, 0) = -A(x, 0, \partial/\partial x)u_t(\cdot, 0) - A_t(x, 0, \partial/\partial x)u_0 + f_t(\cdot, 0)$$

$$=A(x,\ 0,\ \partial/\partial x)^2u_0-A(x,\ 0,\ \partial/\partial x)f(\cdot,\ 0)$$
$$-A_t(x,\ 0,\ \partial/\partial x)u_0+f_t(\cdot,\ 0),$$

等等.

一个特殊情形,其中叙述大大地简化了——只要条件(42.27)和(42.28)自动满足——是这样的,其中

(42.32) $$f^{(j)}(\cdot,\ 0)=0,\quad 0\leqslant j\leqslant m-1,$$

(42.33) $$\tilde{g}^{(j)}(\cdot,\ 0)=0,\quad 0\leqslant j\leqslant m-1,$$

(42.34) $$u_0=0.$$

事实上, 在这个情形中, 所有的 $u^{(j)}(\cdot,\ 0)$ 等于零 $(0\leqslant j\leqslant m)$. 注意, 如果我们把(42.24)与(42.32)结合起来, 我们就看到, 对于 $t<0$ 令 $f=0$, 能把 f 延拓到 $]-\infty,\ T[$, 这样延拓后,

(42.35) $$f^{(j)}\in L^2(-\infty,\ T;\ H^{-1}(\Omega)),\ 0\leqslant j\leqslant m;\ f\equiv 0 \text{ 对于 } t<0,$$

类似地,

(42.36) $$\tilde{g}^{(j)}\in L^2(-\infty,\ T;\ H^1(\Omega)),\ 0\leqslant j\leqslant m;\ \tilde{g}\equiv 0 \text{ 对于 } t<0.$$

我们得到下述推论:

推论 42.1 除了定理 40.1 中的假设以及假设(42.23)到(42.26)之外, 还假设(42.32)—(42.33)—(42.34)成立. 那么,对于每个 $j=0,\ \cdots,\ m$, 我们有 $u^{(j)}(\cdot,\ 0)=0$.

换句话说,如果我们在 $]-\infty,\ 0]$ 中用 0 延拓解 u,则

(42.37) $$u^{(j)}\in L^2(-\infty,\ T;\ H^1(\Omega)),\ 0\leqslant j\leqslant m;$$
$$u^{(m+1)}\in L^2(-\infty,\ T;\ H^{-1}(\Omega)),\ u\equiv 0 \quad \text{当 } t<0 \text{ 时}.$$

习　题

42.1 令 $\mathbf{V}$, $\mathbf{H}$ 如习题 40.1 中所述,并令 A 是一有界线性算子 $\mathbf{V}\to\overline{\mathbf{V}}'$,使得对于适当的常数 λ_0, c_0[参阅(41.27)],有

(42.38) $$\mathrm{Re}\langle A\mathbf{v},\ \mathbf{v}\rangle+\lambda_0\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}^2\geqslant c_0\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}^2,\ \forall\mathbf{v}\in\mathbf{V}.$$

令 $\mathbf{u}(t)\in L^2(0,\ T;\ \mathbf{V})$满足

(42.39) $$\mathbf{u}_t+A\mathbf{u}=0,\ 0<t<T;\quad \mathbf{u}(0)=\mathbf{u}_0\in\mathbf{H}.$$

证明,

(42.40) $$\mathbf{u}^{(j)}\in L^2(0,\ T;\ \mathbf{V})\ (0\leqslant j\leqslant m);\quad \mathbf{u}^{(m+1)}\in L^2(0,\ T;\ \overline{\mathbf{V}}'),$$

当且仅当

(42.41) $A^j\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}, \quad j=0, \cdots, m.$

42.2 用与习题 41.1 中相同的假设(和记号). 令 K 是从 $\mathbf{V}$ 到 $\overline{\mathbf{V}}'$ 上的典则线性等距算子. 我们可以把 K 看作 $\mathbf{H}$ 中的一个正算子, 它一般是无界的. 我们假设

(42.42) $A^{(j)} \in L^\infty(0, T; L(\mathbf{V}; \overline{\mathbf{V}}')), \quad 0 \leqslant j \leqslant m;$

(42.43) $\mathbf{f}^{(j)} \in L^2(0, T; \overline{\mathbf{V}}'), \quad 0 \leqslant j \leqslant m.$

令 $\mathbf{u}(t) \in L^2(0, T; \mathbf{V})$是 (41.28)–(41.29) 的解(参阅习题 41.1 和定理 41.1). 证明, (42.42)—(42.43)蕴涵着 $\mathbf{u}$ 是闭区间$[0, T]$中的 C^m 函数, 取值于 $\overline{\mathbf{V}}'$中.

证明, $\mathbf{f}$ 和 $\mathbf{u}_0$ 的下述性质

(42.44) $K^{m-1-j}\mathbf{f}^{(j)}(0) \in \mathbf{H}, \quad j=0, \cdots, m-1; \quad K^m\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}$

蕴涵着

(42.45) $\mathbf{u}^{(j)}(0) \in \mathbf{V}, \quad j=0, \cdots, m-1; \quad \mathbf{u}^{(m)}(0) \in \mathbf{H}.$

42.3 利用上一个习题的结果, 并适当改变 § 42 中的推理, 证明下述定理:

定理 42.2 除了定理 41.1 中的假设之外, 我们还假设(42.42), (42.43)和(42.44)成立.

那么, (41.28)—(41.29) 的解 $\mathbf{u}(t)$有下述性质:

(42.46) $\mathbf{u}^{(j)} \in L^2(0, T; \mathbf{V}), \ j=0, \cdots, m; \quad \mathbf{u}^{(m+1)} \in L^2(0, T; \overline{\mathbf{V}}').$

从(42.46)推导, $\mathbf{u}$ 是闭区间$[0, T]$中的 C^{m-1}(或者, C^m)函数, 取值于 $\mathbf{V}$(或者, $\mathbf{H}$)中.

42.4 在下述情形应用定理 42.2: $\mathbf{V}=H^1(\mathbf{R}^n)$, $\mathbf{H}=L^2(\mathbf{R}^n)$, $-A(t)=\Delta$ (空间变量——即, $\mathbf{R}^n$ 中——的 Laplace 算子). 证明, 在这个情形中, 我们有

(42.47) $\mathbf{u}^{(j)}(0) \in H^{2(m-j)}(\mathbf{R}^n), \quad j=0, \cdots, m.$

关于 $\mathbf{u}^{(m+1)}(0)$能断定什么结论?

43. Laplace 变换

当微分算子 $A(x, t, \partial/\partial x)$的系数不依赖于时间变量 t 的时候, 处理前几节中我们研究过的两种混合问题就比较容易. 在此情形, 除了 § 40 和 § 41 的抽象方法之外, 有两个相当一般的方法可用: Laplace 变换方法和半群理论. 这些方法导致更精细的结果, 并且, 在我们准备应用这些方法的特殊情形之外, 它们还有广

泛的应用. 我们先从 Laplace 变换开始. 我们将简略地回忆一下它的定义和主要性质——有关取值于一个 Banach 空间 $\mathbf{E}$(其中, 范数将用 $\|\ \|_{\mathbf{E}}$ 表示)中的函数和广义函数之间相互变换的性质.

考虑定义于实直线 $\mathbf{R}$ 中的函数和广义函数. 传统上, 函数 $f(t)$ 的 *Laplace* 变换用

$$(43.1)\qquad \mathscr{L}f(\sigma+i\tau)=\int_0^{+\infty}e^{-(\sigma+i\tau)t}f(t)\,dt$$

(形式地)定义, 其中 $\sigma+i\tau$ 是复变量(通常用 p 表示). 显然, 在 Fourier 变换和 Laplace 变换之间必定有某种联系. 我们知道, 前者与 $\mathbf{R}$ 的基本加法群结构密切相关, 因而, 后者也应该与其相关. 但是, 正半直线 $\mathbf{R}_+=[0,\ +\infty[$ 不是一个加法群, 因此我们要做的第一件事就是把(43.1)中的积分延拓到整个实直线上——用零将 f 延拓到$]-\infty,\ 0[$. 这样, 形式定义(43.1)可改写为

$$(43.2)\qquad \mathscr{L}f(\sigma+i\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\tau t}(e^{-\sigma t}f(t))\,dt,$$

其中, 我们重复一遍, 当 $t<0$ 时 $f(t)=0$. 公式(43.2)强调了下述事实: $\mathscr{L}f(\sigma+i\tau)$ 是 $e^{-\sigma t}f(t)$ 的 *Fourier* 变换, 其中实数 σ 起着参数的作用. 我们约定, 仍用 t 表示 $\mathbf{R}^1$ 上的变量, 用 τ 表示 $\mathbf{R}^1$ 的对偶空间中的变量, 即 Fourier 变换式中的变量. 于是, 还是形式地, 对于实直线上在 $]-\infty,\ 0[$ 中 $=0$ 的任一广义函数 T, 即对于 $T\in\mathscr{D}'_+$, 我们令

$$(43.3)\qquad \mathscr{L}T(\sigma+i\tau)=\mathscr{F}(e^{-\sigma t}T).$$

自然, (43.3)的右端将无意义——除非 $e^{-\sigma t}T$ 是"可 Fourier 变换"的, 也就是说, 是缓增的. 现在假设 T 是一连续函数 f. 如果对于某个实数 σ_0, $e^{-\sigma_0 t}f$ 是缓增的, 那么, 由于 $t<0$ 时 $f(t)=0$ 这一事实, $e^{-\sigma t}f\,(\sigma>\sigma_0)$ 就不仅仅是缓增的: 事实上, 在无穷远处它衰减的速度快于某个指数函数 $e^{-\varepsilon t}$. 对于这样的 σ, (43.2)右端的积分有意义, 我们可以在积分号下对 σ 和对 t 求导数. 如果把微分算子 $\partial/\partial\sigma+i\partial/\partial\tau$ 作用于(43.2)的右端, 就得到零, 这意味着 $\mathscr{L}f(\sigma+i\tau)$ 在"垂直的"半平面 $\sigma>\sigma_0$ 中是 $\sigma+i\tau$ 的全纯函数. 同样的观

察也适用于广义函数:

命题 43.1 假设 $T\in\mathscr{D}'_+$, 并设 $e^{-\sigma_0 t}T$ 是缓增的(σ_0 是实的). 那么, $\mathscr{L}T(\sigma+i\tau)=\mathscr{F}(e^{-\sigma t}T)$ 在半平面 $\sigma>\sigma_0$ 中是 $\sigma+i\tau$ 的全纯函数.

当广义函数 T 取值于 Banach 空间 $\mathbf{E}$ 中时, 上面的叙述仍然有效. 其中唯一需要澄清的事情是"缓增"的含义. 如通常一样, 如用 $\mathscr{S}$ 表示实直线上 C^∞ 函数的空间, 这些函数的所有阶导数在无穷远处的衰减快于 $|t|^{-1}$ 的任何幂, 那么, 由定义, 缓增 $\mathbf{E}$ 值广义函数空间 $\mathscr{S}'(\mathbf{E})$ 就是从 $\mathscr{S}$ 到 $\mathbf{E}$ 中的连续线性映射的空间(把这些映射从 $\mathscr{S}$ 限制到稠子空间 C_c^∞, 就可把它们视作 $\mathbf{E}$ 值广义函数). 这时可以证明, 定义于实直线上, 取值于 $\mathbf{E}$ 中的一广义函数 $\mathbf{T}$ 是缓增的, 当且仅当它可被写为

$$\mathbf{T}=\sum_{j=0}^{m}\left(\frac{d}{dt}\right)^j\mathbf{f}_j,$$

其中 $\mathbf{f}_j$ 是连续函数 $\mathbf{R}\to\mathbf{E}$, 具有下述性质: 对于某个整数 $k\geqslant 0$, 非负函数

$$(1+|t|)^{-k}\|\mathbf{f}_j(t)\|_{\mathbf{E}},\quad j=0,\ \cdots,\ m$$

在 $\mathbf{R}$ 上是有界的(m 和 k 依赖于 $\mathbf{T}$). 这样, 缓增纯量广义函数的性质没有修改地推广到取值于 Banach 空间的缓增广义函数.

我们将说, $\mathbf{T}\in\mathscr{D}'_+(\mathbf{E})$ 是可 *Laplace* 变换的 (Laplace-transformable), 如果对于某个实数 σ_0, $e^{-\sigma_0 t}\mathbf{T}$ 是缓增的.

从 Fourier 变换的反演(或, 互反)公式, 并从(43.3), 立即得到 Laplace 变换的反演公式:

(43.4) $$T=\mathscr{F}^{-1}(e^{\sigma t}\mathscr{L}T(\sigma+i\tau)).$$

读者必须记住, $\mathscr{F}^{-1}$ 把变量 τ 的广义函数变为 t 的广义函数; σ 仍旧起着参数的作用. 在某种形式的意义下(可以严格地说清楚这种意义), (43.4)可改写为

$$T=(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}e^{(\sigma+i\tau)t}\mathscr{L}T(\sigma+i\tau)\,d\tau,$$

即

$$T=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}e^{pt}\mathscr{L}T(p)\,dp, \tag{43.5}$$

其中，γ 是一铅垂线$\{p;\ \mathrm{Re}\,p=\sigma>\sigma_0\}$. 公式(43.5)是经典的. 在讨论广义函数时，必须对此公式进行适当的解释.

Laplace 变换有类似于 Fourier 变换的优点：它们都导致算符演算，更精确地说，这意味着它们把卷积变成乘法(当它们有意义时). 众所周知，$\mathscr{D}'_+$ 是一交换卷积代数. 注意，如果 f 和 g 是局部可积函数，当 $t<0$ 时它们都等于零，那么可以定义它们的卷积，而不管它们在无穷远处的增长阶如何. 事实上，

$$(f*g)(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t-s)g(s)\,ds=\int_0^t f(t-s)g(s)\,ds. \tag{43.6}$$

相同的理由使得此定义对于两个在 $t<0$ 时等于零的广义函数 S，T 亦有效. 注意，如果 $\varphi\in C_c^\infty$，则

$$(\check{T}*\varphi)(t)=\langle T_s,\ \varphi(s+t)\rangle$$

是 t 的 C^∞ 函数，当 $t>t_0$ 时它恒等于零[如果假设当 $t>t_0$ 时 $\varphi(t)=0$]. 因为当 $t<0$ 时 $S=0$，所以 S 的支集与 $\check{T}*\varphi$ 的支集之交是紧的，因而可以构作

$$\langle S,\ \check{T}*\varphi\rangle=\langle S_t,\ \langle T_s,\ \varphi(s+t)\rangle\rangle,$$

由关于广义函数的 Fubini 定理，它等于

$$\langle T_t,\ \langle S_s,\ \varphi(s+t)\rangle\rangle=\langle T,\ \check{S}*\varphi\rangle.$$

由定义，$S*T$ 是广义函数 $\varphi\mapsto\langle S,\ \check{T}*\varphi\rangle$. 这就推广了(43.6).

在 $\mathscr{D}'_+$ 中卷积的交换性是显然的；$\mathscr{D}'_+$ 中有一单位元素δ. 再者，$\mathscr{D}'_+$ 是一整环(an integral domain)(这从支集定理，即定理 43.2 即得；其证明，参阅习题 43.4 到 43.6).

命题 43.2　令 $S,\ T\in\mathscr{D}'_+$. 假设 $e^{-\sigma_0 t}S$ 和 $e^{-\sigma_0 t}T$ 都是缓增的. 那么在半平面 $\sigma>\sigma_0$ 中，

$$\mathscr{L}(S*T)=(\mathscr{L}S)(\mathscr{L}T). \tag{43.7}$$

证明　如果 $\sigma>\sigma_0$，则 $e^{-\sigma t}S$，$e^{-\sigma t}T$ 不仅仅是缓增的：它们在无穷远处是速降的. 因而可以定义它们的卷积，此卷积在无穷远处是速降的. 我们有

(43.8) $$e^{-\sigma t}(S*T)=(e^{-\sigma t}S)*(e^{-\sigma t}T),$$

因而，$\mathscr{L}(S*T)$是半平面$\sigma>\sigma_0$中$\sigma+i\tau$的全纯函数. 如果对(43.8)的两端取 Fourier 变换，并利用下述事实：在目前的情形中，$\mathscr{F}(U*V)=\mathscr{F}U\mathscr{F}V$，则我们立刻得到(43.7). 证毕.

在处理 $\mathbf{E}$ 值广义函数时，卷积无意义，即使这些广义函数当$t<0$时取零值亦然，除非 $\mathbf{E}$ 是一 Banach 代数(参阅例 39.2). 我们需要值空间之间的某种配对(或耦合). 有关这个主题，请参阅 § 39.4. 从我们的观点来看，最重要的配对是 $\mathbf{E}$ 的元素和 $L(\mathbf{E};\mathbf{F})$ 的元素，即从 $\mathbf{E}$ 到另一 Banach 空间 $\mathbf{F}$ 中的有界线性算子，之间的配对. 如通常一样，$L(\mathbf{E};\mathbf{F})$将赋予算子范数，简单地用 $\|\ \|$ 表示(参阅例 39.4). 当 $\mathbf{S}\in\mathscr{D}'_+(L(\mathbf{E};\mathbf{F}))$和 $\mathbf{T}\in\mathscr{D}'_+(\mathbf{E})$时，我们用下述显然的方式定义卷积 $\mathbf{S}*\mathbf{T}$：

(43.9) $$(\mathbf{S}*\mathbf{T})(\varphi)=\mathbf{S}(\check{\mathbf{T}}*\varphi),\ \varphi\in C_c^\infty.$$

对于一般的空间 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{F}$，要问这样的卷积是否可交换，这一问题是没有意义的：算子作用于向量，但是向量并不“作用”于算子. 找单位元也是没有意义的. 当 $\mathbf{E}=\mathbf{F}$ 时，情况就较正常. 此时，$\mathscr{D}'_+(L(\mathbf{E};\mathbf{E}))$ 是一卷积代数，但不是可交换的，除非 $\dim\mathbf{E}=1$. 然而，它有一单位元素 $I_{\mathbf{E}}\delta$，其中 $I_{\mathbf{E}}$ 是 $\mathbf{E}$ 的恒等映射，δ 是实直线上(原点处)的 Dirac 测度. 因而，对于卷积而言，$\mathscr{D}'_+(\mathbf{E})$ 是一$\mathscr{D}'_+(L(\mathbf{E};\mathbf{E}))$(左)模.

顺便说一下，在命题 43.2 的假设下，当 S 取值于$L(\mathbf{E};\mathbf{F})$中、T 取值于 $\mathbf{E}$ 中时，公式(43.7)仍然成立.

读者也许感到奇怪：为什么这里 Laplace 变换对我们来说比 Fourier 变换更重要？ 理由在于，如果只考虑当 $t<0$ 时等于零的广义函数，那么，能够施行 Laplace 变换的广义函数要比能够施行 Fourier 变换的多得多——对于在 $+\infty$ 处以指数增长的广义函数，Laplace 变换有意义，然而，只对缓增的广义函数，才能施行 Fourier 变换. 如果我们希望把这些应用于微分方程，那么这差别是很重要的：例如，实直线上的一个常微分方程的解是形如 $t^ke^{\zeta t}$ 的指数单项式的线性组合，它乘以 Heaviside 函数 $H(t)$(当 $t<0$ 时

$H(t)=0$, 当 $t>0$ 时 $H(t)=1$)后总是可 Laplace 变换的, 然而它们不是缓增的, 除非 $\mathrm{Re}\,\zeta\leqslant 0$.

Paley–Wiener–Schwartz 定理是刻划紧支集广义函数的 Fourier 变换的特性的, 在 Laplace 变换理论中有其类似. 此类似的定理刻划了支集在 $[0,+\infty]$ 中的广义函数的 Laplace 变换的特性:

定理 43.1 令 $\mathbf{h}(p)$ 表示半平面 $\mathrm{Re}\,p>\sigma_0$ 中的一个全纯函数, 取值于 Banach 空间 $\mathbf{E}$ 中. 则下面两条件等价:

(43.10) 存在一个广义函数 $\mathbf{T}\in\mathscr{D}'_+(\mathbf{E})$, 它的 Laplace 变换等于 $\mathbf{h}(p)$;

(43.11) 存在实数 σ_1, $\sigma_0\leqslant\sigma_1<+\infty$, 一常数 $C>0$ 和一整数 $k\geqslant 0$, 使得对于所有复数 $p(\mathrm{Re}p>\sigma_1)$, 有

$$\|\mathbf{h}(p)\|_{\mathbf{E}}\leqslant C(1+|p|)^k. \tag{43.12}$$

证明 我们将只考虑纯量函数和纯量广义函数; 当它们取值于 $\mathbf{E}$ 中时, 证明是一样的.

首先证明(43.10)蕴涵(43.11). (43.10)中隐含着 $\mathbf{T}=T$ 是可 Laplace 变换的. 令 σ'_0 是使 $T_t\exp(-\sigma'_0 t)$ 是缓增的一实数, 这意味着

$$e^{-\sigma'_0 t}T_t=\sum_{j=0}^{k}(d/dt)^j f_j,$$

其中, f_j 是实直线上的连续函数, 具有下述性质: 对于某个整数 $M\geqslant 0$,

(43.13)

$$|f_j(t)|\leqslant M(1+|t|)^M \quad 对所有\ t\in\mathbf{R},\ j=0,\cdots,k.$$

现在令 $\sigma_1>\sup(\sigma_0,\sigma'_0)$, 并取 $\sigma=\mathrm{Re}\,p\geqslant\sigma_1$. 我们有

$$\begin{aligned} e^{-\sigma t}T_t&=\sum_{j=0}^{k}\exp[-(\sigma-\sigma'_0)t](d/dt)^j f_j\\ &=\sum_{j=0}^{k}\left(\frac{d}{dt}+\sigma-\sigma'_0\right)^j g_j, \end{aligned}$$

其中 $g_j=\exp[-(\sigma-\sigma'_0)t]f_j$. 令 $\varepsilon=\sigma_1-\sigma_0$, 并利用(43.13), 我们看到,

$$|g_j(t)|\leqslant M(1+|t|)^M e^{-\varepsilon t},\quad \forall t\in\mathbf{R},\ 0\leqslant j\leqslant k.$$

因而，g_j 的 Fourier 变换 $\hat{g}_j$ 是 τ 的有界的 C^∞ 函数．我们得到

$$h(p)=\mathscr{L}T(p)=\mathscr{F}(e^{-\sigma t}T_t)=\sum_{j=0}^{k}(p-\sigma_0')^j\hat{g}_j(\tau),$$

由此即得(43.12)．

其次，我们来证明(43.11)蕴涵(43.10)．不妨假设 $\sigma_1>0$．如通常一样，记 $p=\sigma+i\tau$，对于固定的 $\sigma>\sigma_1$，考虑函数 $w(p)=p^{-k-2}h(p)$．它是实直线上 τ 的可积函数．令

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{(\sigma+i\tau)t}w(\sigma+i\tau)\,d\tau=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\sigma}e^{pt}w(p)\,dp,$$

其中 γ_σ 表示(有向的)铅垂线 $\mathrm{Re}\,p=\sigma$．由于 $w(\sigma+i\tau)$ 当 $\tau\to\pm\infty$ 时的衰减[从(43.12)可得]，我们可以应用 Cauchy 积分定理，并且，正如所期望的，可以推得定义 $f(t)$ 的那个积分与 $\sigma>\sigma_1$ 无关．事实上，我们有

$$|f(t)|\leqslant C_0e^{\sigma t}\int_{-\infty}^{+\infty}(1+|\tau|)^{-2}\,d\tau, \tag{43.14}$$

其中 C_0 是一正常数，与 $\sigma>\sigma_0$ 无关．取固定的 $t<0$，并使 σ 趋于 $+\infty$，则右端趋于零，因而，左端——它与 σ 无关——必定是零．这就证明了当 $t<0$ 时 $f(t)=0$．

不等式(43.14)还证明了，对于任何 $\sigma>\sigma_1$，$e^{-\sigma t}f$ 在 $+\infty$ 处是速降的．令

$$T=(d/dt)^{k+2}f. \tag{43.15}$$

显然，$T\in\mathscr{D}'_+$，它是可 Laplace 变换的．由 f 的定义，T 的 Laplace 变换等于 h．

习　题

43.1　令 T 是大于零的任一数，u 是属于 $\mathscr{D}'_+$ 的一广义函数．证明，存在实直线 $\mathbf{R}^1$ 上一个连续函数 f，它当 $t<0$ 时等于零，和一个依赖于 u 的整数 $m\geqslant 0$，使得

$$u=(d/dt)^m f\quad 在\ ]-\infty,T[\ 中. \tag{43.16}$$

43.2　证明，任一广义函数 $u\in\mathscr{D}'_+$ 可写成级数

(43.17) $$u=\sum_{j=0}^{+\infty}(d/dt)^{m_j}f_j.$$

其中 f_j 是实直线上的连续函数，m_j 是 $\geqslant 0$ 的整数，它们组成一非减序列，并且对每个 $j=0, 1, \cdots$, $f_j(t)=0$，除非 $j-1\leqslant t<j+1$.

43.3 假设广义函数 $u\in\mathscr{D}'_+$ 是可 Laplace 变换的，即对于某个实数 σ，$e^{-\sigma t}u$ 是缓增的．证明，存在 $\mathbf{R}^1$ 中的一个连续函数 f，当 $t<0$ 时 $f(t)=0$，它也是可 Laplace 变换的，并存在一个整数 m，使得在整个直线中有 $u=(d/dt)^m f$.

43.4 从定理 43.1 推导，一个可 Laplace 变换的广义函数 $u\in\mathscr{D}'_+$，它在开的半直线 $t<t_0$ 中等于零，当且仅当存在常数 C, $k>0$ 和 $\sigma_1\in\mathbf{R}$，使得

(43.18) $$|\mathscr{L}u(p)|\leqslant C(1+|p|^k)\exp[-t_0(\operatorname{Re}p)],\quad p\in\mathbf{C},\ \operatorname{Re}p>\sigma_1.$$

由此推导，给定任一广义函数 $w\in\mathscr{D}'_+$，如果当 $t<T$ 时 $w*w=0$，则当 $t<T/2$ 时必有 $w=0$.

43.5 令 a 是具有下述性质的最大的实数：

(43.19) 给定任何 $T>0$ 和任两广义函数 $u, v\in\mathscr{D}'_+$.

(43.20) 当 $t<T$ 时 $u*v=0\Rightarrow$ 当 $t<aT$ 时 $u*(tv)=0$.

证明 $0\leqslant a\leqslant 1$．证明，如果当 $t<T$ 时 $u*v=0$，则

(43.21) 当 $t<T$ 时，$(tu)*v+u*(tv)=0$.

从(43.19)和(43.21)推导，

(43.22) 当 $t<a^2T$ 时，$(tu)*(tv)=0$,

(43.23) 当 $t<(1+a^2)T$ 时，$[u*(tv)]*[u*(tv)]=0$.

[提示：求 $u*(tv)$和(43.20)的卷积.]利用习题 43.4 的结论以及(43.23)，推导 $a=1$.

43.6 从习题 43.5 的结论推断，如果 $u, v\in\mathscr{D}'_+$，使得当 $t<T$ 时 $u*v=0$，则必定有

(43.24) $$u*(e^{pt}v)=0\quad 对所有\ t<T,\ p\in\mathbf{C}.$$

证明，当 u 和 v 是连续函数时，上面这个结论蕴涵着

(43.25) $$u(t-s)v(s)=0\quad 对所有\ s\in\mathbf{R},\ t<T,$$

并证明，如果存在一个收敛于零的数列$\{s_j\}$ $(s_j>0)$，使得 $v(s_j)\neq 0$，则当 $t<T$ 时必有 $u(t)=0$．由此，或者由正规化，或者由习题 43.2 的结论，推导一个变量的支集定理：

定理 43.2 令 u, v 是属于 $\mathscr{D}'_+$ 的广义函数．假设 v 的支集包含原点．则如果当 $t<T$ 时卷积 $u*v$ 等于零，那么当 $t<T$ 时 u 本身必等于零($T>0$).

43.7 下面，$H(t)$表示 Heaviside 函数，当 $t>0$ 时它等于 1，当 $t<0$ 时

它等于 0; $\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\alpha-1}\,dt$ ($\mathrm{Re}\,\alpha>0$)是 Euler γ 函数. 计算下面一些广义函数的 Laplace 变换:

(i) $\delta^{(j)}$, $j=0, 1, \cdots$(δ 是 Dirac 测度);

(ii) $H(t)t^{\alpha}/\Gamma(\alpha+1)$, $\mathrm{Re}\,\alpha>-1$;

(iii) $H(t)\cos t$, $H(t)\sin t$;

(iv) $H(t)e^{\zeta t}t^{\alpha}/\Gamma(\alpha+1)$, $\zeta\in\mathbf{C}$, $\mathrm{Re}\,\alpha>-1$.

43.8 令 $f(p)$, $g(p)$是一个变量的两个复系数多项式, 首项系数是1, 并且无公共因子. 证明存在一个唯一的广义函数 $u\in\mathscr{D}'_+$, 它的 Laplace 变换等于有理函数 $f(p)/g(p)$; 并计算它.

43.9 证明, 如果 a 是一$\geqslant 0$ 的实数, 则函数 $e^{-a\sqrt{p}}p^{-1/2}$ 是 $[H(t)/\sqrt{\pi t}]\exp(-a^2/4t)$ 的 Laplace 变换.

44. Laplace 变换对于解抛物型混合问题的应用

现在回到 § 40 及其后几节中提及的微分算子 $A(x, t, \partial/\partial x)$, 但是在整个这一节中我们假设其系数与 t 无关. 此算子用 $A(x, \partial/\partial x)$, 或简单地用 A 表示:

$$A=A(x, \partial/\partial x)=-\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^k}\,a^{jk}(x)\frac{\partial}{\partial x^j}+\sum_{j=1}^{n}b^j(x)\frac{\partial}{\partial x^j}+c(x),$$

我们作下述假设:

(44.1) a^{jk}($1\leqslant j, k\leqslant n$), b^j($1\leqslant j\leqslant n$), c 属于 $L^\infty(\Omega)$;

(44.2) 存在一常数 $c_0>0$, 使得对于 Ω 中几乎所有的 x 和所有 $\zeta\in\mathbf{C}^n$, 有

$$\mathrm{Re}\sum_{j,k=1}^{n}a^{jk}(x)\zeta_j\bar{\zeta}_k\geqslant c_0|\zeta|^2.$$

如在 § 41 中一样, 我们把 A 与 $H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)$ 上的一个拟双线性形式联系起来, 但是这里我们用复参数 p 代替那里的实参数 τ:

$$a_p(u,\ v)=p\int_\Omega u\bar{v}\,dx+\sum_{j,k=1}^n\int_\Omega a^{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x^j}\ \frac{\partial\bar{v}}{\partial x^k}\,dx$$
$$+\sum_{j=1}^n\int_\Omega b^j(x)\ \frac{\partial u}{\partial x^j}\ \bar{v}\,dx+\int_\Omega c(x)u\bar{v}\,dx.$$

(41.1)的类似在这里是有效的:

(44.3) 存在实数 σ_0, 使得对所有 $p\in\mathbf{C}(\mathrm{Re}\,p>\sigma_0)$, 对所有 $u\in H^1(\Omega)$,

(44.4) $$c_0\|u\|^2_{H^1(\Omega)}\leqslant 2\mathrm{Re}\,a_p(u,\ u).$$

从 Lax-Milgram 定理 (引理 23.1) 我们推得, $p+A$ 是从 $H^1_0(\Omega)$ 到 $H^{-1}(\Omega)$ 上的一个同构 [我们回忆一下, 如果 u, $v\in H^1_0(\Omega)$, 则

(44.5) $$a_p(u,\ v)=\langle(p+A(x+\partial/\partial x))u,\ \bar{v}\rangle.]$$

令 $\tilde{G}(p)$ 表示 $(p+A)$: $H^1_0(\Omega)\to H^{-1}(\Omega)$ 的逆. 自然, $\tilde{G}(p)$ 是从 $H^{-1}(\Omega)$ 到 $H^1_0(\Omega)$ 上的一个同构 [$\tilde{G}(p)$ 是 $p-A$ 关于 Ω 中的弱 Dirichlet 问题的 Green 函数]. 从(44.4)我们推得

(44.6) 对于所有使得 $\mathrm{Re}\,p>\sigma_0$ 的复数 p, $\tilde{G}(p)$ 的算子范数 $\leqslant 2/c_0$.

注意, 在半平面 $\mathrm{Re}\,p>\sigma_0$ 中, $p+A$ 显然是 p 的全纯函数, 取值于 $L(H^1_0(\Omega);\ H^1(\Omega))$ 中. 我们将要用下述结果:

引理 44.1 令 $\mathscr{O}$ 是复平面中的一开子集, $T(p)$ 是 $\mathscr{O}$ 中 p 的全纯函数, 取值于 $L(\mathbf{E};\ \mathbf{F})$ 中 ($\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$ 是两个 Banach 空间), 使得对每个 $p\in\mathscr{O}$, $T(p)$ 是从 $\mathbf{E}$ 到 $\mathbf{F}$ 上的一个同构. 则 $T^{-1}(p)$ 是 $\mathscr{O}$ 中 p 的全纯函数, 取值于 $L(\mathbf{F};\ \mathbf{E})$ 中.

证明 先证明 $T^{-1}(p)$ 是 $\mathscr{O}$ 中 p 的连续函数, 取值于 $L(\mathbf{F};\ \mathbf{E})$ 中.

令 p_0 表示 $\mathscr{O}$ 中任意一点. 因为 $T(p_0)$ 是一同构, 因而存在一常数 $C_0>0$, 使得

$$\|\mathbf{e}\|_{\mathbf{E}}\leqslant C_0\|T(p_0)\mathbf{e}\|_{\mathbf{F}}\quad \text{对所有 } \mathbf{e}\in\mathbf{E}.$$

因而, 对于充分接近 p_0 的 $p\in\mathscr{O}$,

$$\|\mathbf{e}\|_{\mathbf{E}}\leqslant C_0\|T(p)\mathbf{e}\|_{\mathbf{F}}+C_0\|T(p)-T(p_0)\|\,\|\mathbf{e}\|_{\mathbf{E}}$$
$$\leqslant C_0\|T(p)\mathbf{e}\|_{\mathbf{F}}+\frac{1}{2}\|\mathbf{e}\|_{\mathbf{E}}.$$

这就指出,$T^{-1}(p)$ 的算子范数在 $\mathscr{O}$ 中是局部有界的. 但是

$$T^{-1}(p)-T^{-1}(p_0)=T^{-1}(p_0)\{T(p_0)-T(p)\}T^{-1}(p),$$

这证明了,对于充分接近 p_0 的 p,有

$$\|T^{-1}(p)-T^{-1}(p_0)\|\leqslant 2C_0^2\|T(p_0)-T(p)\|.$$

这样,$T^{-1}(p)$ 即为 $\mathscr{O}$ 中 p 的连续函数. 我们有 $T(p)T^{-1}(p)=I_{\mathbf{F}}$, $\mathbf{F}$ 的恒等映射. 把 Cauchy-Riemann 算子 $\partial/\partial\bar{p}$ 作用到此等式的两端, 得到 $T(p)(\partial/\partial\bar{p})T^{-1}(p)=0$, 由此[用 $T^{-1}(p)$ 左乘之后], $(\partial/\partial\bar{p})T^{-1}(p)=0$, 这就是我们想要得到的. 证毕.

现在我们可以应用定理 43.1 了: $\widetilde{G}(p)$ 在半平面 $\operatorname{Re} p>\sigma_0$ 中是 p 的全纯函数, 取值于 Banach 空间 $L(H^{-1}(\Omega);\ H_0^1(\Omega))$ 中, 其算子范数与 p 无关地有界. 因而, 它是一广义函数 $G_t\in\mathscr{D}'_+(L(H^{-1}(\Omega);\ H_0^1(\Omega)))$ 的 Laplace 变换, G_t 满足下面两个方程:

$$(\partial/\partial t+A(x,\ \partial/\partial x))G_t=I\delta_t, \tag{44.7}$$

$$G_t(\partial/\partial t+A(x,\ \partial/\partial x))=I\delta_t, \tag{44.8}$$

在(44.7)中 I 表示 $H^{-1}(\Omega)$ 的恒等映射, 在(44.8)中 I 表示 $H_0^1(\Omega)$ 的恒等映射[δ_t 表示 t 变量的 Dirac 测度, $I\delta_t$ 是算子值广义函数, 它把任一试验函数 φ 对应于值 $\varphi(0)I$]. 方程(44.7)和(44.8)是方程 $(p+A)\widetilde{G}(p)=I$ 和 $\widetilde{G}(p)(p+A)=I$ 的 Laplace 变换.

我们考虑混合问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}+A(x,\ \partial/\partial x)u=f \quad \text{在 } \Omega\times]0,\ T[\text{ 中}, \tag{44.9}$$

$$u-\tilde{g}\in H_0^1(\Omega) \quad \text{在}[0,\ T]\text{中几乎处处}, \tag{44.10}$$

$$u(\cdot,\ 0)=u_0, \tag{44.11}$$

我们仍作与前几节中相同的假设:

$$f\in L^2(0,\ T;\ H^{-1}(\Omega)), \quad u_0\in L^2(\Omega), \tag{44.12}$$

$$\tilde{g}\in L^2(0,\ T;\ H^1(\Omega)), \quad \frac{d\tilde{g}}{dt}\in L^2(0,\ T;\ H^{-1}(\Omega)), \tag{44.13}$$

(44.14) 当 $t>0$ 趋于 0 时, $\tilde{g}(\cdot,t)$ 在 $L^2(\Omega)$ 中收敛[于 $\tilde{g}(\cdot,0)$].

自然，由定理 40.1 我们知道，此问题有一个唯一的解 u，它具有一些好的性质．但是这里的问题是如何用数据和算子 G_t 来表示这个解．

为此，我们先用 $U=u-\tilde{g}$ 代替 u，并令

(44.15)
$$F=f-\left\{\frac{\partial\tilde{g}}{\partial t}+A(x,\partial/\partial x)\tilde{g}\right\}$$
$$[\in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))].$$

现在，我们的问题就变为下述问题：

(44.16) $\dfrac{\partial U}{\partial t}+A(x,\partial/\partial x)U=F$ 在 $\Omega\times]0,T[$ 中，

(44.17) $U\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$，

(44.18) 当 $t\to+0$ 时 $U(\cdot,t)$ 在 $L^2(\Omega)$ 中收敛于 U_0.

我们知道，解 U 存在，唯一，且属于 $C^0([0,T];L^2(\Omega))$（引理 40.2）．我们希望用 F 和 U_0，以及用 G_t 来表示 U.

首先，令 F 在 $[0,T]$ 之外等于零，我们把 F 延拓到 $-\infty<t<+\infty$．现在不妨把 F 视作 $\mathscr{D}'_+(H^{-1}(\Omega))$ 的一个元素，其支集包含在闭区间 $[0,T]$ 中．

其次我们定义 V：在 $[0,T]$ 中 $V=U$，当 $t<0$ 和 $t>T$ 时 $V=0$．由关于具有跳跃的连续函数的广义函数导数的标准公式［这里，函数取值于 $H^{-1}(\Omega)$］，我们有

$$\frac{dV}{dt}=\left\{\frac{dU}{dt}\right\}+U_0\delta_0-U(\cdot,T)\delta_T,$$

其中，$\{dU/dt\}$ 表示 $L^2(-\infty,+\infty;H^{-1}(\Omega))$ 的一元素，在 $[0,T]$ 中它等于 dU/dt，在 $[0,T]$ 之外它等于零；δ_0（相应地，δ_T）是在 $t=0$（相应地，$t=T$）处的 Dirac 测度．最后，我们得到

(44.19)
$$\frac{dV}{dt}+A\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)V=F+U_0\delta_0-U(\cdot,T)\delta_T \quad 在\ \Omega\times\mathbf{R}\ 中.$$

这就导致了

(44.20)
$$V=G*F+GU_0-(GU(\cdot,T))*\delta_T \quad (在\ \Omega\times\mathbf{R}\ 中),$$

其中卷积是关于变量 t 施行的，同时，G 是作为 F, U_0, $U(\cdot, T)$ 的值域上的一个算子．这些值域属于 $H^{-1}(\Omega)$，而 G 作用的结果是把它们映入 $H_0^1(\Omega)$．注意，$(GU(\cdot, T))*\delta_T=G_{t-T}U(\cdot, T)$ 的支集包含在 $[T, +\infty[$ 中．因而，如果把所有的函数和广义函数限制于开区间 $]0, T[$，就得到 $V=GU_0+G*F$，即，

(44.21)　　$U=GU_0+G*F$　在 $\Omega\times]0, T[$ 中．

这就是常微分方程理论中标准公式[参阅(11.21)]的自然推广．特别，为了表示，或者计算(44.9)—(44.10)—(44.11)的解 u，最好用(44.21)．但是如果我们想有一个用 u_0, $\tilde{g}$ 和 f 表示 u 的一般公式，从(44.21)就可推导而得——只要我们谨慎从事．

用 $\tilde{g}_0$ 代替 $\tilde{g}(\cdot, 0)$．从(44.21)我们导出

$$u=\tilde{g}+G(u_0-\tilde{g}_0)+G*f-G*\left\{\frac{\partial\tilde{g}}{\partial t}+A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\tilde{g}\right\}.$$

再次应用关于在原点有一"有限"跳跃的连续函数的广义函数导数的公式，就得到

$$H(t)\left\{\frac{\partial\tilde{g}}{\partial t}+A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\tilde{g}\right\}$$
$$=\left\{\frac{\partial}{\partial t}+A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\right\}H(t)\tilde{g}-\delta_0\tilde{g}_0,$$

因而，有

(44.21′)　　$u=Gu_0+G*f+M*\tilde{g}$,

其中，　$M*\tilde{g}=\tilde{g}-G*\left\{\frac{\partial}{\partial t}+A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\right\}H(t)\tilde{g}$.

应用公式(44.8)，并从它得出 $M*\tilde{g}\equiv 0$ 这一结论将是一个错误．事实上，(44.8)的两端都作用在 $H_0^1(\Omega)$ 上．但是，除了平凡情形——一开始我们就取 $\tilde{g}\equiv 0$——之外，$\tilde{g}$ 的值不在 $H_0^1(\Omega)$ 中．立刻能看到的是，如果 $\tilde{g}_1$，象 $\tilde{g}$ 一样，是另一取值于 $H^1(\Omega)$ 中的函数，并且使得对于几乎每个 $t>0$ 有 $\tilde{g}-\tilde{g}_1\in H_0^1(\Omega)$，那么必定有

$$M*\tilde{g}=M*\tilde{g}_1.$$

这意味着 $M*$ 作用在取值于商空间 $H^1(\Omega)/H_0^1(\Omega)$ 中的 t 的函数 g 上(作为关于 t 的卷积)，此商空间也就是属于 $H^1(\Omega)$ 的函数在

Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上的迹的空间(§ 26). 在关于 Ω 和 $A(x, \partial/\partial x)$ 的适当的正规性假设下, $M*g$ 是一关于 t 的卷积算子, 起着一个从 $H^{1/2}(\partial\Omega)$ 到 $H^1(\Omega)$ 的算子的作用:

(44.21″)

$$(M*g)(x, t)=\int_0^t\int_{\partial\Omega} M(x, y; t-s)g(y, s)d\sigma_y ds,$$
$$x\in\Omega, \ t>0,$$

其中 $d\sigma_y$ 是 $\partial\Omega$ 上的面积测度, $g(y, t)$ 是一适当正规的 $t>0$ 的函数, 取值于 $H^{1/2}(\partial\Omega)$ 中. 自然, $M*g$ 是下述混合问题的解:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)u=0 \quad 在\ \Omega\times]0, T[\ 中,$$

$$u(x, 0)=0, \ x\in\Omega; \quad u(y, t)=g(y, t), \quad y\in\partial\Omega, \ t>0.$$

现在我们将讨论某些例子. 它们涉及热导算子

$$L=\frac{\partial}{\partial t}-\Delta, \qquad \Delta=\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)^2.$$

例 44.1　热导方程($\Omega=\mathbf{R}^n$)的基本解

我们研究的问题是 Cauchy 问题

(44.22)
$$\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u=f\in L^2(0, T; H^{-1}(\mathbf{R}^n)),$$

(44.23)
$$u|_{t=0}=u_0\in L^2(\mathbf{R}^n),$$

其中 u 表示属于 $L^2(0, T; H^1(\mathbf{R}^n))$ 的唯一的解. 在这个情形, 因为不存在边界条件, 我们就有 $u=U$, 因而[参阅(44.21)]

(44.24)
$$u=Gu_0+G*f \quad 在\ \mathbf{R}^n\times]0, T[\ 中.$$

我们希望明显地计算算子 G. 它的 Laplace 变换 $\widetilde{G}(p)$ 是 $p-\Delta$: $H^1(\mathbf{R}^n)\to H^{-1}(\mathbf{R}^n)$ 的逆. 由 Fourier 变换立刻看到

(44.25)

$$\widetilde{G}(p)\varphi(x)=(2\pi)^{-n}\int e^{ix\cdot\xi}(p+|\xi|^2)^{-1}\hat{\varphi}(\xi)d\xi, \quad \varphi\in C_c^\infty(\mathbf{R}^n).$$

这里 $\hat{\varphi}$ 表示 φ 的 Fourier 变换:

$$\hat{\varphi}(\xi)=\int e^{-ix\cdot\xi}\varphi(x)dx.$$

我们可以应用 Laplace 变换的反演公式(43.5)

$$G_t\varphi=(2\pi)^{-n}\int e^{ix\cdot\xi}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\sigma}e^{pt}\frac{dp}{p+|\xi|^2}\right)\hat{\varphi}(\xi)d\xi,$$

其中 γ_σ 是铅垂线 $\operatorname{Re}p=\sigma>0$. 乍看起来,交换积分次序似乎是不合法的,因为在关于 p 的积分中被积函数不是绝对可积的(在 γ_σ 上). 但是事实上我们正在应用关于广义函数的 Fubini 定理, 读者不妨这样想象: 这里隐含有一个 $\chi(\operatorname{Im}p)$ 这样类型的收敛因子, 其中 $\chi\in C_c^\infty(\mathbf{R}^1)$ 适当地收敛于 1. 我们来计算

$$K(\xi,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\sigma}e^{pt}\frac{dp}{p+|\xi|^2}.$$

处理这个积分的正确方法是把 $K(\xi,t)e^{-\sigma t}$ 看作 τ 的函数

$$(\sigma+i\tau+|\xi|^2)^{-1}$$

的 Fourier 逆变换, 显然, 后者在 γ_σ 上是平方可积的. 我们知道, 当 $t<0$ 时 $K\equiv0$. 事实上(参阅习题 43.7, (iv)), 我们知道,

$$K(\xi,t)=H(t)\exp(-|\xi|^2t). \tag{44.26}$$

注意,

$$\frac{\partial K}{\partial t}+|\xi|^2K=\delta_t;$$

换句话说, K 是微分算子 $\partial/\partial t-\Delta$ 关于 x 的 Fourier 变换的基本解. 因为

$$G_t\varphi=(2\pi)^{-n}\int e^{ix\cdot\xi}K(\xi,t)\hat{\varphi}(\xi)d\xi,$$

它指出了 $K(\xi,t)$ 是 G 关于 x 的 Fourier 变换, 我们立刻得到

$$G=(2\sqrt{\pi t})^{-n}H(t)\exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right), \tag{44.27}$$

它是热导方程的标准的基本解(参阅 § 6.1).

例 44.2 在一金属棒内部的温度分布

这个例子与一混合问题有关, 在此问题中, 空间变量个数是 1, 开集 Ω 是一有限区间, 譬如 $]a,b[$. 它可"具体地"看作为在一金属棒内或均匀的墙内确定温度的分布和变化的问题; 墙的厚度是有限的(其值 $L=b-a$), 但是它的其它维度, 高和宽, 是无限的, 根据给定的计划(对我们而言, 它用函数 $\tilde{g}$ 表示)加热它的两个面(相应于 $x=a$ 和 $x=b$). 问题的精确提法是

$$(44.28)\qquad \frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\quad a<x<b,\ 0<t<T,$$

$$(44.29)\quad u(a,\ t)=g_a(t),\quad u(b,\ t)=g_b(t),\quad 0<t<T,$$

$$(44.30)\qquad u(x,\ 0)=u_0(x),\quad a<x<b.$$

与一般情形相一致，假设 $u_0\in L^2(a,\ b)$，g_a 和 g_b 的导数(与它们自身一起)属于 $L^2(0,\ T)$. 在现在的情形中，函数 $\tilde{g}$ 的选择是特别简单的:

$$\tilde{g}(x,\ t)=(b-a)^{-1}\{g_a(t)(b-x)+g_b(t)(x-a)\}.$$

我们不妨作函数变换 $U=u-\tilde{g}$，并令

$$F=-\frac{\partial\tilde{g}}{\partial t}=-(b-a)^{-1}[g'_a(t)(b-x)+g'_b(t)(x-a)].$$

除上述之外，如果令

$$U_0=u_0-\tilde{g}(\cdot,\ 0),$$

则问题(44.28)—(44.29)—(44.30)就变为

$$(44.31)\qquad \frac{\partial U}{\partial t}-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=F,\quad a<x<b,\ 0<t<T,$$

(44.32) 当 $x=a$ 和 $x=b$ 时，对于任意的 t, $0<t<T$, $U=0$,

(44.33) $U=U_0$ 在 $t=0$ 时.

我们希望计算这一情形中的算子 G. 其 Laplace 变换 $\tilde{G}(p)$ 是算子

$$p-\frac{d^2}{dx^2}$$

在区间 $]a,\ b[$ 中的 Green 函数. 我们总假设 $\mathrm{Re}\, p\geqslant 0$. 我们有

$$(44.34)\qquad \tilde{G}(p)\varphi(x)=\int_a^b\tilde{G}(x,\ x';\ p)\varphi(x')dx',$$

$$\varphi\in C^\infty([a,\ b]),$$

其中(参阅习题 29.12)

$$(44.35)\quad \tilde{G}(x,\ x';\ p)=\tilde{G}_\infty(x-x';\ p)+\tilde{h}(x,\ x';p),$$

而

$$(44.36)\quad \tilde{G}_\infty(y;\ p)=\frac{1}{2\sqrt{p}}\{H(y)e^{-y\sqrt{p}}+H(-y)e^{y\sqrt{p}}\},$$

以及(记 $L=b-a$)

(44.37)

$$\tilde{h}(x, x'; p) = -\frac{1}{2\sqrt{p}}(1-e^{-2L\sqrt{p}})^{-1}$$
$$\cdot\left\{\exp\left[-2\sqrt{p}\left(\frac{x+x'}{2}-a\right)\right]\right.$$
$$-\exp\left[-2\sqrt{p}\left(L+\frac{x-x'}{2}\right)\right]$$
$$+\exp\left[-2\sqrt{p}\left(b-\frac{x+x'}{2}\right)\right]$$
$$\left.-\exp\left[-2\sqrt{p}\left(L-\frac{x-x'}{2}\right)\right]\right\}.$$

读者容易验证，在任何半平面 $\operatorname{Re} p \geqslant \sigma_0 > 0$ 中，$\tilde{G}_\infty$ 和 $\tilde{h}$ 是 p 的有界函数. 注意, $\tilde{G}_\infty(y; p)$ 是 $p-(d/dy)^2$ 的一个基本解, 而 $\tilde{h}(x, x'; p)$ 是齐次方程

$$\{p-(d/dx)^2\}\tilde{h}=0$$

的解, 它使得对任何 x', p, 有

$$\tilde{h}(a, x'; p)+\tilde{G}_\infty(a-x'; p)=\tilde{h}(b, x'; p)+\tilde{G}_\infty(b-x'; p)=0.$$

由于这个事实, 对于所有 x', $a<x<b$, 所有 p, $\operatorname{Re} p>0$, 有

$$\left(p-\frac{d^2}{dx^2}\right)\tilde{G}(x, x'; p)=\delta(x-x'), \tag{44.38}$$

$$\tilde{G}(a, x'; p)=\tilde{G}(b, x'; p)=0. \tag{44.39}$$

自然, 在整个推理中, $\sqrt{p}$ 表示平方根函数的这样一个分枝, 即, 对于实的大于零的 p, 它大于零.

注意, $\tilde{G}(x, x'; p)$ 可表示为形如

$$c\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-\alpha\sqrt{p}}, \quad \alpha\geqslant 0 \tag{44.40}$$

的项的无穷级数.

容易证明(不然, 从 Laplace 变换表中也能找到), $p^{-1/2}e^{-\alpha\sqrt{p}}$ ($\alpha\geqslant 0$) 是 $H(t)(\pi t)^{-1/2}\exp(-\alpha^2/4t)$ 的 Laplace 变换(参阅习题 43.9). 考虑到这个事实, 从(44.36)就推得 $\tilde{G}_\infty$ 是热导方程的标准基本解的 Laplace 变换[参阅(44.27)]:

(44.41)
$$G_\infty(y, t)=\frac{H(t)}{2\sqrt{\pi t}}\exp\left(\frac{-y^2}{4t}\right).$$

$\tilde{h}(x, x'; p)$的 Laplace 逆变换的表达式比较复杂一些:

(44.42)
$$\begin{aligned}h(x, x'; t)=\frac{H(t)}{2\sqrt{\pi t}}\sum_{j=1}^{+\infty}\Big\{&\exp\Big[-\frac{1}{t}\Big(jL+\frac{x-x'}{2}\Big)^2\Big]\\&+\exp\Big[-\frac{1}{t}\Big(jL-\frac{x-x'}{2}\Big)^2\Big]\\&-\exp\Big[-\frac{1}{t}\Big(jL+\frac{x+x'}{2}-b\Big)^2\Big]\\&-\exp\Big[-\frac{1}{t}\Big(jL+a-\frac{x+x'}{2}\Big)^2\Big]\Big\}.\end{aligned}$$

为了推导问题(44.28)—(44.29)—(44.30)的解 u 的表达式，只需利用公式(44.21)即可.

当 a 趋于 $-\infty$ 及(或) b 趋于 $+\infty$ 时，上面的公式仍然有效. 例如，考虑 $a=0$, $b=+\infty$ 这一情形. 此时，有

(44.43)
$$G(x, x'; t)=G_\infty(x-x', t)-G_\infty(x+x'; t).$$

引进函数

(44.44)
$$E_1(x, t)=(\pi t)^{-1/2}\int_0^x\exp(-y^2/4t)\,dy\quad(x\in\mathbf{R},\ t\geqslant 0).$$

应用公式(44.21)直接导致下述表达式:

(44.45)
$$\begin{aligned}u(x, t)=&\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\frac{\partial E_1}{\partial y}(y, t)u_0(x-y)\,dy\\&-\int_0^t\frac{\partial E_1}{\partial t}(x, t-s)g(s)\,ds\end{aligned}$$

是下列混合问题的解:

(44.46)
$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad \forall x>0,\ \forall t>0;$$

(44.47)
$$u(x, 0)=u_0(x),\ \forall x>0;\quad u(0, t)=g(t),\ \forall t>0.$$

习 题

44.1 当 u_0 和 g 是闭的半直线 $[0, +\infty[$ 中的连续函数时，验证，由(44.45)给出的函数 $u(x, t)$ 在 $x>0$, $t>0$ 时是 (x, t) 的连续函数，并且，(44.45)右端第一项当 $t\to+0$ 时收敛于 $u_0(x)$，而第二项当 $x\to+0$ 时收敛于 $g(t)$.

44.2 考虑混合问题(44.46)—(44.47)，其中取 $u_0\equiv 0$, $g\equiv 1$. 证明，在闭的第一象限 $\{(x, t)\in\mathbf{R}^2;\ x\geqslant 0,\ t\geqslant 0\}$ 中，解 u 在"隅角"(0, 0)处不是连续的.

44.3 考虑混合问题(44.46)—(44.47)，其中取 $u_0\equiv 0$. 关于(44.47)中的边界函数 $g(t)$，假设(44.13)的含义是什么(其中 $\Omega=\mathbf{R}^1_+$)? 验证，如果(44.13)成立，则当 $t\to+0$ 时，

$$\int_0^{+\infty}|u(x, t)|^2\,dx\to 0.$$

44.4 令 m 是一个 $\geqslant 1$ 的整数，Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的一有界开子集，具有 C^m 边界(并且，Ω 位于其边界的一侧). 考虑问题:

(44.48) $$\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u=f \quad \text{在 } \Omega\times]0, +\infty[\text{ 中},$$

(44.49) $$u|_{t=0}=u_0 \quad \text{在 } \Omega \text{ 中},$$

(44.50) $$(u-\tilde{g})(\cdot, t)\in H^1_0(\Omega) \quad \text{对于几乎每个 } t>0.$$

关于数据，我们作如下假设:

(44.51) $$f\in L^2(0, +\infty;\ H^{m-2}(\Omega)),\quad u_0\in H^{m-1}(\Omega),$$

(44.52)
$$\tilde{g}\in L^2(0, +\infty;\ H^m(\Omega)),\quad \frac{d\tilde{g}}{dt}\in L^2(0, +\infty;\ H^{m-2}(\Omega)).$$

利用关于 t 的 Laplace 变换，并利用引理 40.3(习题 40.6)，证明，(44.48)—(44.49)—(44.50)的解 u 关于变量 x 有如下的正规性性质:

(44.53) $$u\in L^2(0, +\infty;\ H^m(\Omega)),\quad \frac{du}{dt}\in L^2(0, +\infty;\ H^{m-2}(\Omega)),$$

因而，

(44.54) $$u\in C^0([0, +\infty[;\ H^{m-1}(\Omega)).$$

44.5 令 $\mathbf{V}\subset\mathbf{H}$ 是两个 Hilbert 空间，从 $\mathbf{V}$ 到 $\mathbf{H}$ 的内射是连续的，并有稠像；它的"反转置"是从 $\mathbf{H}$ 到 $\mathbf{V}$ 的反对偶空间 $\overline{\mathbf{V}}'$ 中的一连续内射映射. 考虑从 $\mathbf{V}$ 到 $\overline{\mathbf{V}}'$ 上的一个正同构 A(这样，对每个 $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$, $\langle A\mathbf{v}, \overline{\mathbf{v}}\rangle^-\geqslant c_0\|\mathbf{v}\|^2_{\mathbf{V}}$; $c_0>0$). 证明，可以定义 A 的正平方根 $A^{1/2}$，并证明它是从 $\mathbf{V}$ 到 $\mathbf{H}$ 上的一个同构.

对抽象 Cauchy 问题

$$\frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2}+A\mathbf{u}=\mathbf{f}, \quad \forall t>0; \tag{44.55}$$

$$\mathbf{u}|_{t=0}=\mathbf{u}_0\in\mathbf{V}, \quad \left.\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right|_{t=0}=\mathbf{u}_1\in\mathbf{H}. \tag{44.56}$$

施行 Laplace 变换，在此问题中假设 $\mathbf{f}(t)$是 $t\geqslant 0$ 的 $\mathbf{H}$ 值连续函数. 从关于 Laplace 变换的公式推导,在某种可确切叙述的意义下,对于 $t\geqslant 0$, 我们有

(44.57)

$$\mathbf{u}(t)=\cos(tA^{1/2})\mathbf{u}_0+\sin(tA^{1/2})A^{-1/2}\mathbf{u}_1+\int_0^t\sin(sA^{1/2})A^{-1/2}\mathbf{f}(t-s)ds.$$

将此与(13.10)加以比较.

44.6 令 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个开子集. 将习题 44.5 的结果应用于下述情形: $\mathbf{V}=H_0^1(\Omega)$, $\mathbf{H}=L^2(\Omega)$, A 由 Ω 上一个强椭圆微分算子 $A(x, \partial/\partial x)$所定义. 我们回忆一下,$H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$上与 $A(x, \partial/\partial x)$相连带的拟双线性形式必定是 Hermite 的和强制的(定义 23.1). 考虑具有 Dirichlet 型边值数据的混合问题:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+A(x, \partial/\partial x)u=f \quad 在\ \Omega\times]0, T[\ 中(T>0), \tag{44.58}$$

$$u|_{t=0}=u_0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=u_1 \quad 在\ \Omega\ 中, \tag{44.59}$$

$$u(\cdot, t)-\tilde{g}(\cdot, t)\in H_0^1(\Omega) \quad 对于几乎所有\ t\in]0, T[. \tag{44.60}$$

关于数据作下述假设:

$$f\in C^0([0, T]; H^0(\Omega)),\ u_0\in H_0^1(\Omega),\ u_1\in H^0(\Omega), \tag{44.61}$$

$$\tilde{g}\in C^j([0, T]; H^{2-j}(\Omega)), \quad j=0, 1, 2. \tag{44.62}$$

证明,

$$u=\frac{\partial G}{\partial t}u_0+Gu_1+G*f+M*\tilde{g}, \tag{44.63}$$

其中, G 是$(p^2+A)^{-1}$的 Laplace 逆变换[在关于 Ω 的适当假设下, 可将它视作从 $L^2(\Omega)$到 $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$上的一个同构],而

$$M*\tilde{g}=\tilde{g}-G*\left(\frac{\partial^2\tilde{g}}{\partial t^2}+A\tilde{g}\right) \tag{44.64}$$

(卷积必须理解为关于时间 t 的).

44.7 取 Ω 为实直线中的一有界区间 $]a, b[$(其长度 $L>0$), $A=-d^2/dx^2$. 证明,习题 44.6 中用 G 表示的广义函数,现在,由

$$\begin{aligned} G(x, x'; t)=\frac{1}{2}\{&K(x-x', t)+K(x'-x, t)\\ &-K(x+x', t+2a)-K(x+x', t-2b)\} \end{aligned} \tag{44.65}$$

给出,其中

(44.66) $$K(y, t)=H(y)H(t-y)+\sum_{j=1}^{+\infty}H(t-y-2jL)$$

[$H(\cdot)$是 Heaviside 函数].

45. 连续半群理论基本知识

我们继续研究微分算子 $A=A(x, \partial/\partial x)$ 与时间变量 t 无关的情形. 到目前为止, 我们把 A 看作一有界线性算子 $H_0^1(\Omega)\to H^{-1}(\Omega)$; 我们曾利用下述事实: 对于足够大的 $\tau>0$, $\tau+A$ 是从 $H_0^1(\Omega)$ 到 $H^{-1}(\Omega)$ 上的一个同构. 但是,为了利用 A 的连续性,或有界性, 我们不得不付出代价. 这已经在上一节中提到: 如果 A 是从一 Hilbert 空间 $\mathbf{H}$ 到它自身中的一个有界线性算子, 那么, 在解初始值问题

(45.1) $$\mathbf{u}_t+A\mathbf{u}=\mathbf{f}, \quad 0<t<T,$$

(45.2) $$\mathbf{u}(0)=\mathbf{u}_0$$

时,容许用指数函数 e^{-tA}[参阅(44.21)及其下面的注]. 如 A 是一个从一 Hilbert 空间到另一 Hilbert 空间中的算子,就不能遵循这个途径.在这情形, e^{-tA} 没有意义. 但是可以把 A 视作定义域和值域都在同一 Hilbert 空间 $\mathbf{H}=L^2(\Omega)$ 中的一个无界线性算子,并且试着去构作指数算子 e^{-tA}. 期望指数算子 e^{-tA} 是从 $\mathbf{H}$ 到其自身中的有界线性映射, 甚至期望它是 $\mathbf{H}$ 的一线性自同构, 这并非过分.

这个途径有种种优点. 其一, 可以在 $L^2(\Omega)$ 中进行演算, 并且在 $f\in L^2(0, T; H^0(\Omega))$——而不只是 $f\in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$——的情形, 能够较好地利用我们的信息. 更重要的是, 我们能够处理不满足强椭圆性条件(44.2)的微分算子 A 的初始值问题. 在下面两个例中(两者都是 Cauchy 问题)将指出, 这样的期望不是过分的.

例 45.1 热导方程的 Cauchy 问题

问题与例 44.1 中相同. 我们将利用在那里得到的结论. 在这情形, $-A=\Delta$——$\mathbf{R}^n$ 中的 Laplace 算子. 这里, 关于算子 e^{-tA},

只存在一种可能的选择，这就是与热导方程的基本解

$$E(x,\ t)=\frac{H(t)}{(2\sqrt{\pi t})^n}\exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right)$$

关于 x 的卷积．对于 $t>0$，我们有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}E(x,\ t)dx=1,$$

当 $t\to+0$ 时，$E(\cdot,\ t)$ 收敛于 Dirac 广义函数 $\delta(x)$．由此推得，与 E 的(关于 x 的)卷积确定一个从 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 到其自身中的有界线性算子；当 $t\to+0$ 时，这个算子收敛于恒等算子．

例 45.2　Schrödinger 方程的 Cauchy 问题

考察问题(45.1)—(45.2)，其中 $A=-i\Delta$(参阅 § 6，例 6.2)．注意，这里不满足椭圆性假设(44.2)．然而，如果 $f\in L^2(0,\ T;\ L^2(\mathbf{R}^n))$ 和 $u\in L^2(\mathbf{R}^n)$，那么，施行关于 x 的 Fourier 变换，这问题是容易解决的．由 § 6 中(例 6.2)的推理，我们发现 e^{-tA} 有意义：它是与 Schrödinger 算子的基本解

$$E(x,\ t)=\exp\left[-i(n-2)\frac{\pi}{4}\right]\frac{H(t)}{(2\sqrt{\pi t})^n}\exp\left(-\frac{|x|^2}{4it}\right)$$

关于 x 变量的卷积．为了看到对每个 t，与 $E(\cdot,\ t)$ 的卷积确定 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 上的一个有界线性算子，只需回到它(关于 x)的 Fourier 变换：

$$\tilde{E}(\xi,\ t)=iH(t)\exp(-it|\xi|^2)\tag{45.3}$$

(参阅例 6.2)，并证明与 $\tilde{E}(\cdot,\ t)$ 的乘法定义了一个 $L^2(\mathbf{R}_n)$ 上的有界线性算子．事实上，对于 $t>0$，与 $\tilde{E}(\cdot,\ t)$ 的乘法确定 $L^2(\mathbf{R}_n)$ 上的一个酉算子，因而，$\underset{(x)}{E*}$ 是 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 上的一个酉算子．

在上面两例中，我们有

$$[E(\cdot,\ t)*]\circ[E(\cdot,\ t')*]=E(\cdot,\ t+t'),\quad 0<t,\ t',\tag{45.4}$$

$$E(\cdot,\ 0)*=\text{恒等算子},\tag{45.5}$$

这就是人们应该期望的指数算子 e^{-tA} 的性质．这些性质被推广

于连续半群的定义中：†

定义 45.1 令 $\mathbf{E}$ 是一 Banach 空间. 从 $\mathbf{R}_+$ 到 $L(\mathbf{E};\ \mathbf{E})$ 中的映射 $t\mapsto\mathscr{T}_t$ 称为一连续半群，如果它有下面三个性质：

(45.6) $$\mathscr{T}_s\mathscr{T}_t=\mathscr{T}_{s+t}\ (s,\ t\geqslant 0),$$

(45.7) $$\mathscr{T}_0=I,\ \mathbf{E}\ \text{的恒等映射},$$

(45.8) 当 $L(\mathbf{E};\ \mathbf{E})$ 赋予 $\mathbf{E}$ 中的点态收敛拓扑时，从 $\mathbf{R}_+$ 到 $L(\mathbf{E};\ \mathbf{E})$ 中的映射 $t\mapsto\mathscr{T}_t$ 是连续的.

后一性质(45.8)意味着，给定任何 $t_0\in\mathbf{R}_+$ 和任何 $\mathbf{e}\in\mathbf{E}$，当 $t\to t_0$ 时，$\|(\mathscr{T}_t-\mathscr{T}_{t_0})\mathbf{e}\|_{\mathbf{E}}\to 0$. 读者也许要问，我们为什么不采取较强类型的收敛性，特别是在算子范数意义下的收敛性. 如果采用这类收敛性，那么就会排除非常重要的例 45.1 和 45.2. 例如，当 $t>0$ 收敛于零时，这是不对的，即由(45.3)给出的 $\widehat{E}(\xi,\ t)$，作为 L^2_ξ 上的乘法算子，依范数收敛于恒等算子：给定 $t>0$，我们可以选取 $|\xi|=(\pi/t)^{1/2}$，并可验证，$\widehat{E}(\xi,\ t)-\widehat{E}(\xi,\ 0)$ 在 L^∞_ξ 中的范数等于 2. 事实上，对于算子范数连续的唯一的算子半群是形如 $\exp(-tA)$ 的半群，其中 A 是有界的(习题 45.1).

在我们感兴趣的应用中，总是从一个给定的微分算子 $A=A(x,\ \partial/\partial x)$ 开始，我们把 A 看作某个 Banach 空间 $\mathbf{E}$ 中的无界算子；通常，$\mathbf{E}=L^2(\Omega)$. 我们希望通过指数函数 e^{-tA} 用数据 $\mathbf{f}$, $\mathbf{u}_0$ 表示初始值问题(45.1)—(45.2)的解 $\mathbf{u}$. 函数 e^{-tA} 没有恰当的定义，在顺利的情形中，它的作用被一与 A 相联的连续半群 $\{\mathscr{T}_t\}$ 所代替. 如果 A 是有界的，$\mathscr{T}_t$ 应该等于 e^{-tA}. 注意，在这样的情形，通过公式

$$A=\lim_{t\to+0}\frac{1}{t}\,(I-e^{-tA}),$$

从 $\mathscr{T}_t$ 可以复原 A，其中的极限是在算子范数意义下取的. 当 A 是无界的时候，有一类似的公式，但是其中的极限必须在 $\mathbf{E}$ 中算

† 为了一致起见，在本书剩余部分中我们将使一个半群 $\mathscr{T}_t$ 与"逆指数算子"e^{-tA} 发生关系，今后大多数情形中，A 表示一个强椭圆微分算子，因而定义了一个正线性算子. 与此一致，无穷小生成元(参阅定义 45.2)将是 $-A$，而不是 A.

子的点态收敛意义下取：

定义 45.2 用 $\mathscr{D}(A)$ 表示 $\mathbf{E}$ 的一线性子空间，它由具有下述性质的那些向量 $\mathbf{e}\in\mathbf{E}$ 组成：当 $h>0$ 趋于零时，$h^{-1}(\mathbf{e}-\mathscr{T}_h\mathbf{e})$ 在 $\mathbf{E}$ 中收敛．对于每个 $\mathbf{e}\in\mathscr{D}(A)$，令

$$A\mathbf{e}=\lim_{h\to+0}\frac{1}{h}(\mathbf{e}-\mathscr{T}_h\mathbf{e}).$$

线性算子 $-A$: $\mathscr{D}(A)\to\mathbf{E}$ 称为半群 $\{\mathscr{T}_h\}$ 的无穷小生成元．

先验地，$\mathscr{D}(A)$ 可设想像为如此小，甚至只由 $\mathbf{E}$ 的原点组成．事实上，我们即将看到，$\mathscr{D}(A)$ 在 $\mathbf{E}$ 中稠．注意，每个 $\mathscr{T}_t$ 与 A 可交换，因为 $\mathscr{T}_t$ 与 $h^{-1}(I-\mathscr{T}_h)$ $(h>0)$ 可交换；因而 $\mathscr{T}_t\mathscr{D}(A)\subset\mathscr{D}(A)$．

我们将推导无穷小生成元 $-A$ 的若干性质[就中有 $\mathscr{D}(A)$ 是稠的这一事实]，这些性质使我们能够刻划生成连续半群的（定义在 $\mathbf{E}$ 的稠线性子空间上的）所有线性算子．这有助于了解 A 是有界的，即 $\mathscr{T}_t$ 确为指数函数 e^{-tA} 的情形．注意，在这情形中我们有

$$\frac{d}{dt}\mathscr{T}_t+A\mathscr{T}_t=0,\quad t>0, \tag{45.9}$$

$$\mathscr{T}_0=I. \tag{45.10}$$

因为 $e^{-\|A\|t}\mathscr{T}_t$ 在 $\mathbf{R}_+$ 上是有界的，我们可以构作 $\mathscr{T}_t$ 的 Laplace 变换．更恰当地，我们引进算子值函数 $H(t)\mathscr{T}_t$ 的 Laplace 变换 $R(p)$．由 (45.9) 和 (45.10)，我们有

$$\left(\frac{d}{dt}+A\right)\{H(t)\mathscr{T}_t\}=I\delta, \tag{45.11}$$

其中 δ 是 Dirac 广义函数．施行 Laplace 变换，导致

$$(p+A)R(p)=I, \tag{45.12}$$

因为 $R(p)$ 显然与 A 可交换，我们就看到

$$R(p)=(pI+A)^{-1};$$

$R(p)$ 是 $-A$ 的预解式[我们知道，当 $|p|>\|A\|$ 时，$R(p)$ 存在，并是 $\mathbf{E}$ 上的有界线性算子]．

当 A 不是有界的时候，虽然我们不能直接定义 e^{-tA}，但是能够定义 $H(t)\mathscr{T}_t$ 的 Laplace 变换 $R(p)$（在进一步声明前，我们假设 $-A$ 是半群 $\mathscr{T}_t$ 的无穷小生成元）．这归因于下述引理．

引理 45.1 令$\{\mathscr{T}_t\}$是$\mathbf{E}$上的一连续半群. 则存在常数$M, B>0$,使得对所有$t\geqslant 0$,有$\|\mathscr{T}_t\|\leqslant Me^{Bt}$.

如通常一样,我们已用$\|\ \|$表示算子范数.

证明 令a是任一严格正数. 并令$\mathscr{B}_a$表示闭区间$[0, a]$在映射$t\mapsto\mathscr{T}_t$下的像. 由(45.8), 关于$L(\mathbf{E};\mathbf{E})$上的点态收敛拓扑, $\mathscr{B}_a$是紧的, 因而[TVS, D&K, 定理 33.1], 关于算子范数, 它是有界的. 令$M_a=\sup_{0<t<a}\|\mathscr{T}_t\|$(注意, $M_a\geqslant 1$). 给定一任意正数t, 令m是使得$ma\leqslant t$的最大整数. 由(45.6),我们有

$$\|\mathscr{T}_t\|=\|\mathscr{T}_{t-ma}\mathscr{T}_{ma}\|=\|\mathscr{T}_{t-ma}\mathscr{T}_a^m\|\leqslant M_a^{m+1}\leqslant M_a e^{Bma}\leqslant M_a e^{Bt},$$

其中$B=(1/a)\log M_a$. 证毕.

现在,对于$\mathrm{Re}\, p>B$(引理 45.1 中的常数),我们可以定义

$$R(p)=\int_0^{+\infty}e^{-pt}\mathscr{T}_t\,dt.$$

我们知道, $R(p)$是半平面$\mathrm{Re}\, p>B$中p的全纯函数, 取值于$L(\mathbf{E};\mathbf{E})$中. 因为每个$\mathscr{T}_t$与A可交换, 因而$R(p)$亦然. 事实上,我们有

命题 45.1 如果$\mathrm{Re}\, p>B$(参阅引理 45.1), 则$R(p)$的值域包含于$\mathscr{D}(A)$中,并且有

$$(45.13)\qquad (pI+A)R(p)=R(p)(pI+A)=I.$$

证明 令$\mathbf{e}\in\mathbf{E}$, $h>0$是任意的. 我们有

$$h^{-1}(\mathscr{T}_h-I)R(p)\mathbf{e}=h^{-1}\int_0^{+\infty}e^{-pt}(\mathscr{T}_{t+h}-\mathscr{T}_t)\mathbf{e}\,dt$$

$$=\frac{1}{h}\ (e^{ph}-1)\int_h^{+\infty}e^{-pt}\mathscr{T}_t\mathbf{e}\,dt-\frac{1}{h}\int_0^h e^{-pt}\mathscr{T}_t\mathbf{e}\,dt.$$

当$h\to+0$时,第一项收敛于$pR(p)\mathbf{e}$,第二项收敛于$-\mathscr{T}_0\mathbf{e}=-\mathbf{e}$.

证毕.

命题 45.2 假设在一扇形$|\mathrm{Im}\, p|<C\,\mathrm{Re}\, p\,(C>0)$中复变量$p$趋于$\infty$. 那么,对于每个$\mathbf{e}\in\mathbf{E}$, $pR(p)\mathbf{e}$在$\mathbf{E}$中收敛于$\mathbf{e}$.

证明 我们有(记$p=\sigma+i\tau$,其中σ, τ是实的)

$$pR(p)\mathbf{e}-\mathbf{e}=p\int_0^{+\infty}e^{-pt}(\mathscr{T}_t\mathbf{e}-\mathbf{e})\,dt$$

$$=\frac{p}{\sigma}\int_0^{+\infty}e^{-(p/\sigma)t}(\mathscr{T}_{t/\sigma}\mathbf{e}-\mathbf{e})\,dt,$$

由此，当 $\sigma\to+\infty$ 时，由于引理 45.1 以及 Lebesgue 控制收敛定理，有

$$\|pR(p)\mathbf{e}-\mathbf{e}\|_{\mathbf{E}}\leqslant(1+C)\int_0^{+\infty}e^{-t}\|\mathscr{T}_{t/\sigma}\mathbf{e}-\mathbf{e}\|_{\mathbf{E}}\,dt\to 0.$$

证毕.

推论 45.1　$\mathscr{D}(A)$ 在 $\mathbf{E}$ 中稠.

证明　组合命题 45.1 和 45.2 即得.

这样，我们已经证明了：A 有稠的定义域，且当 $\mathrm{Re}\,p>B$ 时，$R(p)=R(p;\ -A)=(pI+A)^{-1}$.

对方程 $(pI+A)R(p)=I$ 施行 Laplace 逆变换，我们就看到，$\mathscr{T}_t$ 在广义函数意义下满足方程(45.9)．实际上，不难证明，如果 $\mathbf{e}\in\mathscr{D}(A)$，那么 $\mathscr{T}_t\mathbf{e}$ 在每点 $t>0$ 处可微，因而在古典的意义下，当 $t>0$ 时有 $(d/dt)(\mathscr{T}_t\mathbf{e})=-A\mathscr{T}_t\mathbf{e}$.

现在我们能够刻划连续半群的所有最小生成元了：

定理 45.1(Hille-Yosida)　令 A 是具有定义域 $\mathscr{D}(A)$ 的一个线性算子，$\mathscr{D}(A)$ 在 Banach 空间 $\mathbf{E}$ 中稠．假设有某个 $\lambda_0>0$，使得对所有整数值 $\lambda>\lambda_0$，$-A$ 的预解式 $R(\lambda;\ -A)=(\lambda I+A)^{-1}$ 存在，且为 $\mathbf{E}$ 上的有界线性算子．那么，下述两条件等价：

(a)　$-A$ 是一连续半群 $\{\mathscr{T}_t\}$ 的无穷小生成元；

(b)　存在常数 M，$B\geqslant 0$，使得对所有 $k=1, 2, \cdots$，以及所有整数 $m>\sup(\lambda_0, B)$，有

$$\left\|\left(I+\frac{1}{m}A\right)^{-k}\right\|\leqslant M\left(1-\frac{B}{m}\right)^{-k}. \tag{45.14}$$

证明　(1)　(a)⇒(b)．如果(a)成立，则对于 $\mathrm{Re}\,\lambda>B$，有 $R(\lambda;\ -A)=R(\lambda)=\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}\mathscr{T}_t\,dt$，这里 B 是引理 45.1 中的常数．可以在积分号下对 λ 微商 $R(\lambda)$，得

$$R^{(k)}(\lambda)=\int_0^{+\infty}(-t)^k e^{-\lambda t}\mathscr{T}_t\,dt.$$

另一方面，因为 $R(\lambda)=(\lambda I+A)^{-1}$，容易验证

$$R^{(k)}(\lambda)=(-1)^k k!\,R(\lambda)^{k+1},$$

因而，由引理 45.1，得

$$\|R(\lambda)^{k+1}\|\leqslant M\int_0^{+\infty}\frac{t^k}{k!}e^{-(\mathrm{Re}\lambda-B)t}dt=M(\mathrm{Re}\lambda-B)^{-k-1},$$

由此，再注意到 $pR(p)=(I+p^{-1}A)^{-1}$，即得(45.14)．

(2) (b)⇒(a)．令 $J_m=(I+(1/m)A)^{-1}$，m 是一大于 λ_0 的整数．由(45.14)，$J_m(m>\sup(\lambda_0,B))$形成 $\mathbf{E}$ 上线性算子的一个有界集合．如果 $\mathbf{e}\in\mathscr{D}(A)$，则 $\mathbf{e}-J_m\mathbf{e}=m^{-1}AJ_m\mathbf{e}=m^{-1}J_mA\mathbf{e}$，因而当 $m\to+\infty$ 时，$\|J_m\mathbf{e}-\mathbf{e}\|_{\mathbf{E}}\leqslant(C/m)\|A\mathbf{e}\|_{\mathbf{E}}\to0$．因为 $\mathscr{D}(A)$ 在 $\mathbf{E}$ 中稠，这就意味着，对每个 $\mathbf{e}\in\mathbf{E}$，当 $m\to+\infty$ 时 $J_m\mathbf{e}\to\mathbf{e}$．

现在考虑

$$\begin{aligned}{}^m\mathscr{T}_t&=\exp(-tAJ_m)=\exp(mt(J_m-I))\\&=e^{-mt}\exp(mtJ_m),\quad t\geqslant0.\end{aligned}$$

再由(45.14)，我们得到

$$\|\exp(mtJ_m)\|\leqslant\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(mt)^k}{k!}\|J_m^k\|\leqslant M\exp\left\{m\left(1-\frac{B}{m}\right)^{-1}t\right\}.$$

注意，$m(1-B/m)^{-1}-m=(m/(m-B))B$．我们得到

(45.15)

$$\|{}^m\mathscr{T}_t\|\leqslant M\exp\left\{\left(1-\frac{B}{m}\right)^{-1}Bt\right\},\quad\forall m>\sup(\lambda_0,B),\ \forall t\geqslant0.$$

显然，所有的算子 J_m，${}^n\mathscr{T}_t$ 与 A 可交换，并且它们本身之间也可交换．再者，

$$\begin{aligned}{}^m\mathscr{T}_t-{}^n\mathscr{T}_t&=\{\exp[-tA(J_m-J_n)]-I\}\exp(-tAJ_n)\\&=-\exp(-tAJ_n)\int_0^t A(J_m-J_n)\\&\quad\cdot\exp[-sA(J_m-J_n)]\,ds\\&=-\int_0^t {}^m\mathscr{T}_s\,{}^n\mathscr{T}_{t-s}(J_m-J_n)A\,ds.\end{aligned}$$

再令 $\mathbf{e}$ 是 $\mathscr{D}(A)$ 的任一元素．由(45.15)，当 $m,n>2B$ 时，我们有

$$\|{}^m\mathscr{T}_t\mathbf{e}-{}^n\mathscr{T}_t\mathbf{e}\|_{\mathbf{E}}\leqslant M^2\|(J_m-J_n)A\mathbf{e}\|_{\mathbf{E}}\int_0^t e^{2Bs}\,ds.$$

我们曾看到 $J_mA\mathbf{e}$ 收敛于 $A\mathbf{e}$. 由此推知, ${}^m\mathscr{T}_t\mathbf{e}$ 在 $\mathbf{E}$ 中形成一 Cauchy 序列, 收敛于某个极限, 记为 $\mathscr{T}_t\mathbf{e}$. 在任一有界区间 $[0,T]$ $(T<+\infty)$ 中, 此收敛性关于 t 是一致的. 再由(45.15)看到, 当 $0\leqslant t\leqslant T$ 时, ${}^m\mathscr{T}_t$ 形成线性算子的一个有界集合, 因而(由[TVS, D&K, 命题 32.5])推得, 对于任何 $\mathbf{e}\in\mathbf{E}$, ${}^m\mathscr{T}_t\mathbf{e}$ 在有界区间上关于 t 一致地收敛于 $\mathscr{T}_t\mathbf{e}$. 由此即得, 任给 $\mathbf{e}\in\mathbf{E}$, $t\mapsto\mathscr{T}_t\mathbf{e}$ 在 $\mathbf{R}_+$ 中是 t 的连续函数; 以及, $\mathscr{T}_s\mathscr{T}_t=\mathscr{T}_{s+t}$ 和 $\mathscr{T}_0=I$, 因为对于 ${}^m\mathscr{T}_t$, 这些性质是对的. 顺便注意, 由于(45.15), 我们有

$$(45.16)\qquad \|\mathscr{T}_t\|\leqslant Me^{Bt}\quad 对于所有\ t\geqslant 0.$$

剩下要证明的是, $-A$ 是半群 $\{\mathscr{T}_t\}$ 的无穷小生成元. 令 $-A'$ 是 $\{\mathscr{T}_t\}$ 的无穷小生成元. 由于(45.16), 当 $\mathrm{Re}\,\lambda$ 充分大时, 预解式 $R(\lambda;-A')$ 等于

$$\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}\mathscr{T}_t\,dt=\lim_{m\to+\infty}\int_0^{+\infty}\exp(-\lambda t)\exp(-tAJ_m)\,dt$$
$$=\lim_{m\to+\infty}(\lambda I+AJ_m)^{-1}=R(\lambda;-A),$$

其中的极限是在 $\mathbf{E}$ 中点态收敛性的意义下取的. 换句话说, 当 $\mathrm{Re}\,\lambda$ 足够大时, $\lambda I+A$ 和 $\lambda I+A'$——它们分别是从 $\mathscr{D}(A)$ 和 $\mathscr{D}(A')$ 到 $\mathbf{E}$ 上的双满映射——有相同的逆, 因而它们是相等的, 而这只有当 $A=A'$ 时才有可能.

这就完成了定理 45.1 的证明.

我们已经看到, $\mathbf{E}$ 上的每个连续半群 $\{\mathscr{T}_t\}$ 有一无穷小生成元 $-A$, 它具有稠的定义域 $\mathscr{D}(A)$, 当 $\mathrm{Re}\,\lambda$ 大于某个常数 $B\geqslant 0$ 时, 它的预解式 $R(\lambda;-A)$ 存在, 并是一连续线性算子, 再者, 它有定理 45.1 中的性质(b). 反之, 任一这样的算子 $-A$, 对应一个连续半群 $\{\mathscr{T}_t\}$, $\{\mathscr{T}_t\}$ 的无穷小生成元是 $-A$. 事实上, 半群 $\{\mathscr{T}_t\}$ 是唯一的. 这可以用几种方法加以证明. 一种方法是, 因为 Laplace 变换是内射的[在属于 $\mathscr{D}'_+(L(\mathbf{E};\mathbf{E}))$ 的可 Laplace 变换的广义函数集合上], 因而预解式就确定了 $\mathscr{T}_t$(由 Laplace 逆变换).

事实上，定理 45.1 中蕴涵性(b)⇒(a)的证明已经导致了由无穷小生成元 $-A$ 产生的半群 $\mathscr{T}_t$ 的一个表示公式，即 $\mathscr{T}_t$ 作为 ${}^m\mathscr{T}_t$ 的点态极限的表达式：

$$(45.17)\qquad \mathscr{T}_t=\lim_{m\to+\infty}\exp\left\{-t\left(I+\frac{1}{m}A\right)^{-1}A\right\}.$$

(点态意味着，任给 $\mathbf{e}\in\mathbf{E}$，$\mathscr{T}_t\mathbf{e}$ 是向量序列 ${}^m\mathscr{T}_t\mathbf{e}$ 在 $\mathbf{E}$ 中的极限；记住此收敛性在每个有限区间 $0\leqslant t\leqslant T<+\infty$ 上关于 t 是一致的.)

与定理 45.1 有关的另一注记是，一个连续半群 $\{\mathscr{T}_t\}$ 的无穷小生成元 $-A$ 是一闭算子. 这意味着，A: $\mathscr{D}(A)\to\mathbf{E}$ 的图象，它是 $\mathbf{E}\times\mathbf{E}$ 的一子集，在 $\mathbf{E}\times\mathbf{E}$ 中是闭的，或者，等价地，如果 $\mathscr{D}(A)$ 中的一序列 $\mathbf{e}_j$ 在 $\mathbf{E}$ 中收敛于一元素 $\mathbf{e}$，并且如果 $A\mathbf{e}_j$ 在 $\mathbf{E}$ 中收敛于一元素 $\mathbf{f}$，那么我们必定有 $\mathbf{e}\in\mathscr{D}(A)$，并且 $A\mathbf{e}=\mathbf{f}$. 事实上，对于足够大的 m，$(I+(1/m)A)^{-1}$ 是一连续线性算子. 如果把它作用于 $\mathbf{e}_j+(1/m)A\mathbf{e}_j$——它收敛于 $\mathbf{e}+(1/m)\mathbf{f}=\mathbf{g}$——我们就看到，$\mathbf{e}_j$ 必须收敛于 $(I+(1/m)A)^{-1}\mathbf{g}$，而 $\mathbf{e}_j$ 也收敛于 $\mathbf{e}$，这意味着，$\mathbf{e}$ 属于 $(I+(1/m)A)^{-1}$ 的值域，因而，由命题 45.1，$\mathbf{e}$ 属于 $\mathscr{D}(A)$，并且有

$$\mathbf{g}=\mathbf{e}+\frac{1}{m}\mathbf{f}=\left(I+\frac{1}{m}A\right)\mathbf{e}.$$

这就蕴涵着 $\mathbf{f}=A\mathbf{e}$.

对于抛物型混合问题的应用

现在我们来简单地指出，如何把连续半群理论应用于解某些抛物型混合问题. 为了简化说明，对所研究的问题我们将作某些限制. 我们将与 $\mathbf{R}^n$ 的有界开子集 Ω 打交道. 考虑§44 中那种类型的 Ω 中二阶线性偏微分算子：

$$A=A\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)=-\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^k}a^{jk}(x)\frac{\partial}{\partial x^j}$$
$$+\sum_{j=1}^{n}b^j(x)\frac{\partial}{\partial x^j}+c(x)$$

(虽然在现在的情形，A 写为变分形式这一事实不是重要的：我们的假设将是这样的，在上面的二重和中可以交换 $\partial/\partial x^k$ 和 $a^{jk}(x)$)。假设 A 满足一致强椭圆性假设(44.2)：

(45.18)

$$\mathrm{Re}\sum_{j,k=1}^{n} a^{jk}(x)\zeta_j\bar{\zeta}_k \geqslant c|\zeta|^2,\quad \text{对于所有的 } x\in\Omega,\ \zeta\in\mathbf{C}^n.$$

除了这些假设之外，为了保证性质

(45.19)　　$\forall u\in H_0^1(\Omega),\ Au\in L^2(\Omega)\Rightarrow u\in H^2(\Omega)$

成立，对 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 的正规性和系数 $a^{jk}(x)$, $b^j(x)$, $c(x)$，我们将作必要的假设. 当 $-A$ 是 Laplace 算子时，§27 中提供了使(45.19)成立的充分条件(参阅定理 27.2)，并且，正如在那里指出的，同样的结果被推广到更一般的微分算子. 我们知道 [参阅(44.3)及其下的注]，存在一个实数 λ_0，使得当 $\lambda>\lambda_0$ 时，$\lambda+A$是一个从 $H_0^1(\Omega)$ 到 $H^{-1}(\Omega)$上的同构，将此与 (45.19) 组合起来，蕴涵着

(45.20)　　当 $\lambda>\lambda_0$ 时，$\lambda+A$ 是一个从 $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ 到 $L^2(\Omega)$上的同构(在一显然的意义下).

用$(\lambda+A)^{-1}$ 表示其逆映射，将其看作从 $L^2(\Omega)$ 到其自身中的一个有界线性算子. 其值域将是 $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$，我们把它看作 A 的定义域 $\mathscr{D}(A)$. 仍对于 $\lambda>\lambda_0$，考虑一个任意的函数 $u\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ 以及

$$\|(\lambda+A)u\|_0^2=(\lambda-\lambda_0)^2\|u\|_0^2+2(\lambda-\lambda_0)\mathrm{Re}(u,\ (\lambda_0+A)u)_0 + \|(\lambda_0+A)u\|_0^2,$$

其中，$(\ ,\ )_0$ 和 $\|\ \|_0$ 表示 $L^2(\Omega)$ 中的内积和范数. 再用(44.3)得到

(45.21)　　$(\lambda-\lambda_0)^2\|u\|_0^2+\|(\lambda_0+A)u\|_0^2\leqslant\|(\lambda+A)u\|_0^2.$

由(45.20)，可以用$(\lambda+A)^{-1}f$ 代替 u，其中 f 是 $L^2(\Omega)$ 中任一元素. 从(45.21)推得：

(45.22)
$$(\lambda-\lambda_0)\|(\lambda+A)^{-1}f\|_0\leqslant\|f\|_0,\quad \lambda>\lambda_0,\ f\in L^2(\Omega).$$

通过迭代，我们得到

(45.23)
$$\left\|\left(I+\frac{1}{\lambda}A\right)^{-m}f\right\|_0 \leqslant (1-\lambda_0/\lambda)^{-m}\|f\|_0, \quad m=0, 1, \cdots,$$
对所有 $\lambda>\lambda_0$ 和所有 $f\in L^2(\Omega)$.

如果应用定理 45.1, 就得到下述结论: $-A$ 是 $L^2(\Omega)$上一连续半群$\{\mathscr{T}_t\}$的无穷小生成元. 这意味着现在我们能用下述公式解混合问题

(45.24) $$u_t+Au=f, \quad u|_{t=0}=u_0,$$

其中 f 和 u_0 取值于 $L^2(\Omega)$ 中, 此公式是

(45.25) $$u(t)=\mathscr{T}_t u_0+\int_0^t \mathscr{T}_{t-s}f(s)ds.$$

自然, 我们必须说明 f 关于 t 的正规性假设. 这些假设可能依赖于具体情形. 但是注意, 如果没有其它附加的信息, 则(45.25)右端的第一项只是一个取值于 $L^2(\Omega)$ 中的连续函数——虽然对于每个固定的 t, $\mathscr{T}_t u_0$ 属于 A 的定义域, 即属于 $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$. 这样, 如果关于 t(譬如说在[0, T]上)f 是可积的, 则(45.25)右端的第二项将是绝对连续的, 换句话说, (一般地)第二项的性质要比第一项好些, 因而, 解 u 将是连续的.

习　　题

(在下面这些习题中, $\mathbf{E}$ 总表示一复 Banach 空间, 其中范数用 $\|\ \|_{\mathbf{E}}$ 表示; 算子范数将用 $\|\ \|$ 表示.)

45.1　令$\{\mathscr{T}_\tau\}$是 $\mathbf{E}$ 上关于算子范数连续的算子半群[这意味着(45.6)—(45.7)成立, 以及, $t\mapsto\mathscr{T}_t$ 是一个从[0, $+\infty$[到 Banach 空间 $L(\mathbf{E};\mathbf{E})$中的连续映射]. 令 $R(p)$是 $H(t)\mathscr{T}_t$ 的 Laplace 变换, 即, $R(p)=(pI+A)^{-1}$, 其中 $-A$ 是半群的无穷小生成元. 证明, 当 p 是足够大的正实数时, $R(p)$是一个从 $\mathbf{E}$ 到其自身上的可逆映射. 由此推导, A 是有界的, 并且, $\mathscr{T}_t=e^{-tA}$.

45.2　令$\{U_t\}$是 $\mathbf{E}$(假设是一 Hilbert 空间)上酉算子的一个连续半群(定义 45.1). 证明, 当 $t<0$ 时, 可以用唯一的方式定义 U_t, 使得$\{U_t\}_{t\in\mathbf{R}}$变为 $\mathbf{E}$ 上酉算子的一个连续群. 由此推导, 半群$\{U_t\}_{t\geq0}$的无穷小生成元是 $\mathbf{E}$ 中的一个稠定的反自伴算子.

45.3　你能给出一个其无穷小生成元既非有界(习题 45.1)又非反自伴

的(习题 45.2),一 Hilbert 空间 $\mathbf{E}$ 上算子的连续群 $\{\mathscr{T}_t\}$ 的例子吗?

45.4 令 $\mathbf{H}$ 是一 Hilbert 空间, A 是 $\mathbf{H}$ 中的一个稠定的自伴算子. 假设 A 是正的并有一有界的逆;考虑抽象 Cauchy 问题:

$$(45.26)\quad \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2}+A\mathbf{u}=0,\ t\in\mathbf{R},\quad \mathbf{u}|_{t=0}=\mathbf{u}_0\in\mathbf{H},\quad \mathbf{u}_t|_{t=0}=\mathbf{u}_1\in\mathbf{H}.$$

证明,存在 $\mathbf{H}\times\mathbf{H}$ 中的一个连续酉群 U_t, 使得(45.26)的解 $\mathbf{u}$, 通过公式

$$(45.27)\qquad \begin{pmatrix}\mathbf{u}(t)\\ \dfrac{d\mathbf{u}}{dt}(t)\end{pmatrix}=U_t\begin{pmatrix}\mathbf{u}_0\\ \mathbf{u}_1\end{pmatrix},\ t\in\mathbf{R},$$

可与 Cauchy 数据 $\mathbf{u}_0$, $\mathbf{u}_1$ 联系起来, 并且, 这个关系式导致下述公式(要求读者给它以精确的意义):

$$(45.28)\qquad \mathbf{u}(t)=\cos(A^{1/2}t)\mathbf{u}_0+A^{-1/2}\sin(A^{1/2}t)\mathbf{u}_1.$$

将此与(13.10)及习题 44.5 加以比较.

45.5 令 $\{\mathscr{T}_t\}$ 是 $\mathbf{E}$ 上的一个连续半群;假设存在常数 $C>0$,使得下述事实成立:

(45.29) 对任意 $\mathbf{e}\in\mathbf{E}$, $t(\geqslant 0)$ 的函数 $\mathscr{T}_t\mathbf{e}$ 可延拓为复平面的扇形 $|\mathrm{Im}\,t|\leqslant C\,\mathrm{Re}\,t$ 中的一连续函数, 它在此扇形内部是全纯的(并取值于 $\mathbf{E}$ 中).

证明,存在常数 M, B, 使得

$$(45.30)\qquad \|\mathscr{T}_z\|\leqslant Me^{B(\mathrm{Re}\,z)},\ \forall z\in\mathbf{C},\ |\mathrm{Im}\,z|\leqslant C\mathrm{Re}\,z.$$

由此推导, $\mathscr{T}_t$ 的无穷小生成元的预解式 $R(\lambda)$ 在区域

$$(45.31)\qquad \lambda\in\mathbf{C},\ \mathrm{Re}\,\lambda+C|\mathrm{Im}\,\lambda|>B$$

中是一全纯函数,取值于 Banach 空间 $L(\mathbf{E};\ \mathbf{E})$ 中.

45.6 用习题 45.5 中的记号. 证明在习题 45.5 中叙述的结果之逆, 即如果在区域(45.31)中, 无穷小生成元的预解式 $R(\lambda)$ 存在, 并是 λ 的全纯函数,取值于 $L(\mathbf{E};\mathbf{E})$ 中,那么,对于某个可能是比较小的常数 $C>0$,(45.29)成立.

45.7 令 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的一有界开子集, 其边界是一光滑超曲面, Ω 位于其边界的一侧. 令 $P(x, D)$ 是 Ω 中的一强椭圆微分算子, 其所有系数都属于 $C^\infty(\overline{\Omega})$. 证明, $P(x, D)$ 定义 $L^2(\Omega)$ 中的一个无界线性算子 A, 其定义域为 $H^{2m}(\Omega)\cap H_0^m(\Omega)$, 并在(45.31)型的一区域中, $-A$ 的预解式 $R(\lambda)$ 是一全纯函数,取值于 $L(L^2(\Omega);\ L^2(\Omega))$ 中. [关于算子 $P(x, D)$,容许读者假设类似于定理 27.2 的结果成立.]

45.8 令 A 是某 Hilbert 空间 $\mathbf{H}$ 中的一个稠定自伴算子; 假设 A 是正的,实际上, 对某个 $c_0>0$, $A\geqslant c_0I$. 证明, 由 $-A$ 所生成的连续半群 $\{\mathscr{T}_t\}$ 满

足不等式

(45.32) $$\|\mathscr{T}_t\| \leqslant \text{常数}\cdot\exp(-c_0 t), \quad \forall t\geqslant 0.$$

证明，A 的逆 A^{-1}，它是 $\mathbf{E}$ 上的一个有界线性算子，满足

$$A^{-1}=\int_0^{+\infty}\mathscr{T}_t\,dt.$$

45.9 令 $\mathbf{H}$ 和 A 如习题 45.8 中所述．令 $\mathbf{u}_0$ 是 $\mathbf{H}$ 的一个元素，$\mathbf{f}(t)$是一个从 $[0, +\infty[$ 到 $\mathbf{H}$ 中的连续映射，当 $t\to+\infty$ 时它在 $\mathbf{H}$ 中收敛于 $\mathbf{f}_\infty$. 证明，当 $t\to+\infty$ 时，问题

(45.33) $$\frac{d\mathbf{u}}{dt}+A\mathbf{u}=\mathbf{f}, \ \forall t>0; \quad \mathbf{u}(0)=\mathbf{u}_0$$

的解 $\mathbf{u}(t)$收敛于方程

(45.34) $$A\mathbf{u}_\infty=\mathbf{f}_\infty$$

的解 $\mathbf{u}_\infty$.

45.10 令 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的一有界开子集，它的边界 Γ 是一 C^∞ 超曲面，Ω 在 Γ 的一侧．令 g 是 Γ 上的一复值函数，属于 $H^{3/2}(\Gamma)$，并令 $u(x, t)$是混合问题

(45.35) $$\frac{\partial u}{\partial t}=\Delta_x u \quad \text{在 } \Omega \text{ 中，对于 } t>0;$$

(45.36) $$u|_{t=0}=u_0(x)\in L^2(\Omega),$$

(45.37) $$u=g \quad \text{在 } \Gamma \text{ 上}$$

的解．应用习题 45.9 中的结论来证明，当 $t\to+\infty$ 时，$u(x, t)$收敛于 Dirichlet 问题

(45.38) $$\Delta u_\infty=0 \quad \text{在 } \Omega \text{ 中}, \quad u_\infty=g \quad \text{在 } \Gamma \text{ 上}$$

的解 $u_\infty(x)$．能否把 u, u_0 和 g 解释为温度，从物理学的考虑来预言这一结论？

46．特征函数展开式对于抛物型和双曲型混合问题的应用

如在§§ 44 和 45 中一样，我们继续考虑微分算子 $A=A(x, \partial/\partial x)$，它的系数是开集 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 中的 L^∞ 函数，与时间变量 t 无关：

$$A=-\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^j}\ a^{jk}(x)\frac{\partial}{\partial x^k}+\sum_{j=1}^{n}b^j(x)\frac{\partial}{\partial x^j}+c(x).$$

但在这一节中，我们将利用§ 34 中所述的特征值展开式．在整个

这一节中，我们采用 § 34 中的概念和记号．特别，假设算子A为形式自伴的和强椭圆的[参阅(34.3)到(34.6)]．我们还将作假设(34.9)，即开集Ω是有界的．

我们回想一下，可以找到一数$\varkappa$，使得$\varkappa+A$，看作一个连续线性算子$H_0^1(\Omega)\to H^{-1}(\Omega)$ [它是$H_0^1(\Omega)$的对偶空间]，成为正定的，而事实上是一个同构[只需取$\varkappa>\lambda_0$；参阅(34.7)]．当从右面与从$H_0^1(\Omega)$到$H^{-1}(\Omega)$中的自然内射复合时，$\varkappa+A$的逆$G(\varkappa)$变为空间$H_0^1(\Omega)$上的一个紧算子(命题 34.1——译者)；当从左面复合时，$G(\varkappa)$变为空间$H^{-1}(\Omega)$上的一个紧算子．总之，它的谱是离散的，并且由一个收敛于零的严格正数序列组成．我们改而考察A的特征值λ，这些特征值与$G(\varkappa)$的特征值χ由关系式：

$$(46.1)\qquad \lambda=\chi^{-1}-\varkappa,\quad \chi \text{ 属于 } G(\varkappa) \text{ 的谱}$$

相联系．A的特征值形成一个收敛于$+\infty$的实数序列(34.11)．这样，除了可能有有限多个之外，它们都是严格正的．

现在我们将利用在(34.19)中定义的A的特征函数$E_j(j=1, 2, \cdots)$．命题 34.2 给我们提供了一个解混合问题

$$(46.2)\qquad \frac{\partial u}{\partial t}+Au=f \quad \text{在 } \Omega\times]0, T[\text{ 中,}$$

$$(46.3)\qquad u(\cdot, 0)=u_0$$

的新方法，这里我们要寻求一个取值于$H_0^1(\Omega)$中的解u(即假设零边值；我们回忆一下，通过未知函数变换，总能变成这一情形)．我们将取

$$(46.4)\qquad f\in L^2(0, T;\ H^{-1}(\Omega)),\quad u_0\in L^2(\Omega),$$

并求

(46.5)

$$u\in L^2(0, T;\ H_0^1(\Omega)),\quad \text{使得 } u_t\in L^2(0, T;\ H^{-1}(\Omega)).$$

应用命题 34.2，并记

$$(46.6)\qquad f(x, t)=\sum_{j=1}^{+\infty} f_j(t)E_j,\quad u_0=\sum_{j=1}^{+\infty} u_{0j}E_j,$$

$$(46.7)\qquad u(x, t)=\sum_{j=1}^{+\infty} u_j(t)E_j.$$

为了简单起见，在这一节的余下部分中我们假设所有关于 j 的求和都是从1到 $+\infty$，不再每次重复. 因为 $AE_j=\lambda_j E_j$，方程(46.2)—(46.3)就变为常微分方程初始值问题序列：

$$u_j'+\lambda_j u_j=f_j,\quad 0<t<T, \tag{46.8$_j$}$$

$$u_j(0)=u_{0j}, \tag{46.9$_j$}$$

它的唯一解由下式给出：

$$u_j(t)=u_{0j}\exp(-\lambda_j t)+\int_0^t \exp[-\lambda_j(t-s)]f_j(s)\,ds. \tag{46.10}$$

用 $v_j(t)$ 表示上式右端的积分，并令

$$v(x,\ t)=\sum v_j(t)E_j(x). \tag{46.11}$$

我们知道，

$$\sum |u_{0j}|^2=\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}<+\infty. \tag{46.12}$$

另一方面，由于命题 34.2，有

$$\begin{aligned}\int_0^T \|u(\cdot,\ t)-v(\cdot,\ t)\|^2_{H^1(\Omega)}\,dt &=\sum(\varkappa+\lambda_j)\,|u_{0j}|^2\int_0^T\exp(-2\lambda_j t)\,dt\\ &=\sum\frac{\varkappa+\lambda_j}{2\lambda_j}(1-\exp(-2\lambda_j T))\,|u_{0j}|^2\\ &\leqslant C\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)},\end{aligned} \tag{46.13}$$

其中，常数 C 依赖于 T 和微分算子 A. 请读者回忆一下 $H_0^1(\Omega)$ 的 Hilbert 空间结构，以及，通过对偶性，由 $H_0^1(\Omega)$ 上的内积

$$((u,\ v))=a(u,\ v)+\varkappa(u,\ v)_{L^2(\Omega)} \tag{46.14}$$

所定义的 $H^{-1}(\Omega)$ 的 Hilbert 空间结构，其中，$a(u,\ v)$ 是与 A 相连带的拟双线性形式[参阅(34.16)].

关于卷积的标准 Hölder 不等式导致

$$\begin{aligned}\int_0^T\|v(\cdot,\ t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\,dt &=\sum(\varkappa+\lambda_j)\int_0^T\left\{\int_0^t\exp[-\lambda_j(t-s)]f_j(s)\,ds\right\}^2dt\\ &\leqslant\sum(\varkappa+\lambda_j)\left\{\int_0^T\exp(-\lambda_j t)\,dt\right\}^2\int_0^T|f_j(t)|^2\,dt\end{aligned}$$

$$=\sum\left\{\frac{\varkappa+\lambda_j}{\lambda_j}(1-\exp(-\lambda_j T))\right\}^2(\varkappa+\lambda_j)^{-1}\int_0^T|f_j(t)|^2dt,$$

因而，再一次应用命题 34.2，我们有

(46.15)
$$\int_0^T\|v(\cdot,\ t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}dt\leqslant C_1\int_0^T\|f(\cdot,\ t)\|^2_{H^{-1}(\Omega)}dt,$$

其中，常数 $C_1>0$，象 C 一样，它依赖于 T 和 A. 把(46.13)和(46.15)结合起来，就得到

(46.16)
$$\int_0^T\|u(\cdot,\ t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}dt\leqslant C_2\left\{\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}+\int_0^T\|f(\cdot,\ t)\|^2_{H^{-1}(\Omega)}dt\right\}.$$

自然，这些存在性结果以及有关的估计，对我们并不是新的：它们是由能量不等式所得到的定理(例如定理 40.1)的特殊情形——或者，是由 Laplace 变换(§§ 43 和 44)或由连续半群理论(§ 45)所得到的定理的特殊情形. 但是，特征函数展开的方法有某些方便之处：在很多情况下，它给我们提供了比较具体的、可以计算的解的逼近. 很清楚，可以把这个方法推广到不同于抛物型的方程上去，例如，推广到一类重要的双曲型方程，如波动方程，也能推广到象 Schrödinger 方程这样的方程，它既不是抛物的，也不是双曲的(参阅习题 46.5 和 46.6).

这里，我们将讨论双曲型方程的情形，作为向 § 47 的结果的一个过渡. 现在所研究的微分算子，关于 t，将是二阶的，更明确地，将是[A 与(46.2)中的 A 有相同的意义]：

(46.17)
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+Au=f\quad 在\ \Omega\times]0,\ T[\ 中.$$

至于初始条件，它们现在是

(46.18)
$$u(\cdot,\ 0)=u_0,\qquad \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,\ 0)=u_1.$$

边界条件将再一次蕴涵在下述事实中：我们要求的解 u 是取值于 $H_0^1(\Omega)$ 中的. 和本节中处理抛物型问题(46.2)—(46.3)一样，我们将用 f, u_0 和 u 的以 E_j 表示的级数表示. 这里还需要 u_1 的级数

表示:

$$u_1 = \sum u_{1j} E_j.$$

我们来证明下述定理:

定理 46.1　假设开集 Ω 是有界的，并设 Ω 中的微分算子 $A(x, \partial/\partial x)$ 是形式自伴的和强椭圆的[即满足(34.2)和(34.6)].

那么，对于每组数据

(46.19)

$$u_0 \in H_0^1(\Omega), \quad u_1 \in L^2(\Omega), \quad f \in L^1(0, T;\ L^2(\Omega)),$$

存在唯一的函数 u，使得

(46.20)

$$u \in C^0([0, T];\ H_0^1(\Omega)), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \in C^0([0, T];\ L^2(\Omega)),$$

且满足(46.17)—(46.18).

证明　级数表示(46.7)中的系数 u_j 必定满足二阶常微分方程

(46.21)$_j$　$u_j'' + \lambda_j u_j = f_j, \quad 0 < t < T$　[参阅(46.8)$_j$]

和初始条件[参阅(46.9)$_j$]

(46.22)$_j$　$u_j(0) = u_{0j}, \quad u_j'(0) = u_{1j}.$

(46.21)$_j$—(46.22)$_j$ 的唯一解为

(46.23)
$$u_j(t) = u_{0j} \cos(t\sqrt{\lambda_j}) + u_{1j} \frac{\sin(t\sqrt{\lambda_j})}{\sqrt{\lambda_j}} + \int_0^t f_j(s) \frac{\sin\{(t-s)\sqrt{\lambda_j}\}}{\sqrt{\lambda_j}} ds.$$

从命题 34.2，并从(46.21)$_j$—(46.22)$_j$ 的解 u_j 的唯一性，即得解 $u(t, x)$ 的唯一性．(46.20)成立这一事实现在将从表达式(46.23)推得．附带指出，读者不必为数 λ_j(它们不必都是正的)的平方根出现于(46.23)中而烦恼：立即看到，那些平方根 $\sqrt{\lambda_j}$ 的函数实际上是 $(\sqrt{\lambda_j})^2 = \lambda_j$ 的函数．我们继续假设 $H_0^1(\Omega)$ 被赋予内积(46.14)，$H^{-1}(\Omega)$ 被赋予对偶 Hilbert 空间结构；这样就可以直接了当地应用命题 34.2．我们有

$$(46.24)\quad \{\sum(\varkappa+\lambda_j)|u_j(t)|^2\}^{1/2}$$

$$\leqslant\{\sum(\varkappa+\lambda_j)|u_{0j}|^2\}^{1/2}+\left\{\sum\left|\frac{\varkappa+\lambda_j}{\lambda_j}\right|\right.$$

$$\left.\cdot\{\sin(t\sqrt{\lambda_j})\}^2|u_{1j}|^2\right\}^{1/2}$$

$$+\int_0^t\left\{\sum|f_j(s)|^2\frac{\varkappa+\lambda_j}{\lambda_j}\sin\{(t-s)\sqrt{\lambda_j}\}^2\right\}^{1/2}ds.$$

对于适当的常数 $C>0$，对于所有 $j=1, 2, \cdots$，我们有

$$(46.25)\qquad \left|\frac{\varkappa+\lambda_j}{\lambda_j}\right|\sin(t\sqrt{\lambda_j})^2\leqslant C.$$

由于(46.25)，从(46.24)推得：

(46.26)

$$\|u(\cdot, t)\|_{H_0^1(\Omega)}\leqslant\|u_0\|_{H_0^1(\Omega)}+C\|u_1\|_{L^2(\Omega)}+C\int_0^t\|f(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}dt,$$

这证明了 $u\in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$. 最后，我们来证明 u 在闭区间 $[0, T]$ 中是连续的，取值于 $H_0^1(\Omega)$ 中. 为此，只需从表达式(46.23)推导一个比(46.24)稍微精细一些的不等式，即

(46.27)

$$\{\sum(\varkappa+\lambda_j)|u_j(t)-u_j(t')|^2\}^{1/2}$$

$$\leqslant\{\sum(\varkappa+\lambda_j)|u_{0j}|^2H_j^2(t, t')\}^{1/2}$$

$$+\{\sum|u_{1j}|^2K_j^2(t, t')\}^{1/2}$$

$$+\left\{\sum\left(\int_{t'}^t|f_j(s)|\left|\left[\frac{\varkappa+\lambda_j}{\lambda_j}\right]^{1/2}\sin((t'-s)\sqrt{\lambda_j})\right|ds\right)^2\right\}^{1/2}$$

$$+\left\{\sum\left(\int_0^t|f_j(s)||K_j(t-s, t'-s)|ds\right)^2\right\}^{1/2},$$

其中，我们已经用了记号

$$(46.28)\qquad H_j(t, t')=\cos(t\sqrt{\lambda_j})-\cos(t'\sqrt{\lambda_j}),$$

(46.29)

$$K_j(t, t')=\left[\frac{\varkappa+\lambda_j}{\lambda_j}\right]^{1/2}[\sin(t\sqrt{\lambda_j})-\sin(t'\sqrt{\lambda_j})].$$

对于某个适当的常数 $C>0$ 和所有 $j=1, 2, \cdots$，以及所有 $t, t'\in[0, T]$，有

$$|H_j(t, t')|\leqslant 2,\qquad |K_j(t, t')|\leqslant 2C.$$

如果固定 j，则当 t' 收敛于 t 时，$H_j(t, t')$ 和 $K_j(t, t')$ 收敛于零. 因而，由(适用于级数的)控制收敛定理，当 t' 趋于 t 时，(46.27)右端的前两项趋于零.

由于积分的范数不大于范数的积分，故知第三项不大于

$$\int_{t'}^{t} \|f(\cdot, s)\|_{L^2(\Omega)} ds,$$

因而，当 $t' \to t$ 时第三项收敛于零. 最后，考虑(46.27)右端的第四项，即最后一项. 对于每个 $\varepsilon>0$，存在一个整数 $N_\varepsilon>0$，使得

$$\left\{\sum_{j>N_\varepsilon}\left(\int_0^T |f_j(s)|ds\right)^2\right\}^{1/2} \leqslant \varepsilon.$$

另一方面，存在 $\eta>0$，使得 $|t-t'|\leqslant\eta$ 蕴涵着对每个 $j=1, \cdots, N_\varepsilon$ 和每个 $s, t, t' \in [0, T]$，有

$$|K_j(t-s, t'-s)| \leqslant \varepsilon.$$

从这两事实容易得到，当 $t'\to t$ 时，最后一项也趋于零.

类似的推理也适用于 $u(x, t)$ 的 t 导数

$$u_t(x, t) = \sum u_j'(t) E_j(x).$$

这只需注意

(46.30) $$u_j'(t) = -\sqrt{\lambda_j}\, u_{0j} \sin(t\sqrt{\lambda_j}) + u_{1j}\cos(t\sqrt{\lambda_j}) + \int_0^t f_j(s)\cos\{(t-s)\sqrt{\lambda_j}\}ds.$$

我们把细节留给读者. 人们必须证明，当 t' 趋于 t 时，

$$\{\sum|u_j'(t) - u_j'(t')|^2\}^{1/2}$$

收敛于零.

注 46.1 除了定理 46.1 中的假设之外，如果还作假设 $f\in C^0([0, T]; H^{-1}(\Omega))$，那就能从定理 46.1 的结论以及方程(46.17)推得 $\partial^2 u/\partial t^2$ 属于 $C^0([0, T]; H^{-1}(\Omega))$.

注 46.2 在双曲型混合问题和抛物型混合问题之间，一个本质差别是，在前一问题中，时间是可逆的：假设方程(46.17)的右端 f 定义于 $-T\leqslant t\leqslant 0$ 中，我们能够解决后向混合问题，即与(46.17)—(46.18)一样的问题，只是(46.17)必须对于 $(x, t)\in\Omega\times]-T, 0[$ 成立. 在抛物型混合问题中事情不是这样的!

注 46.3 读者应该把公式(46.23)与公式(13.10)加以比较．可以说，后者是前者的"整体类似"：它是前者当 $\Omega=\mathbf{R}^n$(和 $T=+\infty$)时的类似．这里，正如在注 34.1 中一样，我们再一次看到，用特征函数 $E_\nu(x)$ 表示的级数表示与 Fourier 反演公式有一很强的(和深刻的！)类似性．如果利用 Fourier 级数而不用 Fourier 积分(即若我们处理环面 $\mathbf{T}^n$ 上的函数，而不是 $\mathbf{R}^n$ 上的函数；参阅习题 13.2)，此类似性更为明显．

习　题

46.1 令 Ω 是实直线上的一有界区间 $a<x<b$．利用在例 34.1 中所述的特征函数展开式，解混合问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad a<x<b,\ t>0,\tag{46.31}$$

$$u(x,\ 0)=u_0(x)\in L^2(a,\ b),\tag{46.32}$$

$$u(a,\ t)=g_a(t),\quad u(b,\ t)=g_b(t),\quad t>0.\tag{46.33}$$

与例 44.2 中的结果相比较．

46.2 与习题 46.1 中同样的问题，但是用

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad a<x<b,\ t>0\tag{46.34}$$

代替(36.31)，用

$$u(x,\ 0)=u_0(x)\in H_0^1(\Omega),\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,\ 0)=u_1(x)\in L^2(\Omega)\tag{46.35}$$

代替(36.32)．与习题 44.7 加以比较．

46.3 令 Ω 是平面中的圆盘 $x^2+y^2<R^2(R>0)$．利用例 34.2 中所述的特征函数展开式，解混合问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\Delta u,\ (x,\ y)\in\Omega,\ t>0\quad\left[\Delta=\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\right],\tag{46.36}$$

$$u|_{t=0}=u_0\in L^2(\Omega),\tag{46.37}$$

$$u(\cdot,\ t)\in H_0^1(\Omega),\quad t>0.\tag{46.38}$$

46.4 与习题 46.3 中同样的问题，但是这次是关于波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\Delta u,\quad (x,\ y)\in\Omega,\ t>0\tag{46.39}$$

及其初始条件

$$u|_{t=0}=u_0\in H_0^1(\Omega),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=u_1\in L^2(\Omega).\tag{46.40}$$

46.5　令 A 是方程(46.2)中的那个算子，但是现在考虑"Schrödinger 型"方程

(46.41)　$$\frac{\partial u}{\partial t}+iAu=f \quad 在\ \Omega\times]0,T[中 \quad (i=\sqrt{-1}),$$

具有初始条件

(46.42)　$$u(\cdot,0)=u_0\in L^2(\Omega).$$

假设 $f\in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$，$u_0$ 在(46.6)中给出．试在(46.41)—(46.42)的解 u 的展开式(46.7)中确定系数 $u_j(t)$．证明，展开式(46.7)在 $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ 中收敛．当 $T\to+\infty$ 时发生什么后果?

46.6　这是一个与习题 46.1 相同的问题，但是这次用 Schrödinger 方程

(46.43)　$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sqrt{-1}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad a<x<b,\ 0\leqslant t\leqslant T$$

代替热导方程(46.31)[还有，边界条件(46.33)只有效到时刻 T]．

47．一类双曲型混合问题的抽象存在性和唯一性定理．能量不等式

在§46中，关于某些双曲型混合问题的解的存在性和唯一性，我们得到了一个结果(定理 46.1)．实际上，这个结果还给出了解的某些有意义的特征函数展开式．但是，它所适用的方程和问题的类型有很大的限制．我们必须会处理不同于 Dirichlet 问题的问题：例如，Neumann 问题(§37.1)，§37.2 的"混杂"问题，在§37.5中的辐射问题和斜微商问题，高阶强椭圆算子的 Dirichlet 问题和 Neumann 问题(§§36 和 38)，等等．应该期望，包含这些问题的一种推广，也能适用于抛物型混合问题．我们已经在一系列习题——40.1，40.2 和 42.1 到 42.3——中给出了如何实现这种推广的指示(关于应用，请参看习题 41.4，41.5 和 42.4)．为了一般性起见，在这一节中我们叙述和证明一个抽象的定理，它可以应用于上述那些种类的问题的广阔领域中去．然而，想到具体的情形也许是有好处的，例如，象 $(\partial/\partial t)^2+A(x,t,\partial/\partial x)$ 这样的二阶微分算子的混合问题，其中

$$A(x,\ t,\ \partial/\partial x) = -\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^j} a^{jk}(x,\ t) \frac{\partial}{\partial x^k} + \sum_{j=1}^{n} b^j(x,\ t) \frac{\partial}{\partial x^j} + c(x,\ t)$$

满足通常的强椭圆性假设(40.17)[还满足有界性假设(40.16)]. 与§47中考虑的算子相比，这里的算子容许有与 t 有关的系数. $A(x,\ t,\ \partial/\partial x)$ 写成变分形式使我们能够引进通常的拟双线性形式(在这里是依赖于 t 的)

$$a(t;\ u,\ v) = \sum_{j,k=1}^{n} \int_{\Omega} a^{jk}(x,\ t) \frac{\partial u}{\partial x^k} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x^j}\, dx + \sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega} b^j(x,\ t) \frac{\partial u}{\partial x^j} \bar{v}\, dx + \int_{\Omega} c(x,\ t) u \bar{v}\, dx.$$

用§37中详细叙述过的方法，这样一种形式确定一个从 Hilbert 空间 $\mathbf{V}$ 到它的反对偶空间 $\overline{\mathbf{V}}'$ 中的有界线性算子(这次，是依赖于 t 的, $0 \leqslant t \leqslant T$). 我们回忆一下, $\mathbf{V}$ 的反对偶空间 $\overline{\mathbf{V}}'$ 是 $\mathbf{V}$ 上连续反线性泛函的 Banach 空间(我们仍用 $\langle,\rangle^-$ 表示 $\mathbf{V}$ 和 $\overline{\mathbf{V}}'$ 之间的反对偶性括号). 在上述的微分算子 $A(x,\ t,\ \partial/\partial x)$ 的情形中, $\mathbf{V}$ 可以是 $H_0^1(\Omega)$，如果所研究问题中的边界条件是 Dirichlet 条件；不然，就是某个别的函数空间，最通常的是 $H_0^1(\Omega)$ 和 $H^1(\Omega)$ 之间的一个中间空间(参阅§37). 如果代替 $A(x,\ t,\ \partial/\partial x)$，我们研究一个 $2m$ 阶强椭圆算子(其系数依赖于时间 t)，那么空间 $\mathbf{V}$ 可以是 $H_0^m(\Omega)$，或者是 $H_0^m(\Omega)$ 和 $H^m(\Omega)$ 之间的某个中间空间.

总而言之，我们有 $\mathbf{V}\times\mathbf{V}$ 上的一个依赖于 t 的连续拟双线性形式 $a(t;\mathbf{u},\ \mathbf{v})$，对每个 $t\in[0,\ T]$，它确定一个有界线性算子 $A(t): \mathbf{V}\to\overline{\mathbf{V}}'$，使得

(47.1) $$a(t;\mathbf{u},\ \mathbf{v}) = \langle A(t)\mathbf{u},\ \mathbf{v}\rangle^-, \quad \mathbf{u},\ \mathbf{v}\in\mathbf{V}.$$

但是必须注意，不要把这个"抽象的"算子 $A(t)$ 等同于微分算子 $A(x,\ t,\ \partial/\partial x)$ 在 $\mathbf{V}$ 上的限制: $A(t)$ 具有一些一般来说 $A(x,\ t,\ \partial/\partial x)$ 所不具有的信息. 事实上, $\mathbf{V}$ 本身的选取就蕴涵着解 u 的某些边界条件，正如§37中所说明的. 在 $\mathbf{V}=H_0^1(\Omega)$ 的情形，在某种意义下我们可把 $A(t)$ 等同于 $A(x,\ t,\ \partial/\partial x)$，后者可看作一个有

界线性算子 $H_0^1(\Omega)\to H^{-1}(\Omega)$——否则，事情就不是这样了. 关于更一般的说明，请参阅 § 37. 这样，在抽象的框架中，我们将从算子 $A(t)$: $\mathbf{V}\to\overline{\mathbf{V}}'$，或从拟双线性泛函 $a(t;\ \mathbf{u},\ \mathbf{v})$开始.

我们将把在 § 46 的特殊情形中所遇到的一些限制延续到现在的更一般情形: 假设 $A(t)$在下述意义下是形式自伴的:

(47.2) $\langle A(t)\mathbf{u},\ \mathbf{v}\rangle^- = \langle \mathbf{u},\ A(t)\mathbf{v}\rangle^-,\quad 0\leqslant t\leqslant T,\ \mathbf{u},\ \mathbf{v}\in\mathbf{V},$

或者，等价地，对于同样一些 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, t，有

(47.2′) $a(t;\ \mathbf{u},\ \mathbf{v}) = \overline{a(t;\ \mathbf{v},\ \mathbf{u})}.$

我们将作通常的强制性假设:

(47.3) 存在常数 $c_0>0$ 和实数 λ_0，使得对于所有的 $\lambda\geqslant\lambda_0$，所有的 $\mathbf{u}\in\mathbf{V}$ 和所有的 t, $0\leqslant t\leqslant T$，有

$$\langle(\lambda+A(t))\mathbf{u},\ \mathbf{u}\rangle^-\geqslant c_0\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}}^2.$$

我们还必须详细说明 $A(t)$或 $a(t;\mathbf{u},\ \mathbf{v})$关于 t 的正规性要求. 我们假设

(47.4) 对于 $\mathbf{V}$ 的每对元素 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $t\mapsto a(t;\ \mathbf{u},\ \mathbf{v})$是闭区间$[0,T]$中的 C^1 函数.

我们要研究的初始值问题是下述问题:

(47.5) $\mathbf{u}_{tt}(t)+A(t)\mathbf{u}(t)=\mathbf{f}(t),\quad 0<t<T,$

(47.6) $\mathbf{u}(0)=\mathbf{u}_0,\quad \mathbf{u}_t(0)=\mathbf{u}_1,$

其中下标 t 表示关于 t 的微商. 我们来证明下述结果:

定理 47.1 假设 $A(t)$是形式自伴的，即(47.2)成立，并假设它满足强制性假设(47.3). 进一步假设，对于任何 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$, $a(t;\ \mathbf{u},\ \mathbf{v})\in C^1([0,\ T])$，即，(47.4)成立.

那么，对于每个 $\mathbf{u}_0\in\mathbf{V}$, $\mathbf{u}_1\in\mathbf{H}$, $\mathbf{f}\in L^1(0,\ T;\ \mathbf{H})$，存在一个唯一的函数 $\mathbf{u}\in L^\infty(0,\ T;\ \mathbf{V})$，使得 $\mathbf{u}_t\in L^\infty(0,\ T;\ \mathbf{H})$，并使得(47.5)—(47.6)成立.

再者，$\mathbf{u}$ 是闭区间$[0,\ T]$中的一个连续函数，取值于 $\mathbf{V}_\sigma$(赋予弱拓扑的空间 $\mathbf{V}$)中，而 $\mathbf{u}_t$ 是$[0,T]$中 $\mathbf{H}_\sigma$ 值的连续函数.† 存在

† 如通常一样，我们把函数看作广义函数，这意味着 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{u}_t$ 也许必须在一零测集上改变其值.

一个不依赖于 $\mathbf{f}$, $\mathbf{u}_0$, $\mathbf{u}_1$ 和 $t(0\leqslant t\leqslant T)$ 的常数 $C>0$, 使得对于这些 t, 有

$$(47.7)\quad \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}}+\|\mathbf{u}_t(t)\|_{\mathbf{H}}\leqslant C\left\{\|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{V}}+\|\mathbf{u}_1\|_{\mathbf{H}}+\int_0^t\|\mathbf{f}(t')\|_{\mathbf{H}}dt'\right\}.$$

证明　证明由三步组成: 首先, 我们证明一些"能量"型的等式和不等式; 其次, 由所谓的 Galerkin 方法(例 35.1), 利用(仅在有限维的情形中!)下面第 I 部分中证明的能量估计, 证明解的存在性. 最后, 本质上由能量估计的一个变形, 证明解的唯一性. 此证明与定理 40.1 和 41.1 (它适用于抛物型发展方程)的证明有许多类似之处, 但是也有明显的差别, 特别是在关于变量 t 的正规性要求方面, 还在于我们必须取 $\mathbf{f}$ 为 $\mathbf{H}$ 值而非 $\overline{\mathbf{V}}'$ 值. 在技巧上, 这归因于下述事实, 即在能量估计的求导中, 必须作 $\mathbf{f}(t)$ 与 $\mathbf{u}_t(t)$ (它取值于 $\mathbf{H}$ 中, 而非取值于 $\mathbf{V}$ 中)的内积, 因而, 此内积是在 $\mathbf{H}$ 中计算的.

I. 能量不等式

令 $\boldsymbol{\varphi}$ 是 $C^1([0, T]; \mathbf{V})$ 的任一元素, 使得 $\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{\varphi}_{tt}-A(t)\boldsymbol{\varphi}\in L^1(0, T; \mathbf{H})$ [因此, $\boldsymbol{\varphi}_{tt}\in L^1(0, T; \overline{\mathbf{V}}')$]. 我们有

$$(47.8)\qquad (\boldsymbol{\varphi}_{tt}, \boldsymbol{\varphi}_t)_{\mathbf{H}}+a(t; \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}_t)=(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\varphi}_t)_{\mathbf{H}}.$$

对于 $\mathbf{V}$ 中任何 $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, 记 $a_t(t; \mathbf{v}, \mathbf{w})=(d/dt)a(t; \mathbf{v}, \mathbf{w})$, 并且, 取(47.8)中两端的实部的两倍, 就导致

$$(47.9)\qquad \frac{d}{dt}\{\|\boldsymbol{\varphi}_t\|_{\mathbf{H}}^2+a(t; \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi})\}=(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\varphi}_t)_{\mathbf{H}}+a_t(t; \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}).$$

这里已经用了性质(47.2′), 即, 用了 $a(t; \mathbf{v}, \mathbf{w})$ 是 Hermite 的. 在(47.9)的两端从 0 到 t 积分, 得到

(47.10)

$$\|\boldsymbol{\varphi}_t(t)\|_{\mathbf{H}}^2+a(t; \boldsymbol{\varphi}(t), \boldsymbol{\varphi}(t))=\|\boldsymbol{\varphi}_1\|_{\mathbf{H}}^2+a(0; \boldsymbol{\varphi}_0, \boldsymbol{\varphi}_0)+\int_0^t\{(\boldsymbol{\psi}(t'), \boldsymbol{\varphi}_t(t'))_{\mathbf{H}}+a_t(t'; \boldsymbol{\varphi}(t'), \boldsymbol{\varphi}(t'))\}dt'.$$

现在利用强制性性质(47.3). 我们看到, 存在一个不依赖于 $\boldsymbol{\varphi}$(因而不依赖于 $\boldsymbol{\varphi}_0$, $\boldsymbol{\varphi}_1$, $\boldsymbol{\psi}$)和 t 的常数 $C>0$, 使得

$$\|\boldsymbol{\varphi}(t)\|_{\mathbf{V}}^2+\|\boldsymbol{\varphi}_t(t)\|_{\mathbf{H}}^2\leqslant C\left\{\|\boldsymbol{\varphi}_0\|_{\mathbf{V}}^2+\|\boldsymbol{\varphi}_1\|_{\mathbf{H}}^2+\|\boldsymbol{\varphi}(t)\|_{\mathbf{H}}^2\right.$$

$$\left.+\int_0^t\|\boldsymbol{\varphi}(t')\|_{\mathbf{V}}^2\,dt'+\sup_{0\leqslant t'\leqslant t}\|\boldsymbol{\varphi}_t(t')\|_{\mathbf{H}}\int_0^t\|\boldsymbol{\psi}(t')\|_{\mathbf{H}}\,dt'\right\}.$$

引进下列范数:

$$N(t;\,\boldsymbol{\varphi})=\sup_{0\leqslant t'\leqslant t}\{\|\boldsymbol{\varphi}(t')\|_{\mathbf{V}}^2+\|\boldsymbol{\varphi}_t(t')\|_{\mathbf{H}}^2\}^{1/2}.$$

从上面的不等式, 可能经过增大常数 C, 就推得

(47.11)

$$N(t;\,\boldsymbol{\varphi})\leqslant C\left\{N(0;\,\boldsymbol{\varphi})+\int_0^t\|\boldsymbol{\psi}(t')\|_{\mathbf{H}}\,dt'+\int_0^t N(t';\,\boldsymbol{\varphi})\,dt'\right\}.$$

经典的 Gronwall 不等式(参阅习题 11.10)使我们能够从(47.11)推得

(47.12)

$$N(t;\boldsymbol{\varphi})\leqslant Ce^{Ct}\left\{N(0;\,\boldsymbol{\varphi})+\int_0^t\|\boldsymbol{\psi}(t')\|_{\mathbf{H}}\,dt'\right\},\quad 0\leqslant t\leqslant T,$$

换句话说, 可能经过适当增大 C 之后, 有

(47.13)

$$\|\boldsymbol{\varphi}(t)\|_{\mathbf{V}}+\|\boldsymbol{\varphi}_t(t)\|_{\mathbf{H}}\leqslant Ce^{CT}\left\{\|\boldsymbol{\varphi}_0\|_{\mathbf{V}}+\|\boldsymbol{\varphi}_1\|_{\mathbf{H}}+\int_0^t\|\boldsymbol{\psi}(t')\|_{\mathbf{H}}\,dt'\right\}.$$

II. 解的存在性

我们将应用 *Galerkin* 方法(例 35.1)的某种简化的形式. 这个方法的思想是简单的: 由于 $\mathbf{V}$ 的可分性, 我们可以把 $\mathbf{V}$ 表示为有限维线性子空间 $\mathbf{V}_J$ 的一个严格递增序列的并集的闭包. 由 $\mathbf{V}$ 在 $\mathbf{H}$ 中的稠性知道, $\mathbf{H}$ 也是 $\cup\mathbf{V}_J$ 的闭包(在 $\mathbf{H}$ 中的!). 利用 $\mathbf{V}$ 在 $\mathbf{V}_J$ 上的适当的投影, 可以把我们的无限维问题变成 $\mathbf{V}_J$ 中的一个常微分方程组(即数据和未知函数都取值于 $\mathbf{V}_J$ 中). 此方程组(对于适当选取的初始条件)有一唯一解 $\mathbf{u}_J$, 然后证明, 在某种适当的方式下 $\mathbf{u}_J$ 收敛于(47.5)—(47.6)的所要求的解 $\mathbf{u}$.

在现在的情形中, 我们将用 $\mathbf{V}$ 中的一个序列 $\mathbf{w}_1,\ \cdots,\ \mathbf{w}_j,\ \cdots,$

它在 $\mathbf{H}$ 中形成一个完全的规格化正交系. 显然, 这样的序列是存在的. 在我们的情形, 有限维线性子空间 $\mathbf{V}_J$ 将是 $\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_J$ 的线性生成. 我们可以选择复数 u_{0J}^j, 使得部分和

$$\mathbf{u}_{0J} = \sum_{j=1}^{J} u_{0J}^j \mathbf{w}_j$$

在 $\mathbf{V}$ 中收敛于 $\mathbf{u}_0$. 然后定义

$$\mathbf{u}_J(t) = \sum_{j=1}^{J} u_J^j(t)\mathbf{w}_j, \quad J = 1, 2, \cdots$$

作为初始值问题

(47.14)

$$(u_J^j)_{tt}(t) + a(t;\ \mathbf{u}_J(t),\ \mathbf{w}_j) = (\mathbf{f}(t),\ \mathbf{w}_j)_{\mathbf{H}}, \quad 1 \leqslant j \leqslant J,$$

(47.15) $\quad u_J^j(0) = u_{0J}^j, \quad (u_J^j)_t(0) = (\mathbf{u}_1,\ \mathbf{w}_j)_{\mathbf{H}}, \quad 1 \leqslant j \leqslant J$

的解. 这是 J 个二阶线性常微分方程的一个方程组, 它的系数是 $[0, T]$ 中的 C^1 函数. 事实上,

$$a(t;\ \mathbf{u}_J(t),\ \mathbf{w}_j) = \sum_{i=1}^{J} a(t;\ \mathbf{w}_i,\ \mathbf{w}_j) u_J^i(t),$$

再只需应用(47.4)即可. 从 $\mathbf{f}$ 的选取知道, (47.14)的右端是 $[0, T]$ 上的可积函数; 因而, (唯一)解 u_J^j 都是 C^1 函数, 它们的二阶导数都是 $[0, T]$ 中的 L^1 函数. 因此可以对 $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{u}_J$ 应用能量不等式(47.13). 我们看到, 存在一个只依赖于算子 $A(t)$ 和 T 的正常数 C_1, 使得

(47.16)
$$\|\mathbf{u}_J(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \|(\mathbf{u}_J)_t(t)\|_{\mathbf{H}}^2 \leqslant C_1\left\{\|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\mathbf{u}_1\|_{\mathbf{H}}^2 + \left(\int_0^t \|\mathbf{f}(t')\|_{\mathbf{H}}\, dt'\right)^2\right\}.$$

对(47.16)的两端从 0 到 T 积分, 就得到结论: $\mathbf{u}_J$[相应地, $(\mathbf{u}_J)_t$] 在 $L^2(0, T;\ \mathbf{V})$ 中[相应地, 在 $L^2(0, T;\ \mathbf{H})$ 中]形成一有界序列. 因而可以抽出一子序列$(\mathbf{u}_{J_\nu})$, 它在 $L^2(0, T;\ \mathbf{V})$ 中弱收敛于函数 $\mathbf{u}$, 同时, $(\mathbf{u}_{J_\nu})_t$ 在 $L^2(0, T;\ \mathbf{H})$ 中弱收敛于 $\mathbf{u}_t$. 容易知道, 极限 $\mathbf{u}$ 满足(47.5)—(47.6), 并由于(47.16), 它还满足能量不等式(47.7). 这样, $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T;\ \mathbf{V})$, $\mathbf{u}_t \in L^\infty(0, T;\ \mathbf{H})$. 注意, 从这

里, 从方程(47.5), 并从关于 $a(t;\ \mathbf{v},\ \mathbf{w})$ 和关于 $\mathbf{f}$ 的假设, 即得 $\mathbf{u}_{tt}\in L^1(0,\ T;\ \overline{\mathbf{V}}')$. 我们推得

(47.17) $\quad \mathbf{u}\in C^0([0,\ T];\ \mathbf{H}),\quad \mathbf{u}_t\in C^0([0,\ T];\ \overline{\mathbf{V}}')$.

这事先假定了我们可能已在一零测集上修正了 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{u}_t$; 特别, 不妨假定它们分别是 $[0,\ T]$ 中的 $\mathbf{V}$ 值和 $\mathbf{H}$ 值有界函数.

令 $\mathbf{v}'$(相应地, $\mathbf{h}$)是 $\overline{\mathbf{V}'}$(相应地, $\mathbf{H}$)的一个任意的元素, $t_0\in[0,\ T]$是一个任意的点, $\{t_j\}$是一个在闭区间$[0,\ T]$中收敛于 t_0 的序列. 我们知道, $\mathbf{u}(t_j)$ [相应地, $\mathbf{u}_t(t_j)$], $j=0,\ 1,\ \cdots$, 逗留在 $\mathbf{V}$ [相应地, $\mathbf{H}$]的一个有界子集中, 因而, 存在一子序列$\{j_\nu\}$, 使得

$$\langle \mathbf{v}',\ \mathbf{u}(t_{j_\nu})\rangle^- \quad [\text{相应地},\ (\mathbf{u}_t(t_{j_\nu}),\ \mathbf{h})_{\mathbf{H}}]$$

收敛. 由于(47.17), 极限只能是

(47.18) $\quad \langle \mathbf{v}',\ \mathbf{u}(t_0)\rangle^- \quad [\text{相应地},\ (\mathbf{u}_t(t_0),\ \mathbf{h})_{\mathbf{H}}]$.

由一初等的推理, 这意味着

$$\langle \mathbf{v}',\ \mathbf{u}(t_j)\rangle^- \quad [\text{相应地},\ (\mathbf{u}_t(t_j),\ \mathbf{h})_{\mathbf{H}}]$$

收敛于(47.18). 这证明了把 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{u}_t$ 分别看作取值于 $\mathbf{V}_\sigma$ 中和 $\mathbf{H}_\sigma$ 中的函数时, 它们的连续性性质.

III. 解的唯一性

我们考虑齐次方程

(47.19) $\quad \mathbf{u}_{tt}+A(t)\mathbf{u}=0,\quad 0<t<T$

的一个解 $\mathbf{u}\in L^\infty(0,\ T;\ \mathbf{V})$, 它使得 $\mathbf{u}_t\in L^\infty(0,\ T;\ \mathbf{H})$ 和 $\mathbf{u}(0)=\mathbf{u}_t(0)=0$. 令

$$\mathbf{U}(t)=\int_0^t \mathbf{u}(t')dt',$$

并从 0 到 t' 积分(47.19), 就得到

$$\mathbf{U}_{tt}(t')+\int_0^{t'} A(t'')\mathbf{u}(t'')dt''$$

$$=\mathbf{U}_{tt}(t')+A(t')\mathbf{U}(t')-\int_0^t A_t(t'')\mathbf{U}(t'')dt''=0.$$

现在利用下面一些事实: $\mathbf{U}_t\in L^\infty(0,\ T;\ \mathbf{V})$, $\mathbf{U}_{tt}=\mathbf{u}_t\in L^\infty(0,\ T;$

$\mathbf{H}$)和$A(t)\mathbf{U}(t)\in C^0([0,T];\ \overline{\mathbf{V}'})$. 我们可以写

$$(47.20)\qquad (\mathbf{U}_{tt}(t'),\ \mathbf{U}_t(t'))_{\mathbf{H}}+a(t';\ \mathbf{U}(t'),\ \mathbf{U}_t(t'))\\ -\int_0^{t'}a_t(t'';\ \mathbf{U}(t''),\ \mathbf{U}_t(t'))dt''=0.$$

取(47.20)的左端的实部的两倍，并从0到t积分，就得到

$$(47.21)\qquad \|\mathbf{U}_t(t)\|_{\mathbf{H}}^2+a(t;\ \mathbf{U}(t),\ \mathbf{U}(t))\\ =\int_0^t a_t(t';\ \mathbf{U}(t'),\ \mathbf{U}(t'))dt'\\ +2\mathrm{Re}\int_0^t a_t(t';\ \mathbf{U}(t'),\ \mathbf{U}(t)-\mathbf{U}(t'))dt'.$$

我们用强制性假设(47.3)，象在第I部分中那样进行推理. 从(47.21)推得，对于某个常数$C>0$，有

$$N(t;\ \mathbf{U})^2\leqslant C\int_0^t N(t';\ \mathbf{U})^2\,dt'+\int_0^t\|\mathbf{U}(t)-\mathbf{U}(t')\|_{\mathbf{V}}^2\,dt'\\ \leqslant 5CtN(t;\ \mathbf{U})^2,$$

它蕴涵着，当$0\leqslant t\leqslant t_0=(5C)^{-1}$时$\mathbf{U}(t)=0$. 象通常一样，在这样的情形中，我们用区间$[t_0,\ T]$代替区间$[0,T]$，现在可以在$[t_0,\ T]$中重复同样的推理. 这样，容易得到所期望的结论：当$0\leqslant t\leqslant T$时，$\mathbf{U}(t)$，因而$\mathbf{u}(t)$，必须恒等于零. 证毕.

注 47.1 可以证明，(47.5)—(47.6)的解$\mathbf{u}$——它的存在性和唯一性已在定理47.1中叙述——具有比在这定理中所述更高的关于t的正规性. 事实上，可以证明，$\mathbf{u}$(相应地，$\mathbf{u}_t$)是$t(0\leqslant t\leqslant T)$的连续函数，取值于$\mathbf{V}$(相应地，$\mathbf{H}$)中，而不仅仅是取值于$\mathbf{V}_\sigma$(相应地，$\mathbf{H}_\sigma$)中. 但是这个事实的证明远较定理47.1中较弱的叙述的证明复杂；可在[LM，第一卷，第三章，§8.4]——我们按照它修改了本节中的推理——中找到此证明.

参 考 文 献

有关泛函分析和广义函数理论

Gelfand, I. M. and Silov, G., "Generalized Functions", Academic Press, New York, 1964 (英译本;包含丰富的素材以及特殊函数和广义函数,基本解,Fourier 变换等的明确的计算).

[TD] Schwartz, L., "Théorie des Distribution", Hermann, Paris, 1966 (仍不失为广义函数理论最好的和最易了解的叙述).

[TVS, D&K] Treves, F.,"Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels", Academic Press, New York, 1967.

[Y] Yosida, K., "Functional Analysis", Springer-Verlag, Berlin and New York, 1968(第二版;关于泛函分析的基本的参考书,包含丰富的素材,描述了泛函分析的各个方面).

有关线性偏微分方程(一般理论)

Bers, L., John, F. and Schechter, M., "Partial Differential Equations", Wiley (Interscience), New York, 1964(多少有点不同于本书的观点,包含着基本的素材).

Ehrenpreis, L., "Fourier Analysis in Several Complex Variables", Wiley (Interscience), New York, 1970(常系数超定线性偏微分方程组理论,以及超定组理论的一个非正统看法的分枝,作者即为此理论的创始人之一).

[LPDO] Hörmander, L., "Linear Partial Differential Operators", Springer-Verlag, Berlin and New York, 1963(六十年代的线性偏微分方程的一般理论;难而富有效益的读物).

Paramodov, V. P., "Linear Differential Operators with Constant Coefficients", Springer-Verlag, Berlin and New York, 1970 (英译本;常系数超定线性偏微分方程组理论的完整的、但有点过量的叙述——较 Ehrenpreis 的书严格,但欠生动).

Treves, F., "Linear Partial Differential Equations with Constant Coefficients", Gordon & Breach, New York, 1967.

有关特殊类型的线性偏微分方程

Agmon, S., "Lectures on Elliptic Boundary Value Problems", Van Nostrand-Reinhold, Mathematical Studies, Princeton, New Jersey, 1965.

Friedman, A., "Generalized Functions and Partial Differential Equations", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1963.

Friedman, A.,"Partial Differential Equations of Parabolic Type",

Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1964.

[F] Friedman, A., "Partial Differential Equations", Holt, New York, 1969.

Lions, J. L., "Equations différentielles opérationelles et problèmes aux limites", Springer-Verlag, Berlin and New York, 1961.

[LM] Lions, J. L. and Magenes, E., "Non-homogeneous Boundary Value Problems and Applications", Springer-Verlag, Berlin and New York, 1972.

与本书有关的某些特殊课题

[A] Aubin, J. P., "Approximation of Elliptic Boundary Value Problems", Wiley (Interscience), New York, 1972.

Dinkin, E. B. and Yushkevich, A. A., "Markov Processes", Plenum, New York, 1969(英译本).

[FS] Fix, G. and Strang, G., "An Analysis of the Finite Element Method", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1973.

[H] Helms, L. L., "Introduction to Potential Theory", Wiley (Interscience), New York, 1969.

Hobson, E. W., "The theory of Spherical Harmonics", Cambridge Univ. Press, London and New York, 1931.

Lavoine, J., "Calcul symbolique des distributions et des pseudofonctions", CNRS, Paris, 1959.

[W] Watson, G. N., "Theory of Bessel Functions", 第二版, Macmillan, New York, 1944.

Widder, D. V., "Laplace Transform", Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1946.

其它参考文献

[1] Séminaire Schwartz, "Equations aux dérivées partielles", Institut Henri Poincaré, Paris, 1955.

[2] Stampacchia, G., "Equations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus", Séminaire Eq. Dér. Part., Collège de France, Paris, 1963/64.

代后记——书评

关于"基本的"线性偏微分方程，高等微积分教科书讨论这一课题只需50或60页．但Treves为什么写了470页之多？又是如何写的？这不是因为他扩大了基本方程的范围：事实上，典型的问题和它们的直接推广占有全书．也不是因为在初等概念上花费了篇幅：广义函数理论和泛函分析基本知识都被假定是熟知的．通过考虑另一个问题也许可以找到其答案：如何用现代的方法来处理典型的基本问题．

对于热导方程，考虑一个简单的"混合的初始值-边界值问题"．即，给定一个函数 $u_0(x)$ $(x\in[-1,+1])$，要找一个定义在 $[-1,+1]\times[0,+\infty[$ 中的函数 u，使得

$$(1)\qquad \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad u(x,0)=u_0(x),\quad u(\pm 1,t)\equiv 0.$$

我们把(1)看作为一个向量值函数的常微分方程．用 A 表示线性算子 $(d/dx)^2$，它的定义域是 $[-1,+1]$ 上的函数的某个适当的空间，这些函数在端点 $x=-1,+1$ 处等于零．我们令 X 是包含 A 的定义域和初始值 u_0 的某个函数空间，要找 u: $[0,+\infty[\to X$，使得

$$(2)\qquad \frac{du}{dt}=Au,\quad u(0)=u_0.$$

第一种解法．求 A 的特征值集合 $\{\lambda_j\}$ 和特征函数集合 $\{\phi_j\}$，并展开 $u(t)\sim\sum a_j(t)\phi_j$．这就导致数值系数 a_j 的一个(唯一可解的)常微分方程集合．

第二种解法．形式地证明 u 必须具有 $u(t)=e^{tA}u_0$ 这样的形式，其中，指数函数必定由Cauchy积分公式

$$(3)\qquad U(t)=e^{tA}=(2\pi i)^{-1}\int_\Gamma e^t(\lambda I-A)^{-1}d\lambda$$

给出．因为 A 是一个非负的自伴算子，因此预解式 $(\lambda I-A)^{-1}$ 满足一些条件，这些条件保证了 $\{U(t)\}$ 是一个全纯半群．

第三种解法．形式地证明(2)蕴涵着解 u 的 Laplace 变换 $\tilde{u}$ 满足

$$\lambda\tilde{u}(\lambda)=u_0+A\tilde{u}(\lambda),$$

那么，反演公式就给出

$$(3)' \qquad u(t)=(2\pi i)^{-1}\int_{\Gamma}e^{t\lambda}(\lambda I-A)^{-1}u_0\,d\lambda.$$

第四种解法．对于 A，构造一族有限差分逼近 A_h．每个 A_h 作用在一个有限维空间中，因此 $u_h'=A_hu_h$ 是一个常微分方程组．此时，解 u_h 应该在某种意义下收敛于一解 u．

第五种解法．选取一个投影算子序列 $\{P_n\}$，P_n 把 X 投影到有限维子空间 X_n 上，而 X_n 的并集 $\cup X_n$ 在 X 中稠．此时，$u_n'=P_nAu_n$ 是一个常微分方程组，它有取值在 X_n 中的解 u_n．这里，u_n 也应该收敛于一解 u．

第六种解法．令 V_0 表示 $[-1,\ +1]\times[0,\ +\infty[$ 上光滑函数的空间，这些函数有紧支集，并且在 $x=\pm1$ 处等于零；再令 V 是 V_0 关于由内积

$$\langle v,\ w\rangle=\iint\frac{\partial v}{\partial x}\,\frac{\partial\overline{w}}{\partial x}\,dx\,dt+\int_{-1}^{+1}v(x,\ 0)\overline{w}(x,\ 0)\,dx$$

所定义的范数的完备化．给定 $v\in V_0$，存在一个唯一的 $Tv\in V$，使得

$$\langle w,\ Tv\rangle=\iint\left(\frac{\partial w}{\partial x}\,\frac{\partial\overline{v}}{\partial x}-w\,\frac{\partial v}{\partial t}\right)dx\,dt,\qquad\forall w\in V.$$

此时，(2)可解释为

$$(4)\qquad \int_{-1}^{+1}u_0(x)\,\overline{v}(x,\ 0)\,dx=\langle u,\ Tv\rangle,\qquad\forall v\in V_0.$$

但是 T 在 V 中有一个有界的逆，而(4)的左端定义 V 上的一个有界泛函，因而存在一个满足(4)的唯一的 $u\in V$．在某种意义下，u 是我们所希望的解．

不同的解法得到不同的解——要紧的是如何去找到它．对于

我们的特殊问题(或非齐次情形 $u'=Au+f$)而言，从不同的方法很容易得到的各种结果之间可能难于进行比较；例如，最后一个方法要求数据的较少的光滑性而导致解的较少的光滑性——相对于第二个方法而言. 再则，各种方法的推广范围大不相同. 前三种方法(特征函数展开，半群，Laplace 变换)对微分算子 A 没有任何限制，但不容易推广到随 t 而变的算子. 后三种方法(差分方法，Galerkin 方法，变分方法)用着 A 的更多的特殊结构，但不要求它与 t 无关.

人们的经验是：在偏微分方程理论中，方法可以与定理同样重要. 面对着如此多可供选择的方法，教科书或专著的作者有时只介绍那些对他自己最富有感染力的方法. 如果巧妙的话，甚至可把所选中的方法做得看来象是唯一自然且为合适的方法.

不是从一本为具有一些现代分析知识而又希望了解一些现代偏微分方程的大学毕业生或数学家而写的教科书中，而是从较之为深刻的书中，人们能希望些什么呢？应该引进一系列常用的方法，用这些方法去解决经典问题，指点一下它们的更大范围的应用；大量的习题应该描述其发展并探求其它途径；进一步发展的以及专著和论文的资料来源的丰富文献应该引导进一步的研究. 当然，人们还希望作者写得清楚一些和细致一些，希望他提供动机，也希望他乐意有始有终地探求较多的线索.

除了应有足够多的文献这一点之外，Treves 令人钦佩地满足了这些要求. 事实上，用现代语言并用现代方法得到了有关波动算子、热导算子和 Laplace 算子的所有经典结果；反复地应用了缓增广义函数的(部分)Fourier 变换；叙述并大致证明了常系数一阶组的 Cauchy 问题适定性的充要条件；用 Treves, Ovsjannikov 等的巧妙的方法证明了 Canchy-Kovalevska 定理；用变分方法处理了 Dirichlet 问题，通过 Stampacchia 弱极大值原理重新得到了经典结果；讨论了随机徘徊和 Brown 运动，球面调和函数和一般的椭圆边值问题. 上面所说的所有方法都在书中的不同场合被讨论了.

有一些值得商榷之处和可以利用的机会. Treves 没有指出热导方程和 Schrödinger 方程的基本解是如何通过解析延拓而联系着的. 这是一个目前在物理理论中流行着的关系, 通过这个关系, 可以毫不含糊地去计算 Schrödinger 方程的基本解中的常数; 在解 Dirichlet 问题时, 从变分方法的结果到经典结果的过程似乎是一个有意义的, 但却是一个并不自然的卖弄; 提到了任一常系数算子的基本解的存在性, 但并没有指出文献和作者; 没有提及 Hörmander 的有关常系数次椭圆方程的特性描述. 没有讨论到, 也没有指出参考文献的有: 一般方程的次椭圆性和局部可解性, 非强制的边值问题, 书中的结果和方法的非线性形式, 拟微分算子和 Fourier 积分算子. 当然, 对于这些忽略之处, 要求得比简单的讨论或现有的文献更多一些是不合理的, 但是, 这终究是个缺陷.

这是一本很好的教科书, 但还可以更好些, 这就是上面一小段中所述的美中不足之处. 在书的序中, Treves 提出了两个目标: "对现代分析学家, 用他所能了解的语言回忆经典的资料"和"通过它所提供的大量的例子, 发挥这些经典资料的作用, 使之成为现代理论的一个引言". 任何赞同这些目标的人还是读一下该序和这本书为好.

Richard Beals

译自: BULLETIN OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY, Volume 83, Number 2, March 1977, p 208—211.

索　引

一　划

三　划

四　划

五 划

六 划

七 划

八 划

九 划

十 划

十 一 划

十 二 划

十 三 划

十四划及以上